

UN APERÇU DU CALCUL STOCHASTIQUE

Dédié à la mémoire de Claude Godbillon

M. Emery
Université de Strasbourg I et C.N.R.S.

Or du hasard il n'est point de science :
S'il en était, on aurait tort
De l'appeler hasard, ni fortune, ni sort,
Toutes choses très incertaines.

La Fontaine

INTRODUCTION

«Lorsque l'on expose devant un public de mathématiciens, par exemple à Bourbaki, on peut supposer que chacun connaît les variétés de Stein ou les nombres de Betti d'un espace topologique; mais si l'on a besoin d'une intégrale stochastique, on doit définir à partir de zéro les filtrations, les prévisibles, les martingales, etc... Il y a là quelque chose d'anormal. Les raisons en sont bien sûr nombreuses, à commencer par le vocabulaire ésotérique des probabilistes; par exemple, ce qu'ils appellent l'espace de Cameron-Martin est simplement un espace de Sobolev.» Ce constat de Laurent Schwartz s'explique certainement aussi par la loi universelle selon laquelle nous sommes tous, à des degrés divers, prêts à investir énormément de temps et d'efforts pour éviter d'avoir à apprendre une théorie qui ne nous est pas familière.

Ne cherchant en aucune façon l'originalité ni l'exhaustivité, bien au contraire, ne prétendant pas résumer l'histoire du sujet, ni faire de vous des aficionados du calcul stochastique, cette présentation a pour seule ambition de contribuer à vous le rendre un peu moins redoutable et — qui sait ? — de vous donner peut-être envie d'en savoir un peu plus.

Tout comme le calcul infinitésimal ordinaire¹, le calcul stochastique se laisse grosso modo diviser en deux parties, le calcul intégral stochastique et le calcul différentiel stochastique (respectivement appelés outre-Atlantique Itô calculus et Malliavin calculus). Le premier est une théorie de l'intégration qui, outre les infiniment petits usuels dt , d'ordre 1, considère aussi des infiniment petits d'ordre $\frac{1}{2}$, par exemple $dB(t)$, où B est un mouvement brownien. Le produit de deux termes d'ordre $\frac{1}{2}$ étant d'ordre 1, donc non négligeable, la formule du changement de variable dans les intégrales est plus compliquée que la règle usuelle; nous verrons quel sens rigoureux donner au produit $dX dY$ dans la formule $d(XY) = X dY + Y dX + dX dY$. Le calcul intégral stochastique contient aussi la vaste théorie des équations différentielles stochastiques (bien mal nommées : ce sont en fait des équations intégrales), dont nous dirons quelques mots. Le calcul différentiel stochastique, sur lequel nous passerons beaucoup plus rapidement, s'intéresse aux fonctionnelles d'un processus qui répondent de façon suffisamment régulière à une petite perturbation des trajectoires.

Les paragraphes I.a à I.d forment le tronc commun; les autres sont à peu près indépendants entre eux, en dépit des apparences, dues à ce que, pour lier un peu la sauce et lui donner un semblant d'unité, les diffusions dans \mathbb{R}^n ou dans les variétés servent de leitmotiv. Nous verrons par exemple en quel sens la relation entre un champ de vecteurs et ses courbes intégrales se généralise dans le cadre du calcul stochastique au champ d'opérateurs différentiels d'ordre deux $\frac{1}{2}\Delta$ et aux trajectoires du mouvement brownien.

Pour être tout à fait honnête, je dois vous prévenir que les pages qui suivent contiennent des inexactitudes : Sacrifiant la rigueur à la pédagogie, j'ai passé sous silence des hypothèses et des détails de nature purement technique; loin d'éclairer le sujet, les introduire, et surtout vous expliquer qu'ils n'ont pas d'importance, n'auraient fait au contraire qu'obscurcir les choses, sans gain en compréhension.

I. — LE CALCUL INTÉGRAL STOCHASTIQUE.

a) Semimartingales et intégrales stochastiques.

D'abord deux mots de rappel sur l'intégrale (ordinaire) de Stieltjes. Soit x une fonction réelle sur l'intervalle compact $[a, b]$. Convenons de dire que x est une *intégratrice* si, pour toute fonction continue f sur $[a, b]$, les sommes de Riemann $\sum_k f(t_k) (x(t_{k+1}) - x(t_k))$ ont une limite finie (que l'on notera $\int_a^b f(s) dx(s)$) lorsque le pas $\sup_k (t_{k+1} - t_k)$ de la subdivision

$$\sigma \quad : \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

1. En calcul stochastique, on appelle ordinaires, sans la moindre connotation péjorative, les objets qui ressortissent au calcul usuel, non stochastique. On dira par exemple équation différentielle ordinaire, intégrale ordinaire. Corrélativement, il serait logique de remplacer partout le mot stochastique par extraordinaire!

tend vers zéro. Le théorème de Banach-Steinhaus entraîne qu'alors ces sommes de Riemann sont uniformément bornées lorsque f décrit la boule unité de $C([a, b])$; choisissant en particulier une f (dépendant de la subdivision) telle que $f(t_k) = \text{signe}(x(t_{k+1}) - x(t_k))$, on voit que $\sum |x(t_{k+1}) - x(t_k)|$ est bornée uniformément en la subdivision, et l'intégratrice x est une fonction à variation bornée. Elle admet donc en chaque point t une limite à droite $x(t+)$ et une limite à gauche $x(t-)$ (avec, par convention, $x(a-) = x(a)$ et $x(b+) = x(b)$), et il existe une mesure signée bornée μ sur $[a, b]$ telle que $x(t+) - x(a) = \mu([a, t])$ et $x(t-) - x(a) = \mu([a, t[)$; on vérifie facilement que $\int_a^b f(s) dx(s)$ n'est autre que $\mu(f)$. Ainsi, au prix d'une régularisation relativement anodine (remplacer x par sa limite à droite ne modifie x que sur un ensemble dénombrable), et modulo la constante $x(a)$, les intégratrices correspondent biunivoquement aux mesures sur $[a, b]$.

Introduisons le hasard $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et voyons ce qui se passe lorsque l'on remplace les fonctions par des *processus*. (Le terme exact est processus stochastique, ou, de façon plus parlante, fonction aléatoire, mais c'est trop long!) On appelle ainsi toute v. a. à valeurs non pas dans \mathbb{R} , mais dans $\mathbb{R}^{[a, b]}$, c'est-à-dire finalement toute fonction réelle sur le produit $[a, b] \times \Omega$; comme on le fait pour les v. a. réelles, nous leur imposerons d'être mesurables (par rapport à la tribu produit sur $[a, b] \times \Omega$) et nous identifierons deux processus X et Y p. s. égaux, c'est-à-dire tels que pour presque tout ω , les *trajectoires* $t \mapsto X(t, \omega)$ et $t \mapsto Y(t, \omega)$ soient des fonctions égales sur $[a, b]$.

Si l'on substitue aux fonctions x et f ci-dessus des processus X et F , les sommes de Riemann $\sum F(t_k) (X(t_{k+1}) - X(t_k))$ deviennent des variables aléatoires. Même si l'on demande seulement que, pour tout F borné et continu en t , elles convergent en probabilité², on n'obtient ainsi rien d'essentiellement neuf : pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto X(t, \omega)$ de X doit être une intégratrice et les intégrales ainsi obtenues sont simplement des intégrales ordinaires dépendant mesurablement de l'aléa ω .

Pour obtenir une classe d'intégrateurs stochastiques réellement plus générale, nous allons abandonner la prétention d'intégrer tous les processus F mesurables et continus et restreindre l'ensemble des processus à intégrer. L'instrument de cette restriction est la notion de filtration, concept fondamental du calcul stochastique, qui pose la dissymétrie entre passé et futur et permet la modélisation de phénomènes irréversibles.

DÉFINITIONS. — Une *filtration* sur un intervalle réel I est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ de sous-tribus de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2. Rappelons que des v. a. X_n convergent vers X en probabilité si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] \rightarrow 0$; c'est exactement la "convergence en mesure" des analystes, énoncée sur l'espace abstrait Ω . Cette convergence, associée à une topologie métrisable, est très liée à la convergence p. s., qui est un tout petit peu plus forte, mais non topologique.

Un processus $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est *adapté* à cette filtration si, pour chaque t dans I , la v. a. $X(t)$ est mesurable pour la sous-tribu \mathcal{F}_t .

L'intervalle I s'interprète comme l'ensemble des temps et la tribu \mathcal{F}_t est constituée des événements dont on sait à l'instant t s'ils sont ou non réalisés; la condition de croissance exprime que l'information s'accumule sans effacement ni oubli. On remarquera que la probabilité de réalisation d'un événement se modifie au cours du temps; techniquement, il est commode de travailler avec une seule probabilité \mathbb{P} (qui est celle en vigueur avant le début de I) et de représenter la nouvelle probabilité de A à l'instant t par la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[A|\mathcal{F}_t]$; si $A \in \mathcal{F}_t$, cette v. a. est bien entendu celle qui vaut 1 ou 0 selon que ω est ou non dans A .

Les processus adaptés sont ceux dont la valeur à l'instant t (et donc aussi les valeurs aux instants antérieurs à t) est connue de façon certaine à l'instant t . Par exemple, en mathématiques financières (qui utilisent de plus en plus le calcul stochastique), le processus $X(t)$ égal à la valeur à l'instant t d'une action Triangle est adapté, alors que $Y(t) = X(t+1)$ ne l'est pas, du moins si la filtration est celle de Monsieur Tout-le-monde; mais il le serait pour quelqu'un qui, disposant d'une boule de cristal, connaîtrait à l'instant t la valeur de l'action à l'instant $t+1$: plusieurs observateurs peuvent avoir des filtrations différentes selon les informations dont ils disposent. Nous ne parlerons pas ici des changements de filtrations, pourtant fort intéressants.

L'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ étant fixé, nous allons continuer la recherche d'intégrateurs commencée ci-dessus en faisant maintenant jouer un rôle privilégié aux processus adaptés.

DÉFINITION. — Un processus $X : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une *semimartingale* s'il est adapté et si, pour tout processus F continu et adapté, les sommes de Riemann $\sum F(t_k)(X(t_{k+1}) - X(t_k))$ convergent en probabilité vers une limite, alors appelée *intégrale stochastique* de F par rapport à X , et notée $\int_a^b F(s) dX(s)$.

Il s'agit là d'une propriété locale : elle entraîne que la restriction de X à tout sous-intervalle compact de $[a, b]$ est aussi une semimartingale.

DÉFINITION. — Si I n'est pas compact, $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une semimartingale si, pour tout compact $[a, b] \subset I$, la restriction de X à $[a, b]$ en est une.

Le miracle, c'est que l'on obtienne de la sorte une classe d'intégrateurs et une théorie de l'intégration qui généralisent de façon tout à fait non triviale le cas ordinaire. Il existe des semimartingales dont aucune trajectoire n'est à variation bornée. Cela n'est possible que parce que nous avons choisi de travailler avec des sommes de Riemann bien particulières, où l'on utilise la valeur de la fonction F uniquement aux extrémités *gauches* des intervalles de subdivision; ce n'était qu'un détail anodin dans le cas déterministe ou en l'absence de filtration, c'est essentiel ici (si l'on avait droit aux extrémités droites $F(t_{k+1})$, on pourrait choisir comme plus haut $F(t_{k+1}) = \text{signe}(X(t_{k+1}) - X(t_k))$ et en déduire que X

est à variation bornée; avec les extrémités gauches, c'est impossible parce que le choix $F(t_k) = \text{signe}(X(t_{k+1}) - X(t_k))$ n'est pas adapté.

On peut montrer que, après avoir si nécessaire remplacé chaque v. a. $X(t)$ par une v. a. qui lui est p. s. égale, toute semimartingale X a chacune de ses trajectoires $t \mapsto X(t)$ pourvue en chaque point de limites à droite $X(t+)$ et à gauche $X(t-)$, et même continue sauf pour un ensemble (aléatoire) dénombrable de valeurs de t ; ces discontinuités sont appelées les *sauts* de X . Contrairement aux fonctions à variation bornée, pour lesquelles la somme $\sum_{a \leq t \leq b} [|x(t) - x(t-)| + |x(t+) - x(t)|]$ des valeurs absolues des sauts sur un compact est toujours convergente, les semimartingales vérifient en général seulement $\sum_{a \leq t \leq b} [(X(t) - X(t-))^2 + (X(t+) - X(t))^2] < \infty$.

b) Décomposition des semimartingales.

Parmi les semimartingales figurent bien sûr ceux des intégrateurs rencontrés plus haut qui sont adaptés; nous les appellerons simplement dans la suite *processus à variation finie*, pour souligner que ce sont les processus adaptés dont chaque trajectoire est à variation bornée sur tout compact, mais que cette borne peut dépendre de ω .

Une autre classe encore plus intéressante de semimartingales est l'espace des *martingales*. On appelle ainsi tout processus adapté X tel que pour chaque $t \in I$ la v. a. $X(t)$ soit intégrable par rapport à \mathbb{P} et que pour tous s et t dans I tels que $s \leq t$ l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s]$ soit égale à $X(s)$.

Comme nous venons de le dire, les martingales sont toujours des semimartingales. Voici une analogie qui vous aidera à voir pourquoi. Dans un espace de Hilbert réel, soit $(x(t))_{a \leq t \leq b}$ une courbe à accroissements orthogonaux : pour $s \leq t$, l'accroissement $x(t) - x(s)$ est orthogonal au sous-espace $H(s)$ engendré par tous les $x(r)$ pour $r \leq s$. Bien qu'en général une telle courbe ne soit pas à variation bornée (par exemple, dans $L^2([0, 1])$, prendre pour $x(t)$ la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, t]$ et 0 sur $]t, 1]$), on peut néanmoins définir les intégrales de la forme $\int (f(s), dx(s))$, pourvu que la courbe borélienne bornée f vérifie $f(s) \in H(s)$ pour tout s . Un exemple très voisin est la décomposition spectrale des opérateurs. Le cas des martingales est tout à fait semblable.

Un exemple simple et important de martingale est la probabilité conditionnelle $X(t) = \mathbb{P}[A | \mathcal{F}_t]$ que nous avons rencontrée plus haut.

D'autres exemples, tout à fait fondamentaux et donnant lieu à d'innombrables travaux, sont les *mouvements browniens*. On appelle mouvement brownien tout processus X continu, adapté, tel que pour $s < t$ l'accroissement $X(t) - X(s)$ soit indépendant de la tribu \mathcal{F}_s (et en particulier de tout le passé $(X(u))_{u \leq s}$ de X) et suive la loi normale centrée de variance $t - s$. Tous les mouvements browniens qui partent d'un point donné ont même loi de probabilité (c'est pourquoi vous avez sûrement déjà entendu dire, par abus de langage, LE mouvement brownien); pour vous en faire une idée, sachez que, pour n infiniment grand, la promenade

aléatoire d'un ivrogne qui fait n fois par unité de temps un déplacement de $\pm 1/\sqrt{n}$ sur la droite³ est infiniment proche d'un mouvement brownien. Bien que continu, les mouvements browniens sont extrêmement irréguliers : ils ne sont nulle part dérivables, et, pour tout $[a, b] \subset I$, la variation quadratique $\sum_k (X(t_{k+1}) - X(t_k))^2$, calculée selon la suite des subdivisions dyadiques de $[a, b]$, converge p. s. vers $b - a$. Ils vous ont été présentés dans *la Gazette* d'Avril 1989 par Jean-François Le Gall; sa Figure 2 (due à Paolo Baldi) me dispense de vous en fournir une simulation.

Afin d'en simplifier la technique pour en dévoiler, autant que faire se peut, la beauté, nous nous restreignons dans toute la suite au calcul stochastique continu : le mot semimartingale désignera désormais les semimartingales continues, et, de même, toutes les martingales et tous les processus à variation finie seront implicitement supposés continus.

Pour fixer les idées, nous prendrons dorénavant pour I la demi-droite \mathbb{R}_+ (les mouvements browniens par exemple ne peuvent pas être définis sur toute la droite puisque l'accroissement de variance $\text{Var } X(t) - \text{Var } X(s)$ vaut $t - s$); l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ est fixé une fois pour toutes. Si X est une semimartingale et F un processus continu adapté, on note $\int F dX$ et on appelle intégrale stochastique de F par rapport à X le processus dont la valeur à l'instant t est la v. a. $\int_0^t F(s) dX(s)$; la pratique confirme que donner ainsi le même nom à ces v. a. et au processus qu'elles forment ne crée pas d'ambiguïté. Ce processus $\int F dX$ est lui-même une semimartingale, et l'on a pour G continu et adapté l'égalité $\int G d[\int F dX] = \int (GF) dX$, qui fait des semimartingales un module sur l'algèbre des processus continus adaptés.

Il est clair que si X est à variation finie, les intégrales $\int F dX$ le sont aussi. Pour ce qui est des martingales, en écrivant

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_s^t F(u) dX(u) \mid \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\lim \sum F(t_k) (X(t_{k+1}) - X(t_k)) \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \lim \mathbb{E} \left[\sum \mathbb{E} [F(t_k) (X(t_{k+1}) - X(t_k)) \mid \mathcal{F}_{t_k}] \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \lim \mathbb{E} \left[\sum F(t_k) \mathbb{E} [X(t_{k+1}) - X(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_k}] \mid \mathcal{F}_s \right] = 0, \end{aligned}$$

on pourrait croire que si X en est une il en va de même de $\int F dX$, mais il n'en est rien : ce calcul nécessite l'intégrabilité de $F(t_k)(X(t_{k+1}) - X(t_k))$ (et même un peu plus, pour commuter limites et espérances), qui n'a aucune raison d'avoir lieu en général; et on est obligé d'introduire une nouvelle classe de semimartingales, stable, elle, par intégration stochastique.

DÉFINITION. — Une semimartingale de la forme $\int F dX$, où F est continu et adapté et X est une martingale, est appelée une *martingale locale*.

3. Ou tout autre déplacement de moyenne nulle et de variance $1/n$; ces déplacements doivent être indépendants.

La raison de cette terminologie (un peu dangereuse, car les martingales locales ne sont pas toutes des martingales) est que toute martingale locale peut être obtenue par juxtaposition de morceaux de martingales sur des intervalles (aléatoires) disjoints. Localement, ces processus se comportent comme des martingales, la seule différence étant qu'ils ne sont pas soumis à une condition d'intégrabilité. Mais dès qu'une martingale locale est suffisamment intégrable, par exemple lorsqu'elle est bornée uniformément en ω sur chaque intervalle compact $[0, t]$, c'est une vraie martingale.

THÉORÈME. — *Toute semimartingale se décompose, de façon unique, en la somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie.*

Ce résultat profond élucide complètement la structure des semimartingales. Il donne aussi une interprétation heuristique des semimartingales comme superposition d'un mouvement ordinaire, la partie à variation finie (qui dans la pratique sera le plus souvent de classe C^1), et d'une perturbation très irrégulière, sans tendance d'un côté ou de l'autre, que l'on peut considérer comme une fluctuation pure, la partie martingale locale. Pensez par exemple à la chute d'une feuille morte un jour de vent, ou, en théorie du signal, à la somme d'un message et d'un bruit.

c) Variation quadratique des semimartingales.

Soient X et Y deux semimartingales. Pour une subdivision de $[0, t]$ dont le pas tend vers zéro, en vertu de l'identité

$$\Delta x \Delta y = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy - x \Delta y - y \Delta x ,$$

les sommes $\sum (X(t_{k+1}) - X(t_k))(Y(t_{k+1}) - Y(t_k))$ convergent en probabilité vers la v. a.

$$\langle X, Y \rangle(t) = X(t)Y(t) - X(0)Y(0) - \int_0^t X(s) dY(s) - \int_0^t Y(s) dX(s) .$$

Considéré comme un processus, $\langle X, Y \rangle$ est continu, adapté et nul en zéro; il dépend bilinéairement de X et Y ; nous l'appellerons la *covariation* de X et Y (mais si vous voulez avoir l'air branché, dites simplement le *crochet* de X et Y). Prenant en particulier $X = Y$, on voit que $\langle X, X \rangle(t)$, obtenu comme limite des sommes $\sum (X(t_{k+1}) - X(t_k))^2$, est croissant en t ; on l'appelle *variation quadratique* de la semimartingale X . Dans le cas général, la formule de polarisation $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} [\langle X + Y, X + Y \rangle - \langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle]$ implique que $\langle X, Y \rangle$, différence de processus croissants, est à variation finie (et a fortiori une semimartingale). Revenant à la définition de $\langle X, Y \rangle$, on en déduit par différence que *le produit XY est lui aussi une semimartingale*: celles-ci forment une algèbre. Nous verrons bien mieux dans quelques instants, avec la formule du changement de variables.

Désignant toujours par X et Y deux semimartingales, soient F et G deux processus continus adaptés. Les intégrales stochastiques $\int F dX$ et $\int G dY$ sont des semimartingales; leur covariation n'est pas difficile à obtenir : À des termes d'ordre 2 près, l'accroissement $\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(s) dX(s)$ vaut $F(t_k)(X(t_{k+1})-X(t_k))$, donc le produit $\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(s) dX(s) \int_{t_k}^{t_{k+1}} G(s) dY(s)$ vaut, modulo des termes d'ordre 3, $(FG)(t_k)(X(t_{k+1})-X(t_k))(Y(t_{k+1})-Y(t_k))$. Sommant en k et passant à la limite (il faut bien sûr un peu de travail pour le faire rigoureusement), on obtient l'agréable formule

$$\langle \int F dX, \int G dY \rangle = \int (FG) d\langle X, Y \rangle .$$

Si X est un processus à variation finie, la majoration

$$\left| \sum_k (X(t_{k+1})-X(t_k))(Y(t_{k+1})-Y(t_k)) \right| \leq \sup_{\ell} |Y(t_{\ell+1}) - Y(t_{\ell})| \sum_k |X(t_{k+1})-X(t_k)|$$

montre que le crochet $\langle X, Y \rangle$ est nul : *la covariation de deux semimartingales ne dépend que de leurs parties martingales locales; elle n'est pas altérée si on leur ajoute des processus à variation finie.*

d) La formule du changement de variables.

Si X ou Y est à variation finie, remplaçant $\langle X, Y \rangle$ par zéro dans sa définition, on obtient la formule (ordinaire) d'intégration par parties

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X(s) dY(s) + \int_0^t Y(s) dX(s) ;$$

mais dans le cas général la covariation n'est pas nulle, et cette formule devient

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X(s) dY(s) + \int_0^t Y(s) dX(s) + \langle X, Y \rangle(t) .$$

Prenons par exemple le cas d'un mouvement brownien X . Sa variation quadratique est $\langle X, X \rangle(t) = t$; il faut donc abandonner des habitudes ancrées depuis trois siècles et accepter l'identité extraordinaire

$$X(t)^2 - X(0)^2 = 2 \int_0^t X(s) dX(s) + t \quad !$$

Nous avons là un premier aperçu d'un énoncé très général, la célèbre formule du changement de variable, poutré maîtresse de tout le calcul stochastique.

THÉORÈME. — Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ une semimartingale à valeurs dans \mathbb{R}^n (c'est-à-dire que chaque X_i est une semimartingale réelle) et f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , de classe C^2 . Le processus réel $f \circ X$ est une semimartingale. Plus précisément, en notant $D_i = \partial/\partial x_i$ et $D_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$ les opérateurs de dérivation partielle,

$$f \circ X = f \circ X(0) + \sum_{i=1}^n \int D_i f \circ X dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int D_{ij} f \circ X d\langle X_i, X_j \rangle.$$

Pour obtenir ce résultat, prenez une subdivision de $[0, t]$, écrivez la formule de Taylor à l'ordre deux pour f sur le segment $[X(t_k), X(t_{k+1})]$, summez en k , et... faites confiance à Itô pour le passage à la limite! Vous pouvez aussi, et c'est un exercice que je vous recommande, vérifier que si la formule est vraie pour deux fonctions, elle l'est également pour leur produit; il vous faudra pour cela utiliser la formule générale d'intégration par parties ci-dessus et celle qui donne le crochet de deux intégrales stochastiques. Vous en déduirez le cas où f est un polynôme; mais pour le cas général des fonctions C^2 , vous n'échapperez pas au passage à la limite.

Prenant en particulier $f(x, y) = xy$, on retrouve la définition de la covariation. Si les X_i sont à variation finie, les crochets $\langle X_i, X_j \rangle$ sont tous nuls, et on retrouve la formule ordinaire $d(f \circ X) = \sum D_i f \circ X dX_i$. Mais en général, le calcul stochastique est réellement, comme nous allons le voir, un calcul d'ordre deux.

La formule du changement de variables est d'une grande efficacité dans de nombreuses questions de calcul des probabilités. Par exemple, nous avons vu plus haut que les mouvements browniens sont des martingales et ont t pour variation quadratique; réciproquement, nous allons démontrer que toute martingale (ou toute martingale locale) X de variation quadratique $\langle X, X \rangle(t) = t$ est un mouvement brownien. Pour établir ce résultat, une idée naturelle serait de décomposer l'accroissement $X(t) - X(s)$ en somme de nombreux petits accroissements et d'utiliser un théorème de limite centrale pour affirmer qu'une telle somme a nécessairement une loi gaussienne. Voici une démonstration bien plus simple, dans laquelle il n'y a plus aucun passage à la limite : ils ont tous été déjà effectués dans la démonstration de la formule du changement de variables.

Soit donc X une martingale (locale ou non) telle que $\langle X, X \rangle(t) = t$. Écrivons la formule du changement de variables pour la fonction (complexe) $f(x) = e^{i\lambda x}$, où le réel λ est fixé :

$$e^{i\lambda X(t)} = e^{i\lambda X(0)} + i\lambda \int_0^t e^{i\lambda X(s)} dX(s) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t e^{i\lambda X(s)} ds$$

(l'hypothèse a été utilisée pour écrire ds au lieu de $d\langle X, X \rangle(s)$). Le processus $M = i\lambda \int e^{i\lambda X} dX$ qui figure au second membre, intégrale stochastique par rapport à une martingale (locale), est une martingale locale; comme tout le reste de la formule est borné (du moins si l'on se restreint à un intervalle de temps

compact), cette martingale locale l'est aussi, et est donc une vraie martingale. Il s'ensuit que, pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[M(t) - M(s) | \mathcal{F}_s] = 0$, d'où

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X(t)} - e^{i\lambda X(s)} + \frac{\lambda^2}{2} \int_s^t e^{i\lambda X(r)} dr \mid \mathcal{F}_s\right] = 0,$$

ou encore, fixant s et posant $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{i\lambda[X(t)-X(s)]} | \mathcal{F}_s]$ pour $t \geq s$,

$$\phi(t) - 1 + \frac{\lambda^2}{2} \int_s^t \phi(r) dr = 0.$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire est $\phi(t) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$. Considérant maintenant ceci comme une fonction de λ , on voit que la transformée de Fourier de la loi conditionnelle de l'accroissement $X(t) - X(s)$ sachant \mathcal{F}_s est $\mathbb{E}[e^{i\lambda[X(t)-X(s)]} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{t-s}{2}\lambda^2}$; il s'ensuit que cet accroissement est indépendant de \mathcal{F}_s , et suit la loi normale de variance $t - s$.

Plus généralement, toute martingale (ou martingale locale) vectorielle $X = (X_1, \dots, X_n)$ dont les covariations valent $\langle X_i, X_j \rangle(t) = t$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$ est un mouvement brownien dans \mathbb{R}^n (ceci veut dire que les X_i sont des mouvements browniens indépendants). Vous l'établirez sans aucune difficulté en remplaçant X et λ par des vecteurs dans la démonstration précédente.

e) Intégrales de Stratonovitch.

Il existe toutefois une façon d'éliminer les termes d'ordre 2 dans la formule du changement de variable, au moyen de ce qu'on appelle les *intégrales stochastiques de Stratonovitch* (les intégrales que nous avons vues jusqu'ici s'appellent, par opposition, intégrales d'Itô). Si X et Y sont deux semimartingales, on définit l'intégrale de Stratonovitch de Y par rapport à X comme le processus $\int Y \delta X = \int Y dX + \frac{1}{2}\langle Y, X \rangle$. Si vous avez envie de jouer un peu avec ce que vous connaissez déjà en calcul stochastique, je vous laisse établir, à titre d'exercice, que si X est une semimartingale dans \mathbb{R}^n et f une fonction de classe C^3 sur \mathbb{R}^n , la formule du changement de variable devient la formule ordinaire

$$f \circ X = f \circ X(0) + \sum_{i=1}^n \int D_i f \circ X \delta X_i$$

(utilisez le fait que les processus à variation finie sont ignorés par la covariation). Il est clair que l'intégrale de Stratonovitch $\int_0^t Y(s) \delta X(s)$ est la limite des sommes $\sum \frac{1}{2}(Y(t_k) + Y(t_{k+1}))(X(t_{k+1}) - X(t_k))$; on peut montrer que c'est aussi la limite des sommes de Riemann $\sum Y(\frac{1}{2}(t_k + t_{k+1}))(X(t_{k+1}) - X(t_k))$.

Vous me maudissez peut-être pour vous avoir fait avaler tout ce qui précède avant d'en arriver, enfin, à une intégrale raisonnable. C'est en réalité l'intégrale d'Itô qui est, à bien des égards, la plus raisonnable; c'est même en fait la seule des deux qui mérite réellement le nom d'intégrale : elle s'étend à tous les processus bornés mesurables par rapport à une certaine tribu, vérifie un théorème de

convergence dominée, et peut être associée à une mesure, à valeurs non pas réelles, mais dans l'e. v. t. non localement convexe de toutes les v. a. ! (Mais je m'étais juré de ne pas vous entraîner si loin...) Celle de Stratonovitch, en revanche, n'est définie que pour des intégrands Y suffisamment réguliers (il faut en effet que la covariation de Y avec X existe), et ressemble donc beaucoup plus à un opérateur intégro-différentiel, pourvu d'un domaine. Mais surtout, elle ne respecte pas les martingales locales, alors que dans bien des applications, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus, il est important dans un calcul stochastique de suivre séparément les parties martingale locale et à variation finie.

f) Diffusions dans les variétés.

Si X est un mouvement brownien à n dimensions, la formule du changement de variables prend la forme compacte $d(f \circ X) = \text{grad } f(X) \cdot dX + \frac{1}{2} \Delta f(X) dt$ qui montre que pour f de classe C^2 la partie à variation finie de la semimartingale $f \circ X$ est en fait une fonction (aléatoire) du temps de classe C^1 , de dérivée $\frac{1}{2} \Delta f \circ X$. Nous allons établir ci-dessous que cette propriété suffit à elle seule à caractériser les mouvements browniens. Cet exemple est le prototype d'une famille de processus, les processus de Markov, à valeurs dans des espaces extrêmement généraux; nous ne parlerons ici que des diffusions dans les variétés. Puisque les fonctions C^2 opèrent sur les semimartingales, il est possible de définir les *semimartingales à valeurs dans une variété V* (de classe C^2 au moins) comme les processus X dans V tels que $f \circ X$ soit une semimartingale (réelle) pour toute fonction f de $C^2(V)$ (rappelons que l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ est fixé). Si des fonctions f^1, \dots, f^n forment une carte globale de V , ou réalisent un plongement propre de V dans un espace vectoriel, ceci équivaut à dire que chaque $f^i \circ X$ est une semimartingale.

Soient V une variété et $L : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ un opérateur linéaire dans l'espace vectoriel des fonctions lisses sur V . Nous appellerons *diffusion de générateur L* toute semimartingale X dans V telle que, pour chaque $f \in C^\infty(V)$, la partie à variation finie de la semimartingale $f \circ X$ ait $Lf \circ X$ pour dérivée par rapport au temps. En d'autres termes, pour chaque f , le processus

$$f \circ X(t) - f \circ X(0) - \int_0^t Lf \circ X(s) ds$$

doit être une martingale locale.

Soit X une diffusion de générateur L . Définissons une application bilinéaire symétrique Γ de $C^\infty(V) \times C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$ par

$$\Gamma(f, g) = L(fg) - fLg - gLf .$$

(On l'appelle le *carré du champ* associé à L car, lorsque L est le demi laplacien sur \mathbb{R}^n ou sur une variété riemannienne, $\Gamma(f, f)$ est le carré du gradient de f ; remarquez que le carré du champ est identiquement nul si et seulement si L est

une dérivation de l'algèbre $C^\infty(V)$, c'est-à-dire un champ de vecteurs sur V .) Soient $f = (f_1, \dots, f_p) : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lisses. Écrivons de deux manières différentes la décomposition de la semimartingale $\phi \circ f \circ X$. On a d'une part

$$(\phi \circ f)(X) - (\phi \circ f)(X(0)) = \text{martingale locale} + \int L(\phi \circ f)(X) dt ,$$

et d'autre part, par la formule du changement de variables,

$$\begin{aligned} & \phi(f \circ X) - \phi(f \circ X(0)) \\ &= \sum_i \int D_i \phi \circ f(X) d(f_i \circ X) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int D_{ij} \phi \circ f(X) d\langle f_i \circ X, f_j \circ X \rangle \\ &= \text{martingale locale} + \sum_i \int D_i \phi \circ f(X) Lf_i(X) dt \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int D_{ij} \phi \circ f(X) d\langle f_i \circ X, f_j \circ X \rangle . \end{aligned}$$

Par l'unicité de la décomposition, les parties à variation finie doivent être les mêmes, d'où

$$\int [L(\phi \circ f) - \sum_i D_i \phi \circ f Lf_i](X) dt = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int D_{ij} \phi \circ f(X) d\langle f_i \circ X, f_j \circ X \rangle ;$$

prenant en particulier $\phi(u, v) = uv$, on obtient pour g et h dans $C^\infty(V)$ la covariation $\langle g \circ X, h \circ X \rangle(t) = \int_0^t \Gamma(g, h)(X(s)) ds$. En remplaçant maintenant $d\langle f_i \circ X, f_j \circ X \rangle$ par $\Gamma(f_i, f_j)(X) dt$, la formule qui précède devient

$$\int_0^t [L(\phi \circ f) - \sum_i D_i \phi \circ f Lf_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int D_{ij} \phi \circ f \Gamma(f_i, f_j)](X(s)) ds = 0 ,$$

et, en utilisant la continuité de X pour dériver par rapport à t , on en déduit que la fonction $L(\phi \circ f) - \sum_i D_i \phi \circ f Lf_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int D_{ij} \phi \circ f \Gamma(f_i, f_j)$ est identiquement nulle sur les trajectoires du processus X . Si, comme le cas se présente fréquemment, le plus petit fermé de V dans lequel X reste p. s. est la variété tout entière, l'identité $L(\phi \circ f) = \sum_i D_i \phi \circ f Lf_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int D_{ij} \phi \circ f \Gamma(f_i, f_j)$ a lieu partout. Prenant en particulier une f dont la restriction à un ouvert de V est une carte locale, cette formule donne la lecture de L dans la carte, de la forme $L = \sum \lambda_i D_i + \frac{1}{2} \sum \lambda_{ij} D_{ij}$. De plus, en remarquant que le processus croissant $\langle f \circ X, f \circ X \rangle(t) = \int_0^t \Gamma(f, f) \circ X(s) ds$ a pour dérivée en t la valeur au point $X(t)$ de $\Gamma(f, f)$ qui doit donc être positive, on obtient, de la même façon, que pour toute f lisse la fonction $\Gamma(f, f)$ est positive partout; ceci se traduit sur les coefficients λ_{ij} obtenus ci-dessus par la positivité de la matrice des λ_{ij} en chaque point. En résumé, la covariation $\langle g \circ X, h \circ X \rangle(t)$ d'une diffusion X est toujours donnée par l'intégrale $\int_0^t \Gamma(g, h)(X(s)) ds$; si le processus explore tout l'espace, son générateur est un opérateur différentiel d'ordre deux, sans terme constant, à coefficients C^∞ , de type positif.

Un exemple important est le cas où V est munie d'une structure riemannienne, et où L est le demi laplacien $\frac{1}{2}\Delta$. Les diffusions de générateur $\frac{1}{2}\Delta$ sont appelées mouvements browniens sur V ; dans le cas euclidien où $V = \mathbb{R}^n$, ce sont exactement les mouvements browniens que nous connaissons déjà. Soient en effet f_i les coordonnées sur \mathbb{R}^n ; puisque $\Delta f_i = 0$, chacun des processus $f_i \circ X - f_i \circ X(0)$ est une martingale locale; quant aux crochets $\langle f_i \circ X, f_j \circ X \rangle$, ils ont été calculés au cours de la démonstration précédente, et valent $\int \Gamma(f_i, f_j) \circ X dt = \delta_{ij}t$; et nous avons vu plus haut que ces propriétés sont caractéristiques des mouvements browniens.

Un autre exemple, très dégénéré du point de vue probabiliste, est le cas où le générateur L est d'ordre 1, c'est-à-dire un champ de vecteurs. Son carré du champ Γ est identiquement nul. Soit f une fonction C^∞ à support compact. Puisque f et Lf sont bornées, la martingale locale $M(t) = f \circ X(t) - f \circ X(0) - \int_0^t Lf \circ X(s) ds$ est bornée sur tout intervalle de temps compact, et il en va de même de son carré M^2 . Mais la formule d'intégration par parties appliquée à M donne $M^2 = 2 \int M dM$, car le crochet $\langle M, M \rangle = \langle f \circ X, f \circ X \rangle = \int \Gamma(f, f) \circ X dt$ est identiquement nul; M^2 est donc aussi une martingale locale, et, bornée sur les compacts, c'est une vraie martingale. Par suite, son espérance est constante. Il en résulte que $\mathbb{E}[M(t)^2] = \mathbb{E}[M(0)^2] = 0$, et M est identiquement nulle. On a donc $f \circ X(t) = f \circ X(0) + \int_0^t Lf \circ X(s) ds$ pour toute f , et ceci établit que X est une courbe intégrale du champ de vecteurs L , le hasard ne pouvant intervenir que dans le choix de la position initiale $X(0)$.

Avant de passer à la construction des diffusions, deux mots, tout à fait informels et non rigoureux, de leurs liens avec la théorie des équations paraboliques et la théorie du potentiel.

Prenant pour simplifier V compacte, soient X une diffusion de générateur L et, pour tout $t \geq 0$, μ_t la loi de probabilité de $X(t)$, qui est une mesure sur V . Supposons toutes ces mesures (sauf peut-être μ_0) absolument continues par rapport à une même probabilité de référence m (lorsque L est elliptique, on choisit souvent pour m la mesure riemannienne associée à la structure riemannienne sur V telle que L soit la somme d'un opérateur d'ordre 1 et du laplacien) et appelons p_t la densité $d\mu_t/dm$ de μ_t par rapport à m . En intégrant en ω la propriété de diffusion, la partie martingale disparaît et on obtient pour $f \in C^\infty(V)$

$$\mathbb{E}[f \circ X(t)] = \mathbb{E}[f \circ X(0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^t (Lf) \circ X(s) ds\right],$$

c'est-à-dire, en notant L^* l'adjoint formel de L pour m ,

$$\begin{aligned} \int f(x) p_t(x) m(dx) &= \mu_0(f) + \int \int_0^t Lf(x) p_s(x) ds m(dx) \\ &= \mu_0(f) + \int_0^t \int f(x) L^* p_s(x) m(dx) ds, \end{aligned}$$

et la densité p_t de la loi de $X(t)$ est donc la solution de l'équation parabolique

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L^*\right)p_t = 0 ;$$

si en outre la v. a. initiale $X(0)$ est un point ξ de V , la mesure initiale μ_0 est la masse unité en ξ , et p_t est la solution élémentaire de cette équation.

Quittons l'équation parabolique pour l'équation de Poisson. Si U est un ouvert de V et f une fonction borélienne bornée sur le bord ∂U , considérons pour $\xi \in U$ une diffusion X de générateur L et de point de départ ξ ; supposons que, avec probabilité 1, la diffusion ne reste pas confinée dans U : il existe p. s. un t (aléatoire) tel que $X(t)$ soit dans ∂U . Appelant alors T le premier instant $\inf\{t \geq 0 : X(t) \in \partial U\}$ où le processus quitte U , on peut établir que le réel $\mathbb{E}[f(X(T))]$ ne dépend que de ξ , f et L , et non de la diffusion choisie. En le notant $g(\xi)$, la fonction g ainsi construite vérifie $Lg = 0$ dans U et elle tend vers f au bord, pour beaucoup de points du bord, en un sens qui dépend du processus X (par exemple, dans le cas brownien où $L = \frac{1}{2}\Delta$ et si le bord ∂U est assez régulier, on aura presque partout des limites non-tangentes). Ce résultat nécessite des techniques markoviennes qui sont hors de notre portée. En utilisant ce que nous avons déjà appris en calcul stochastique, il est possible d'en établir la version très faible que voici : si f est C^2 sur un voisinage de \bar{U} et y vérifie $Lf = 0$, alors $\mathbb{E}[f(X(T))] = f(\xi)$ si ξ est dans U et si T existe p. s.

g) Équations différentielles stochastiques.

Les deux remarques qui précèdent expliquent pourquoi il est fort intéressant de savoir construire une diffusion de générateur et de point de départ donnés; une méthode très efficace consiste à fabriquer le processus comme solution d'une équation différentielle stochastique. Nous allons le faire ici en supposant L à coefficients C^∞ , mais la théorie peut être étendue au cas seulement continu; l'unicité est alors en défaut.

Nous supposerons pour simplifier que la variété V est l'espace \mathbb{R}^d ; le cas général peut s'y ramener, que ce soit par plongement ou au moyen de localisations; mais ceci nécessiterait des développements techniques longs, bien que faciles, que je préfère omettre.

Soit donc, sur \mathbb{R}^d muni de ses coordonnées canoniques x_i , l'opérateur différentiel $L = \sum_{ij} \lambda_{ij} D_{ij} + \sum_k \lambda_k D_k$, à coefficients C^∞ , la matrice (λ_{ij}) étant en chaque point de type positif. Nous supposerons en outre que L peut être mis sous la forme, dite de Hörmander, $B + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha^2$, où B et les A_α sont $1 + n$

champs de vecteurs C^∞ sur V , considérés comme opérateurs différentiels, et où A_α^2 est simplement l'opérateur A_α appliqué deux fois. Une telle écriture est toujours possible lorsque L est elliptique (c'est-à-dire de type défini positif) : il suffit dans ce cas de choisir $n = d$ et de prendre pour composantes a_α^i de A_α les coefficients de la matrice racine carrée symétrique positive de (λ_{ij}) . (Dans le cas général où L est seulement de type positif et à coefficients continus, ce choix est toujours possible, mais fournit des A_α qui ne sont en général que continus, même si L est lui-même C^∞ .) Revenons au cas C^∞ , bien plus simple.

Soit ξ un point de \mathbb{R}^d ; notre but est de construire une diffusion X , de générateur $L = B + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha^2$, qui parte de $X(0) = \xi$.

Donnons-nous un mouvement brownien vectoriel auxiliaire $W = (W_1, \dots, W_n)$, défini sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n (et non pas \mathbb{R}^d), et considérons le système d'équations différentielles stochastiques

$$X_i(t) = x_i(\xi) + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t a_\alpha^i(X(s)) dW_\alpha(s) + \int_0^t \lambda_i(X(s)) ds .$$

Les données sont les semimartingales $W_\alpha(t)$... et t ! Elles jouent collectivement le rôle joué par le temps dans les équations différentielles ordinaires. Les coefficients sont les fonctions réelles a_α^i et λ_i sur \mathbb{R}^d , et les conditions initiales sont les coordonnées $x_i(\xi)$ du point ξ . Les inconnues, enfin, sont les d semimartingales X_i , qui sont les composantes d'une semimartingale vectorielle X dans \mathbb{R}^d . Exactement comme dans le cas ordinaire où L est d'ordre 1 et tous les A_α nuls, qui est après tout un cas particulier du cas stochastique, ce système peut être intégré : il existe une vaste théorie des équations différentielles stochastiques, qui établit entre autres résultats l'existence, sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ que nous nous sommes donné, d'une semimartingale vectorielle X et une seule qui résolve notre système. Une méthode possible pour obtenir cette solution est celle de Picard, qui part d'une semimartingale arbitraire à d dimensions X^0 et définit inductivement une suite de semimartingales par les intégrales stochastiques

$$X_i^{\ell+1}(t) = x_i(\xi) + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t a_\alpha^i(X^\ell(s)) dW_\alpha(s) + \int_0^t \lambda_i(X^\ell(s)) ds ;$$

on vérifie que lorsque ℓ tend vers l'infini, X^ℓ converge vers l'unique solution du système.

Il y a toutefois une difficulté : déjà dans le cas déterministe où L est d'ordre 1 (et donc $A_\alpha = 0$), résoudre ce système revient à intégrer le champ de vecteurs L ; or on sait bien qu'en général un champ de vecteurs n'est pas complet, la courbe intégrale issue d'un point ξ pouvant être définie sur un intervalle maximal qui n'est pas \mathbb{R}_+ tout entier. Dans le cas général où L est vraiment d'ordre 2, cette difficulté se trouve aggravée par le fait que l'instant d'explosion est le plus souvent aléatoire, et non borné inférieurement (sauf par zéro) : la solution ne peut être définie sur aucun intervalle déterministe $[0, t]$, il faut travailler avec un processus

défini sur un intervalle aléatoire. Pour éviter de rentrer dans ces considérations trop techniques, je me simplifierai ici la tâche en supposant l'opérateur L à support compact, ce qui élimine tout danger d'explosion (dans le cas général d'une variété V , la même condition, L à support compact, assure encore la non-explosion ; elle est en particulier automatiquement satisfaite si V elle-même est compacte).

Comme vous l'avez deviné, la semimartingale X est une diffusion dont le générateur est L . Pour le vérifier, écrivons, pour f lisse sur \mathbb{R}^d , la formule du changement de variables. Utilisant l'identité $\frac{1}{2}\sum_{ij\alpha} a_\alpha^i a_\alpha^j D_{ij} = \sum_{ij} \lambda_{ij} D_{ij}$ (identifier les parties d'ordre deux dans L et dans $\frac{1}{2}\sum_\alpha A_\alpha^2 + B$) et la covariation brownienne $d\langle W_\alpha, W_\beta \rangle(s) = \delta_{\alpha\beta} ds$, on obtient facilement

$$f \circ X(t) = f(\xi) + \sum_\alpha \int_0^t (A_\alpha f) \circ X(s) dW_\alpha(s) + \int_0^t (Lf) \circ X(s) ds ;$$

le résultat en découle puisque les W_α sont des martingales.

Regardons ce que nous venons de faire. Nous sommes partis d'un mouvement brownien, c'est-à-dire d'une diffusion de générateur $\frac{1}{2}\Delta$, dans un espace auxiliaire \mathbb{R}^n , et nous l'avons transformé, courbé, tordu au moyen de l'équation différentielle stochastique en une diffusion de générateur L dans \mathbb{R}^d , ramenant de ce fait le problème de la construction de la diffusion à la construction du brownien lui-même, que l'on sait effectuer depuis fort longtemps. C'est pourquoi les équations différentielles stochastiques sont un puissant outil de construction de processus, et, indirectement, d'après ce que nous avons vu plus haut, d'étude d'une équation parabolique ou de l'équation de Poisson.

Une dernière remarque. De même qu'un champ de vecteurs donne lieu, non seulement à des courbes intégrales, mais aussi à tout un flot, de même le procédé par lequel nous venons de fabriquer X permet de construire un flot stochastique⁴ de difféomorphismes de \mathbb{R}^d (qui laissent fixe le complémentaire du support de L), ou de V dans le cas d'une variété compacte. Il suffit pour cela de faire varier le point initial ξ dans \mathbb{R}^d en prenant bien soin de conserver la même décomposition de Hörmander de L et le même brownien auxiliaire W . La solution X est alors une fonction des trois variables ξ , t et ω , et pour t et ω fixés, il est possible d'établir que l'application $\xi \mapsto X(\xi, t, \omega)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d ; notons-le $\Phi(t, \omega)$. On peut, bien sûr, le faire agir sur les fonctions : pour f lisse, posons $\Psi(t, \omega)f = f \circ (\Phi(t, \omega))$. Chaque $\Psi(t, \omega)$ est un homomorphisme de l'algèbre des fonctions C^∞ dans elle-même, et, au prix de l'introduction de l'énorme espace vectoriel des opérateurs linéaires sur cette algèbre, auquel appartiennent aussi L

4. Il ne s'agit pas d'un vrai flot qui en outre dépendrait de ω ; la propriété de flot stochastique est un peu plus complexe et exige de faire intervenir l'opération de décalage sur Ω qui transforme le brownien $[W(s)]_{s \geq 0}$ en le nouveau brownien $[W(t+s) - W(t)]_{s \geq 0}$.

et les A_α , on a ainsi complètement linéarisé le problème, l'équation différentielle devenant

$$\Psi(t) = \text{Id} + \sum_{\alpha} \int_0^t A_{\alpha} \Psi(s) dW_{\alpha}(s) + \int_0^t L\Psi(s) ds .$$

Bien entendu, au moment de vérifier que la solution reste un homomorphisme d'algèbre, c'est encore la formule du changement de variables qui sera mise à contribution.

Le calcul stochastique non commutatif, utilisé en théorie des probabilités quantiques, généralise ce type de formulation à d'autres algèbres.

h) Un peu de géométrie différentielle d'ordre 2.

Il est possible de décrire de façon intrinsèque les semimartingales et les équations différentielles stochastiques dans une variété, sans privilégier le choix d'une carte.

Soit X une semimartingale à valeurs dans une variété V , que je supposerai munie de coordonnées globales $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ (ce n'est bien sûr pas nécessaire, c'est juste pour vous épargner les localisations). En notant $X^i = x^i \circ X$ les coordonnées de X dans cette carte, et en abrégant les formules grâce à la convention de sommation sur les indices figurant une fois en l'air et une fois en bas, la formule du changement de variable s'écrit formellement, pour $f \in C^\infty(V)$,

$$d(f \circ X) = D_i f \circ X dX^i + \frac{1}{2} D_{ij} f \circ X d\langle X^i, X^j \rangle .$$

Puisque le premier membre est intrinsèque, le second doit l'être aussi, et l'objet (purement formel, car nous n'avons donné au symbole dY aucun sens rigoureux) $DX = dX^i D_i + \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j \rangle D_{ij}$ doit donc se comporter lors d'un changement de carte comme un opérateur différentiel d'ordre 2 au point $X(t, \omega)$; autrement dit, ses $n + n^2$ coefficients dX^i et $\frac{1}{2} d\langle X^i, X^j \rangle$ obéissent à la même formule de changement de carte que ceux d'un opérateur différentiel d'ordre 2 (ce que vous pouvez, bien entendu, vérifier directement). Appelons donc *vecteur tangent d'ordre 2* à V au point x tout opérateur différentiel d'ordre au plus deux, sans terme constant, en ce point, et *espace tangent d'ordre 2* à V au point x l'espace vectoriel $\tau_x V$ formé de ces objets. Intuitivement, ces vecteurs, ou plutôt ceux d'entre eux qui sont de type positif, doivent être interprétés comme décrivant le comportement infinitésimal des semimartingales, exactement comme les vecteurs tangents usuels, d'ordre 1, sont les vitesses des mouvements ordinaires.

Les éléments de l'espace vectoriel $\tau_x^* V$ dual de $\tau_x V$ sont appelés covecteurs d'ordre 2, et, tout naturellement, comme en géométrie ordinaire, les champs de covecteurs d'ordre 2 sont appelés *formes d'ordre 2*. Par exemple, si f est une fonction C^∞ sur V , on définit une forme d'ordre 2 $d^2 f$ comme étant l'évaluation sur la fonction f , c'est-à-dire, en chaque point x , la forme linéaire $L \mapsto Lf$ sur $\tau_x V$; une autre forme d'ordre 2, construite à partir de deux fonctions f et g et notée $df \cdot dg$, est l'application $L \mapsto \frac{1}{2} \Gamma(f, g)$, où Γ est le carré du champ associé à L ; elle vaut simplement $df \cdot dg = \frac{1}{2} [d^2(fg) - f d^2 g - g d^2 f]$.

Dans les coordonnées (globales) (x^i) , toute forme Θ d'ordre 2 s'écrit de façon unique comme la somme

$$\Theta = \theta_i d^2x^i + \theta_{ij} dx^i \cdot dx^j ,$$

où les coefficients θ_i et θ_{ij} sont des fonctions C^∞ sur V et où les θ_{ij} sont symétriques en i et j : $\theta_{ij} = \theta_{ji}$; l'accouplement entre formes et vecteurs est donné par $(\Theta, L) = \theta_i \lambda^i + \theta_{ij} \lambda^{ij}$ si $L = \lambda^i D_i + \lambda^{ij} D_{ij}$.

De même que les formes usuelles, d'ordre 1 et de degré 1, s'intègrent le long des courbes ordinaires, les formes d'ordre 2 s'intègrent le long de toute semimartingale : étant donnée une semimartingale X à valeurs dans V , *il existe une unique application linéaire de toutes les formes d'ordre 2 dans les semimartingales réelles, notée $\Theta \mapsto \int (\Theta, \mathcal{D}X)$, telle que l'on ait, pour toute fonction $f \in C^\infty(V)$,*

$$\int (d^2f, \mathcal{D}X) = f \circ X - f \circ X(0) ; \quad \int (f\Theta, \mathcal{D}X) = \int f \circ X d[f(\Theta, \mathcal{D}X)] .$$

En outre, si f et g sont deux fonctions sur V , $\langle f \circ X, g \circ X \rangle = 2 \int (df \cdot dg, \mathcal{D}X)$.

Si l'on utilise les coordonnées (x^i) pour écrire $\Theta = \theta_i d^2x^i + \theta_{ij} dx^i \cdot dx^j$, l'intégrale de Θ le long de X est simplement

$$\int (\Theta, \mathcal{D}X) = \int \theta_i \circ X dX^i + \frac{1}{2} \int \theta_{ij} \circ X d\langle X^i, X^j \rangle ,$$

le point important étant que cette intégrale est parfaitement intrinsèque, le calcul dans d'autres coordonnées fournissant le même résultat.

Les vecteurs tangents usuels (d'ordre 1) sont des cas particuliers de ceux d'ordre 2; mais les formes d'ordre 1 ne sont pas des formes d'ordre 2, et on ne peut pas intégrer directement les formes d'ordre 1 le long d'une semimartingale à valeurs dans V (sauf si cette semimartingale est à variation finie). Pour y parvenir, il faut d'abord transformer la forme α que l'on désire intégrer en une forme d'ordre 2, et ceci peut être réalisé de deux manières.

La première méthode consiste à étendre l'opération $(df, dg) \mapsto df \cdot dg$ sur les différentielles de fonctions en une application C^∞ -bilinéaire sur toutes les formes d'ordre 1, à valeurs dans les formes d'ordre 2 (en coordonnées, si $\alpha = a_i dx^i$ et $\beta = b_j dx^j$ sont des formes d'ordre 1, il suffit de poser $\alpha \cdot \beta = a_i b_j dx^i \cdot dx^j$), et à vérifier qu'*il existe une unique application linéaire*⁵ $\alpha \mapsto d\alpha$ des formes d'ordre 1 dans les formes d'ordre 2 vérifiant pour toutes f et α

$$d(df) = d^2f ; \quad d(f\alpha) = df \cdot \alpha + f d\alpha .$$

5. Rien à voir avec la différentielle extérieure, qui est antisymétrique; celle-ci est au contraire une différentielle symétrique, et transforme α en un objet qui n'est pas un tenseur (les formules de changement de cartes pour les formes d'ordre 2 faisant bien sûr intervenir les dérivées des nouvelles coordonnées en fonction des anciennes jusqu'à l'ordre 2).

Au lieu d'intégrer α contre X , on peut alors intégrer $d\alpha$, et on obtient l'intégrale de Stratonovitch de α le long de X , qui, calculée à l'aide d'une carte, s'écrit $\int a_i \circ X \delta X^i$. Remarquez que l'on pouvait savoir a priori que ceci serait intrinsèque, puisque le calcul de Stratonovitch obéit aux formules usuelles de changement de variables. Cette intégrale $\int (d\alpha, \mathcal{D}X)$ est celle que l'on obtient lorsque l'on régularise X en une courbe ordinaire par convolution ou par interpolation sur de petits intervalles, que l'on intègre la forme du premier ordre α le long de cette courbe, et que l'on passe enfin à la limite.

La seconde méthode utilise une connexion : Si l'on dispose sur V d'une connexion sans torsion ∇ , les formules $\mathbb{F}(A) = A$ et $\mathbb{F}(AB) = \nabla_A B$, où A et B sont des champs de vecteurs usuels, s'étendent en une application \mathbb{F} des champs de vecteurs d'ordre 2 en champs de vecteurs d'ordre 1 qui est C^∞ -linéaire. Dualement, son adjoint \mathbb{F}^* transforme C^∞ -linéairement les formes d'ordre 1 en formes d'ordre 2; et on vérifie facilement que se donner \mathbb{F} (ou \mathbb{F}^*) équivaut à se donner la connexion sans torsion. Si Γ_{jk}^i sont les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte (x^i) , on a simplement $\mathbb{F}^*(a_i dx^i) = a_i (d^2 x^i + \Gamma_{jk}^i dx^j \cdot dx^k)$. On peut intégrer la forme du second ordre $\mathbb{F}^* \alpha$ contre une semimartingale dans V ; le résultat $\int (\mathbb{F}^* \alpha, \mathcal{D}X)$ est appelé intégrale d'Itô de α le long de X , parce que, si V est \mathbb{R}^d muni de la connexion triviale, il s'écrit $\int a_i \circ X dX^i$ lorsque l'on utilise les coordonnées canoniques. Ces intégrales d'Itô peuvent servir à définir les martingales locales à valeurs dans une variété V munie d'une connexion sans torsion : Une semimartingale X est une martingale locale si, pour toute forme α d'ordre 1 sur V , l'intégrale $\int (\mathbb{F}^* \alpha, \mathcal{D}X)$ est une martingale locale réelle. On démontre alors qu'une application d'une variété riemannienne dans une variété munie d'une connexion est harmonique si et seulement si elle transforme les mouvements browniens en martingales locales; et ceci est utilisé pour la construction et l'étude de ces applications harmoniques.

II. — LE CALCUL DIFFÉRENTIEL STOCHASTIQUE.

Alors qu'une bonne partie de la théorie ordinaire de l'intégration peut être développée dans le cadre très général des espaces mesurés, en revanche, le calcul différentiel, qu'on le mette en œuvre sur \mathbb{R}^d ou sur des variétés, éventuellement banachiques, nécessite une structure beaucoup plus riche. Il en va de même du calcul différentiel stochastique, qui ne se pratique à l'heure actuelle que sur l'espace de Wiener et quelques unes de ses généralisations.

Pour plus de commodité, l'axe des temps sera maintenant le compact $[0, 1]$; l'entier $n \geq 1$ est fixé. Ce que l'on appelle espace de Wiener est simplement l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1})$, où Ω est l'espace vectoriel de toutes les courbes continues $\omega : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$ qui vérifient $\omega(0) = 0$, où la probabilité \mathbb{P} est la loi du mouvement brownien dans \mathbb{R}^n issu de l'origine, où \mathcal{F}_t est la tribu des événements auxquels on peut attribuer la probabilité 0 ou 1 en observant seulement la restriction à $[0, t]$ des trajectoires ω , et où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$. Sur cet espace filtré, le

processus vectoriel W défini sur $[0, 1] \times \Omega$ par $W(t, \omega) = \omega(t)$ est un mouvement brownien : nous venons vraiment de faire tout ce qu'il faut pour ça!

Il est important de bien réaliser ce que ce choix de Ω comporte d'arbitraire. Nous nous sommes restreints à l'espace des fonctions continues parce que nous savons que les trajectoires browniennes en font partie; mais elles possèdent une foule d'autres propriétés, certaines encore bien plus remarquables, d'autres parfaitement insignifiantes, et chacune aurait pu être utilisée pour définir Ω . Il serait d'ailleurs possible, en reprenant la méthode de Martin-Löf telle que Claude Dellacherie nous l'a exposée dans *la Gazette* d'Octobre 1978, de construire un ensemble minimal où sont satisfaites toutes les propriétés p. s. du mouvement brownien qui s'expriment à l'aide d'un nombre fini de mots. Mais cela n'aurait aucun intérêt pratique, puisqu'il resterait de toutes façons des ensembles négligeables non vides. En fin de compte, Ω constitue un cadre d'étude extrêmement commode (de même que le compact $[0, 1]$ fournit l'ensemble idéal pour choisir un nombre au hasard entre 0 et 1!), et, même si l'on sait bien que le mouvement brownien vit en réalité dans un ensemble beaucoup plus petit, il est pratique de plonger cet ensemble dans Ω , comme on plonge une variété dans un espace vectoriel.

Pour étudier la structure différentielle sur Ω , cherchons à dériver une fonction réelle f sur Ω . Concrètement, f est une variable aléatoire, c'est-à-dire une fonction de ω définie presque partout. Pour essayer de différentier f au point ω dans la direction d'un vecteur $h \in \Omega$, il va falloir donner un sens à l'accroissement $f(\omega + \varepsilon h) - f(\omega)$, et il faudra donc que $f(\omega + \varepsilon h)$ soit lui aussi défini pour presque tout ω . Or on sait caractériser les courbes $h \in \Omega$ telles que la translation $\omega \mapsto \omega + h$ préserve la classe des événements négligeables : ce sont celles de la forme $h(t) = \int_0^t h'(s) ds$, où h' est dans $L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$; elles peuvent donc être considérées comme des vecteurs tangents à l'espace de Wiener en chaque point, et ceci fournit une notion de différentiabilité. Une v. a. $f \in L^2(\Omega)$ est différentiable s'il existe un processus Df dans $L^2([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que pour tout h' dans $L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$, $[f(\omega + \varepsilon h) - f(\omega)]/\varepsilon$ tende dans $L^2(\Omega)$, quand ε tend vers zéro, vers $\int_0^1 Df(s) \cdot h'(s) ds$. En fait, cet opérateur D est fermable, ce qui permet de donner le même nom à sa fermeture et d'étendre à toutes les v. a. de son domaine le qualificatif de différentiables. Cette définition se généralise immédiatement au cas de v. a. à valeurs dans un espace de Hilbert, d'où les dérivations d'ordre supérieur D^k , les fonctions k fois différentiables, indéfiniment différentiables.

Avant de vous dire à quoi tout cela sert, deux remarques, très voisines, sur les liens entre ces différentielles et les intégrales que nous avons vues précédemment.

D'une part, on peut retrouver f par intégration à partir de sa différentielle : Si l'on pose $\Phi(t) = \mathbb{E}[Df(t) | \mathcal{F}_t]$, l'application $f \mapsto \Phi$ se prolonge en une isométrie entre l'hyperplan de $L^2(\Omega)$ formé des v. a. d'espérance nulle et le sous-espace de $L^2([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ formé des processus adaptés; et pour toute f de $L^2(\Omega)$ on peut écrire $f = \mathbb{E}[f] + \int_0^1 \Phi(s) \cdot dW(s)$, où l'intégrale est celle que nous connaissons si Φ est continue.

D'autre part, différentielles et intégrales sont liées par une formule d'intégration par parties, qui n'a rien à voir avec celle où intervenait la covariation : l'intégration dont il s'agit est maintenant en (ω, t) , et non plus seulement en t . Si l'on a une v. a. différentiable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et un processus $G : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de carré intégrable pour la mesure produit $dt \times P(d\omega)$ et à trajectoires continues, alors

$$\mathbb{E} \left[f \int_0^1 G(s) \cdot dW(s) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^1 G(s) \cdot Df(s) ds \right].$$

Ces différentielles sont utilisées pour établir la régularité de la loi d'une variable aléatoire. Voici ce que devient la coaire en dimension infinie.

THÉORÈME. — Soit $f = (f_1, \dots, f_d)$ une v. a. vectorielle différentiable sur l'espace de Wiener. Définissons une v. a. matricielle $d \times d$, symétrique et de type positif par $M_{ij} = \int_0^1 Df_i(s) \cdot Df_j(s) ds$.

a) Si la matrice M est p. s. définie positive, la loi du vecteur aléatoire f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

b) Si de plus f est indéfiniment différentiable, et si f , toutes ses dérivées $D^k f$ et l'inverse du déterminant de M sont de $p^{\text{ième}}$ puissance intégrable pour tout exposant fini p , la loi de f a une densité de classe C^∞ .

Une application spectaculaire du b) (historiquement, c'est en vue de celle-ci qu'il a été établi) est la preuve probabiliste du théorème de Hörmander. Soient sur \mathbb{R}^d des champs de vecteurs A_0, A_1, \dots, A_n de classe C^∞ , vérifiant en un point ξ de \mathbb{R}^d le critère d'hypoellipticité de Hörmander: les vecteurs A_1, \dots, A_n , et les crochets de Lie itérés $[A_i, A_j]$, $[A_i, [A_j, A_k]]$, etc. formés à l'aide de deux au moins des vecteurs A_0, A_1, \dots, A_n , engendrent, à eux tous, l'espace tangent $T_\xi \mathbb{R}^d$ tout entier. Si l'on appelle L l'opérateur du second ordre $A_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha$, le théorème de Hörmander dit que la solution de l'équation parabolique $(\partial/\partial t - L^*)p(t, x) = 0$ avec condition initiale $p(0, x) = \delta_\xi(x)$ existe et est C^∞ .

La stratégie pour déduire ce résultat du précédent est claire : Construire la diffusion X de générateur L issue de ξ à l'aide de l'équation différentielle stochastique vue plus haut, en utilisant comme ingrédients l'espace de Wiener et son mouvement brownien canonique; ainsi, la v. a. $X(t)$ est définie sur l'espace de Wiener, et est justiciable du théorème précédent. Mais ne croyez pas qu'en vérifier les hypothèses soit chose facile! Minorer le déterminant nécessite une étude très fine de l'équation différentielle stochastique, au cours de laquelle on a le plaisir de voir apparaître, de façon parfaitement naturelle, le critère d'hypoellipticité comme condition suffisante permettant de mener à terme le programme.

EN GUISE DE CONCLUSION

Je ne voudrais surtout pas vous laisser croire que ce parcours effectué ensemble nous a montré un peu tous les recoins du calcul stochastique, comme ces

itinéraires de visite de certains zoos, que l'on croirait dessinés par quelque Peano. Il reflète au contraire fortement mon idiosyncrasie, et, menée par un autre, la promenade eût été fort différente⁶ : il n'est guère aujourd'hui de domaine de la théorie des probabilités (pour ne rien dire de la théorie des champs ni des mathématiques financières) qui n'utilise au moins de temps à autre une intégrale stochastique; quant aux théories du contrôle et du filtrage, elles sont non seulement des champs d'application privilégiés du calcul stochastique, mais aussi d'importantes sources d'inspiration, de problèmes... et de matière grise!

BRÈVES INDICATIONS HISTORIQUES⁷

Si la préhistoire remonte à 1923 (intégrales de Wiener $\int f(t) dB(t)$, avec f non aléatoire), c'est à partir de 1944 que Itô jette les bases de la théorie, et s'en sert pour décrire les diffusions browniennes; il donne en 1951 la première version de la formule du changement de variable. Malgré quelques généralisations (mesures aléatoires : Itô, 1951; martingales : Doob, 1953, Courrège, 1962; intégrales de Stratonovitch : Fisk, 1966, Stratonovitch, 1966), l'intégration stochastique n'est pas encore une théorie autonome, et reste très dépendante de la théorie des processus de Markov, cependant que l'étude des équations différentielles stochastiques browniennes se raffine de plus en plus, principalement en U.R.S.S. et au Japon. Il faut attendre la fin des années 60 et surtout la décennie 70 pour que les progrès en théorie générale des processus permettent l'exploration systématique des intégrales stochastiques, à laquelle contribuent des Japonais (Ikeda, Motoo, Watanabe), des Américains (Bichteler, Millar, Protter), des Soviétiques (Skorokhod), et surtout des Français : Meyer et l'école strasbourgeoise, l'école rennaise (au sein de laquelle Métivier et Pellaumail développent le point de vue des mesures vectorielles), Lenglart, Lépingle, Yor.

L'étude de la géométrie d'ordre 2 en liaison avec le calcul stochastique est due à Schwartz et Meyer.

Les outils du calcul différentiel stochastique ont été introduits par Malliavin dans les années 70 (avec des précurseurs dès les années 60 : Blagovetchenskii et

6. Voici les thèmes que je me suis résigné à passer sous silence, après avoir envisagé d'en dire un mot : changement de probabilité et martingales exponentielles, changement de temps, espaces de Sobolev et distributions sur l'espace de Wiener, estimation en temps petit du noyau de la chaleur, grossissement de filtration, inégalités de martingales, intégrales de Feynman, intégrales stochastiques anticipantes, intégrales stochastiques en dimension infinie, martingales conformes, mécanique stochastique, mesures aléatoires, petites perturbations de systèmes dynamiques, ponts et conditionnement, problèmes de martingales, processus à plusieurs paramètres, processus de Bessel, processus de Poisson, quasimartingales, représentations prévisibles et chaotiques, semimartingales dans un ouvert aléatoire, surmartingales, solutions faibles d'équations différentielles stochastiques, temps d'arrêt et leur classification, temps locaux, tribu prévisible et projection duale.

7. Ces indications historiques sont inévitablement vouées à l'incomplétude, mais, même en s'en tenant au matériau traité dans l'aperçu, certaines omissions sont tout à fait scandaleuses : Jacod, Stroock et Varadhan, Dynkin et son école... (M. É., Mars 2000)

Freidlin avaient établi la régularité de la solution d'une équation différentielle stochastique par rapport aux conditions initiales, on devait à Krée et ses élèves la théorie des distributions en dimension infinie); sa redémonstration du théorème de Hörmander a donné lieu depuis à de nombreuses généralisations, et le calcul différentiel stochastique est depuis le début des années 80 un domaine très florissant.

SUGGESTIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Pour le non-probabiliste, une bonne introduction au calcul intégral stochastique brownien est

H. P. McKean, Jr. *Stochastic Integrals*. Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, 1969.

Pour un survol de la construction des intégrales stochastiques, voyez

L. C. G. Rogers. *Stochastic Integrals : Basic Theory*. *Stochastic Integrals, Proceedings of the LMS Durham Symposium 1980*, Springer Lecture Notes 851, 1981,

M. Yor. *Introduction au calcul stochastique*. Séminaire Bourbaki, 34^e année, 1981/1982, exposé 590

qui traitent du cas continu, et, pour le cas discontinu,

C. Dellacherie. *Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique*. *Measure Theory, Proceedings of the conference held at Oberwolfach in July 1979*, Springer Lecture Notes 794, 1980,

R. J. Elliott. *Stochastic Integration and Discontinuous Martingales*. *Stochastic Integrals, Proceedings of the LMS Durham Symposium 1980*, Springer Lecture Notes 851, 1981,

P. Protter. *Stochastic Integration without Tears*. *Stochastics* 16, 295–325, 1986.

Les traités sur la question ne manquent pas; signalons

R. Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. The Wadsworth Mathematics Series, Wadsworth 1984,

destiné à un très large public et présentant de nombreuses applications à l'analyse complexe et à la théorie du potentiel,

N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland Mathematical Library, North-Holland 1981

(ce traité prend les probabilités à leur début et donne des démonstrations complètes),

M. Métivier and J. Pellaumail. *Stochastic Integration*. Academic Press 1980,

qui développe l'intégration stochastique du point de vue des mesures vectorielles,

P. A. Meyer. *Un cours sur les intégrales stochastiques*. Séminaire de Probabilités X, 245–400, Springer Lecture Notes 511, 1976,

qui a profondément influencé une génération,

P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 1990,

destiné aux probabilistes peu familiers avec la théorie générale des processus,

L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Volume 2: Itô Calculus. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley 1987,

au style très agréable (se lit très bien indépendamment du volume 1), et

D. Revuz and M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, 1990, pas encore paru quand j'écris ces lignes, mais dont, par préjugé, je suis certain qu'il est excellent.

Pour aborder le calcul différentiel stochastique, deux bons articles introductifs :

D. Williams. To begin at the beginning: ... Stochastic Integrals, Proceedings of the LMS Durham Symposium 1980, Springer Lecture Notes 851, 1981,

D. L. Ocone. A Guide to the Stochastic Calculus of Variations. Stochastic Analysis and Related Topics, Proceedings of a Workshop held at Silivri in July 1986, Springer Lecture Notes 1316, 1988

et un livre plus complet

D. R. Bell. The Malliavin Calculus. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 34, Longman Scientific & Technical, 1987.