Université Pierre et Marie Curie 2007-2008

## Master de Mathématiques

## Spécialité: Probabilités et Applications

# Mouvement brownien et calcul stochastique

**Jean Jacod**

# Chapitre 1

# Le mouvement brownien

## 1.1 Processus stochastiques

Un *processus stochastique* est une famille de variables aléatoires indicée par un ensemble $\mathbb{T}$ en général infini, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, et toutes définies sur le même espace de probabilité. A l'exception de ce paragraphe, l'ensemble $\mathbb{T}$ dans ce cours sera toujours $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou un intervalle de la forme $\mathbb{T} = [0, T]$, et un élément $t$ de $\mathbb{T}$ sera appelé un "temps".

De manière plus précise, on a un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une famille d'applications mesurables $X_t$ pour chaque $t \in \mathbb{T}$, de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$. On appelle *trajectoire* (ou $\omega$-trajectoire) de $X$ l'application $t \mapsto X_t(\omega)$, pour chaque $\omega$ fixé.

Ainsi, on peut aussi considérer $X$, c'est-à-dire la famille $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, comme une seule application sur $\Omega$, à valeurs dans l'espace de toutes les trajectoires possibles, qui est a priori l'ensemble $E^{\mathbb{T}}$ de toutes les fonctions de $\mathbb{T}$ dans $E$. Pour que $X$ puisse être considérée comme une "variable aléatoire" il faut qu'elle soit mesurable, et donc il faut commencer par définir une tribu sur l'espace $E^{\mathbb{T}}$.

On prend en général comme tribu sur $E^{\mathbb{T}}$ la *tribu de Kolmogorov*, définie comme étant la plus petite tribu rendant mesurables les applications $x \mapsto x(t)$ pour tout $t$, étant entendu que $E$ est muni de la tribu $\mathcal{E}$ (rappelons qu'un élément $x \in E^{\mathbb{T}}$ est en fait une fonction de $\mathbb{T}$ dans $E$). On note $\mathcal{G}$ cette tribu, et plus généralement pour toute partie $I \subset \mathbb{T}$ on note $\mathcal{G}(I)$ la tribu engendrée par les applications $x \mapsto x(t)$ pour tout $t \in I$. On a alors les propriétés suivantes (rappelons que pour toute famille $\mathcal{G}_\alpha$ de tribus indicée par $\alpha \in A$ la notation $\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$ désigne la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{G}_\alpha$, c'est donc le "sup" des $\mathcal{G}_\alpha$ au sens usuel, pour la relation d'ordre "inclusion"):

**Proposition 1.1.1.** *On a*

$$\mathcal{G} = \bigvee_{I \subset \mathbb{T}} \mathcal{G}(I) = \bigvee_{I \subset \mathbb{T}, I \text{ fini ou dénombrable}} \mathcal{G}(I) = \bigvee_{I \subset \mathbb{T}, I \text{ fini}} \mathcal{G}(I) = \bigvee_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{G}(\{t\}) \qquad (1.1.1)$$

*De plus la réunion $\mathcal{G}^0 = \cup_{I \subset \mathbb{T}, I \text{ fini}} \mathcal{G}(I)$ est une algèbre (mais pas une tribu en général).*

**Preuve.** Comme $\mathcal{G}(I) \subset \mathcal{G}(J)$ de manière évidente quand $I \subset J$, et comme $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{T})$

par définition, les tribus de (1.1.1) sont décroissantes, et les deux membres extrêmes sont égaux, d'où le premier résultat. La classe $\mathcal{G}^0$ contient évidemment $\emptyset$. Si $A, B \in \mathcal{G}^0$ on a $A \in \mathcal{G}(I)$ et $B \in \mathcal{G}(J)$ pour deux parties finies $I$ et $J$. Donc d'une part $A^c$ (le complémentaire de $A$) est dans $\mathcal{G}(I)$ donc dans $\mathcal{G}^0$, d'autre part on a $A, B \in \mathcal{G}(I \cup J)$, donc $A \cup B \in \mathcal{G}(I \cup J)$ et comme $I \cup J$ est encore une partie finie de $\mathbb{T}$ on a $A \cup B \in \mathcal{G}^0$. Cela démontre le second résultat (le même raisonnement ne marche pas pour une réunion dénombrable, et on peut montrer que $\mathcal{G}^0$ n'est pas une tribu, sauf dans le cas trivial où l'espace $E$ est réduit à un seul point). $\square$

**Remarque 1.1.2.** Lorsque $\mathbb{T}$ est un ensemble fini la tribu $\mathcal{G}$ est aussi la puissance tensorielle $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$, définie par exemple dans le théorème de Fubini. Dans le cas général on note donc parfois $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$ la tribu $\mathcal{G}$. Remarquer dans le même ordre d'idées que la tribu $\mathcal{G}(I)$ ci-dessus est "isomorphe" à $\mathcal{E}^{\otimes I}$ au sens où une partie $A \subset E^{\mathbb{T}}$ est dans $\mathcal{G}(I)$ si et seulement si elle s'écrit $A = \{x : (x(t))_{t \in I} \in B\}$ pour un $B \in \mathcal{E}^{\otimes I}$. $\square$

Revenons aux processus. Par définition de la tribu de Kolmogorov $\mathcal{G}$, l'application $X : \Omega \to E^{\mathbb{T}}$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{F}$ sur $\Omega$ et $\mathcal{G}$ sur $E^{\mathbb{T}}$, c'est donc une variable aléatoire à valeurs dans $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{G})$. Ainsi on a la notion usuelle de loi:

**Définition 1.1.3.** *La loi du processus* $X$ est la probabilité sur $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{G})$ qui est l'image par $X$ de la probabilité $\mathbb{P}$. $\square$

A l'inverse, toute probabilité $\mu$ sur $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{G})$ est la loi d'un processus, exactement comme toute probabilité sur $\mathbb{R}$ est la loi d'une variable aléatoire réelle: il suffit de prendre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (E^{\mathbb{T}}, \mathcal{G}, \mu)$ et le *processus canonique* défini par $X_t(x) = x(t)$. Comme pour les variables réelles, il ne peut y avoir unicité ici: il y a beaucoup de processus différents avec la même loi $\mu$.

On a aussi une autre notion de loi, qui est fondamentale:

**Définition 1.1.4.** *La famille des lois fini-dimensionnelles du processus* $X$ est la famille $(\mu_I : \; I$ partie finie de $\mathbb{T})$ des lois des variables aléatoires $(X_t)_{t \in I}$, pour l'ensemble des parties *finies* $I$ de $\mathbb{T}$ (chaque $\mu_I$ est donc une probabilité sur $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$). $\square$

Chaque probabilité $\mu_I$ ne dépend que de la loi $\mu$, et est en fait l'image de $\mu$ sur $\mathbb{E}^I$ par l'application (mesurable, et même $\mathcal{G}(I)$-mesurable) $x \mapsto (x(t) : t \in I)$. Le résultat suivant montre que, réciproquement, la loi $\mu$ est entièrement caractérisée par les lois fini-dimensionnelles $(\mu_I)$:

**Proposition 1.1.5.** *a) Les lois fini-dimensionnelles d'un processus vérifient la condition de compatibilité suivante: si $I$ est une partie finie de $\mathbb{T}$ et si $t \in \mathbb{T} \backslash I$, alors*

$$\mu_{I \cup \{t\}}(A \times E) = \mu_I(A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}^{\otimes I}. \tag{1.1.2}$$

*b) Deux probabilités différentes sur $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{G})$ ne peuvent être associées à la même famille de lois fini-dimensionnelles.*

**Preuve.** Si $A \in \mathcal{E}^{\otimes I}$ on a $\mu_{I\cup\{t\}}(A \times E) = \mathbb{P}((X_s)_{s\in I\cup\{t\}} \in A \times E)$, qui est évidemment égale à $\mathbb{P}((X_s)_{s\in I} \in A) = \mu_I(A)$. On a donc (a).

Soit $\mu$ et $\mu'$ deux probabilités sur $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{G})$ ayant mêmes lois fini-dimensionnelles $(\mu_I)$. Si $I$ est une partie finie de $\mathbb{T}$, à tout $A \in \mathcal{G}(I)$ on associe un $B \in \mathcal{E}^{\otimes I}$ comme dans la remarque 1.1.2; comme $\mu_I$ est l'image de $\mu$ par l'application $x \mapsto (x(t) : t \in I)$ on a évidemment $\mu(A) = \mu_I(B)$, et de même pour $\mu'$. Ainsi, les deux probabilités $\mu$ et $\mu'$ coïncident sur l'algèbre $\mathcal{G}^0$, qui d'après la proposition 1.1.1 engendre la tribu $\mathcal{G}$. D'après un résultat classique de théorie de la mesure, cela implique $\mu = \mu'$. □

Les lois fini-dimensionnelles d'un processus $X$ constituent un objet simple, ou du moins standard, en tous cas lorsque l'espace $E$ égale $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, ce qui sera le cas dans ce cours: c'est en effet simplement une famille (compatible au sens ci-dessus) de probabilités sur $(\mathbb{R}^d)^I \equiv \mathbb{R}^{dq}$ pour toute partie finie $I$ de cardinal $q$. En revanche la loi $\mu$ de $X$ est un objet beaucoup plus complexe, dans la mesure où l'espace $E^{\mathbb{T}}$ est trop "gros" et, même quand $E = \mathbb{R}$, n'a pas de bonnes propriétés topologiques dès que $\mathbb{T}$ est infini non dénombrable.

Ainsi, la question même de l'existence des processus n'est pas un problème trivial. Dans certains cas le processus peut être "construit" à partir de ses trajectoires, par exemple pour un processus de Poisson qui est entièrement défini pas ses temps de saut, et donc on se ramène à une description "dénombrable" du processus (en l'occurence la loi des intervalles entre les sauts); on verra dans la suite d'autres manières de construire un processus à partir d'un autre, déjà connu. Mais dans d'autres cas, et notamment pour le mouvement brownien, l'objet de départ naturel est la loi fini-dimensionnelle.

**Théorème 1.1.6. (Kolmogorov)** *Suppons que $E$ soit un espace polonais* (= métrisable, complet, admettant une suite dense; par exemple $\mathbb{R}^d$, ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour la topologie produit), *muni de la tribu borélienne $\mathcal{E}$. Toute famille $\mu_I$ de probabilités sur $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$ indicée par les parties finies $I$ de $\mathbb{T}$ et qui est compatible au sens de (1.1.2) est la famille des lois fini-dimensionnelles d'une (unique) probabilité $\mu$ sur $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{G})$.*

Ce théorème est admis (voir par exemple J. Neveu: "Bases mathématiques du calcul des probabilités"). La condition "$E$ est polonais" peut être affaiblie, mais le résultat est faux si $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable quelconque.

**Exemple 1.1.7.** Soit une probabilité $\nu$ sur $(E, \mathcal{E})$, et soit $\mu_I = \nu^{\otimes I}$ pour toute partie finie $I \subset \mathbb{T}$. Cette famille est clairement compatible. Si $E$ est polonais il existe donc une probabilité $\mu$ et une seule de lois fini-dimensionnelles $(\mu_I)$. Les processus associés $X$ sont évidemment tels que les variables $X_t$ pour $t \in \mathbb{T}$ sont indépendantes de même loi $\nu$. On a donc construit (modulo le théorème non démontré ci-dessus) une famille $(X_t)$ de variables i.i.d.

Lorsque $\mathbb{T}$ est dénombrable, on peut montrer (par une méthode différente) l'existence de $(X_t)$ i.i.d. sans condition sur l'espace $(E, \mathcal{E})$. En revanche si $\mathbb{T}$ est infini non dénombrable, il n'existe pas en général de familles $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de variables i.i.d. lorsque l'espace $(E, \mathcal{E})$ est arbitraire. □

Dans la suite on suppose que $E = \mathbb{R}^d$ et que $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Soit $X$ un processus de loi $\mu$. On dit que ce processus est *continu* si toutes (ou, parfois, presque toutes) ses trajectoires

$t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues. Dans ce cas la "variable aléatoire" $X = (X_t : t \in \mathbb{T})$ prend ses valeurs dans le sous-espace $\mathbb{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ de $E^{\mathbb{T}}$ constitué des fonctions continues.

Il est naturel de se poser la question suivante: peut-on trouver une condition sur la loi $\mu$ impliquant que $X$ est continu, ou au moins presque sûrement continu ? La réponse est NON, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 1.1.8.** Soit $X$ un processus continu réel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit aussi $S$ une variable définie sur le même espace et uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Posons

$$X'_t \;=\; X_t + 1_{\{S\}}(t).$$

Cette formule définit un nouveau processus réel $X'$, dont *aucune* trajectoire n'est continue. Cependant pour tout $t$ fixé, comme $\mathbb{P}(S = t) = 0$ on a évidemment $X_t = X'_t$ p.s. Il en découle que les lois fini-dimensionnelles, donc aussi la loi, des deux processus $X$ et $X'$ sont identiques. □

Cet exemple a plusieurs conséquences, qui rendent l'étude des processus un peu difficile:

**1)** La partie $\mathbb{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ de $E^{\mathbb{T}}$ *n'est pas dans la tribu* $\mathcal{G}$ *(sinon on aurait ci-dessus* $\mu(\mathbb{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d))$ $= 1$ *puisque* $\mu$ *est la loi de* $X$*, et aussi* $\mu(\mathbb{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)) = 0$ *puisque c'est la loi de* $X'$*).*

**2)** Plus généralement la tribu $\mathcal{G}$ est "très petite", et en tous cas ne contient aucun des espaces "naturels" de fonctions, comme l'espace des fonctions $k$ fois dérivables, ou celui des fonctions continues à droite, ou des fonctions croissantes si $d = 1$, ou des fonctions continues en un instant donné $s$, ou des fonctions boréliennes, etc...

**3)** Si par exemple on s'intéresse aux processus continus, comme dans le cas du brownien, le meilleur énoncé possible est le suivant: "Etant donnée la loi $\mu$, il existe un processus continu de loi $\mu$".

**4)** En s'inspirant de l'exemple, on dit que deux processus $X$ et $X'$ *définis sur le même espace de probabilité* sont *modifications l'un de l'autre* (ou, $X'$ est une modification de $X$) si, pour tout $t$, on $X_t = X'_t$ p.s. Dans ce cas, $X$ et $X'$ ont même loi.

**5)** Attention à la place du "p.s." ci-dessus. Si les processus $X$ et $X'$ vérifient presque sûrement $X_t = X'_t$ pour tout $t$, on dit qu'ils sont *indistinguables.* C'est une propriété beaucoup plus forte que la précédente.

**6)** Attention encore: Si un processus est continu, on a vu qu'il admet une modification qui est (pour tout $\omega$ si on veut) discontinue. Il ne faudrait pas en conclure que si un processus n'est pas continu, il admet une modification qui l'est ! Par exemple si $X$ est un processus de Poisson, ou plus simplement si $X_t = 1_{[S,\infty)}(t)$ (où $S$ est une variable aléatoire à valeurs dans $(0, \infty)$) les trajectoires de $X$ sont par construction toutes discontinues. Mais on peut aussi montrer que n'importe qulle modification $X$ a également des trajectoires discontinues, au moins presque sûrement.

## 1.2 Le mouvement brownien: première définition

Commençons par un rappel sur les lois normales. Si $m, \sigma \in \mathbb{R}$ on appelle loi normale (ou gaussienne) de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$, et on note $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la loi sur $\mathbb{R}$ définie ainsi:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{la loi de densité} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} & & \text{si} \quad \sigma \neq 0 \\ \text{la masse de Dirac } \varepsilon_m \text{ en } m & & \text{si} \quad \sigma = 0. \end{array}\right\} \tag{1.2.1}$$

$\mathcal{N}(0,1)$ est la loi normale standard. Les propriétés suivantes sont élémentaires:

$$\text{la fonction caractéristique de } \mathcal{N}(m,\sigma^2) \text{ est} \quad u \mapsto e^{ium - u^2\sigma^2/2}. \tag{1.2.2}$$

$$\text{le produit de convolution de } \mathcal{N}(m,\sigma^2) \text{ et } \mathcal{N}(m',\sigma'^2) \text{ est } \mathcal{N}(m+m', \sigma^2+\sigma'^2), \tag{1.2.3}$$

$$\text{si } Y \text{ est de loi } \mathcal{N}(m,\sigma^2), \text{ alors } aY+b \text{ est de loi } \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2), \tag{1.2.4}$$

Si maintenant $X$ est une variable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on dit qu'elle est *gaussienne* (ou que c'est un vecteur gaussien) si toute combinaison linéaire des composantes de $X$ est une variable réelle normale. La loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par sa moyenne $m \in \mathbb{R}^d$ et sa matrice de variance-covariance $\Sigma$ (une matrice $d \times d$, symétrique semi-définie positive): on a $m_j = \mathbb{E}(X_j)$ et $\Sigma_{jk} = \mathbb{E}(X_j X_k) - m_j m_k$. Sa fonction caractéristique prend la forme

$$u \mapsto \exp\left( i \sum_{j=1}^d u_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \Sigma_{jk} u_j u_k \right). \tag{1.2.5}$$

De plus, les composantes de $X$ sont indépendantes si et seulement si la matrice $\Sigma$ est diagonale. On note encore $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ la loi (normale, ou gaussienne) décrite ci-dessus. Rappelons que cette loi admet une densité si et seulement si la matrice $\Sigma$ est inversible.

Enfin, un processus $X = (X_t)$ est dit *gaussien* si ses lois fini-dimensionnelles sont des lois gaussiennes. Dans ce cas on appelle *moyenne* de $X$ la fonction $m_t = \mathbb{E}(X_t)$, et *fonction de covariance* la fonction $K(s,t) = \mathbb{E}(X_s X_t) - m_s m_t$. En vertu de ce qui précède, ces deux fonctions caractérisent complètement la loi de n'importe quelle famille finie $(X_{t_j})$, donc en définitive la loi du processus elle-même.

**Définition 1.2.1.** Un *mouvement brownien au sens large* (en abrégé: MB-L) est un processus réel $X = (X_t)_{t \geq 0}$ indicé par $\mathbb{R}_+$, gaussien, centré (i.e. $E(X_t) = 0$ pour tout $t$), et de covariance $E(X_t X_s) = \min(s,t)$. □

Comme dit auparavant, cette définition caractérise entièrement la loi du MB-L, à supposer toutefois que cette loi existe :

**Proposition 1.2.2.** *Le MB-L existe.*

**Preuve.** Il s'agit de montrer deux choses: d'abord que $\mu_I$ existe, c'est-à-dire que la matrice $\Sigma(I)$ définie ci-dessus, qui est clairement symétrique, est aussi semi-définie positive; puis que les lois fini-dimensionnelles sont compatibles, et cette seconde propriété est complètement évidente.

Pour la première propriété on peut évidemment supposer les $t_j$ ordonnés: $0 \leq t_1 < \cdots < t_q$, de sorte que les $s_j = t_j - t_{j-1}$ (avec la convention $t_0 = 0$) sont positifs. Pour tous réels $x_i$ on a donc par un calcul élémentaire

$$\sum_{j,k=1}^{q} x_j x_k \min(t_j, t_k) = \sum_{j,k=1}^{q} x_j x_k \sum_{l=1}^{\min(j,k)} s_l = \sum_{l=1}^{q} s_l \sum_{j,k=l}^{q} x_j x_k = \sum_{l=1}^{q} s_l \left( \sum_{j=l}^{q} x_j \right)^2 ,$$

qui est positif, et le résultat en découle. □

La définition précédente est une définition possible parmi d'autres. Par exemple on a la caractérisation suivante, qui pourrait bien entendu être prise comme définition:

**Proposition 1.2.3.** *Un processus $X$ est un MB-L si, et seulement si, il vérifie les deux propriétés suivantes:*

*(i) il est* à accroissements indépendants*, i.e. pour tous $s, t \geq 0$ la variable $X_{t+s} - X_t$ est indépendante des variables $(X_r : r \in [0, t])$;*

*(ii) il est gaussien centré, et $\mathbb{E}(X_t^2) = t$.*

*Dans ce cas, les accroissements sont aussi* stationnaires*: $X_{t+s} - X_t$ suit la même loi $\mathcal{N}(0, s)$ que $X_s$.*

**Preuve.** Supposons d'abord que $X$ soit un MB. (ii) est évident. Si $0 = r_0 \leq r_1 < \cdots < r_q = t < r_{q+1} = t + s$ le vecteur aléatoire $(X_{r_0}, \cdots, X_{r_{q+1}})$ est gaussien centré de covariance $\mathbb{E}(X_{r_j} X_{r_k}) = r_j$ si $j \leq k$. Donc le vecteur $(X_{r_0}, \cdots, X_{r_q}, X_{t+s} - X_t)$ est aussi gaussien (comme fonction linéaire du précédent), centré, et $\mathbb{E}(X_{r_j}(X_{t+s} - X_t)) = \mathbb{E}(X_{r_j} X_{t+s}) - \mathbb{E}(X_{r_j} X_t)) = 0$. D'apès les propriétés d'indépendance pour les vecteurs gaussiens, on en déduit que l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendant des $X_{r_j}$ pour $j \leq q$ et comme $q$ et les $r_j$ sont arbitraires on a l'indépendance de $X_{t+s} - X_t$ et des $(X_r : r \in [0, t])$, d'où (i). Finalement $X_{t+s} - X_t$ est gaussien centré, et un autre calcul simple montre que sa variance vaut $s$, ce qui prouve la dernière assertion.

A l'inverse, supposons (i) et (ii). Pour montrer que $X$ est un MB-L, il suffit donc de vérifier que $\mathbb{E}(X_t X_{t+s}) = t$ si $s, t \geq 0$. On a

$$\mathbb{E}(X_t X_{t+s}) = \mathbb{E}(X_t(X_{t+s} - X_t)) + \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(X_t)\ \mathbb{E}(X_{t+s} - X_t) + \mathbb{E}(X_t^2) = t$$

(la second égalité provient de l'indépendance, la troisième de (ii)), d'où le résultat. □

## 1.3 Le mouvement brownien: continuité, seconde définition

La définition 1.2.1 est parfois utilisée, mais la définition la plus usuelle est la suivante:

**Définition 1.3.1.** Un *mouvement brownien* (en abrégé: MB) est un MB-L dont presque toutes les trajectoires sont continues et nulles en 0.

Certains auteurs imposent que *toutes* les trajectoires soient continues nulles en 0. Il n'y a pas de réelle différence entre les deux notions, puisqu'un processus p.s. à trajectoires continues admet une modification dont toutes les trajectoires sont continues. Dans ce chapitre on peut prendre indifféremment l'une ou l'autre des définitions, ultérieurement il sera important d'utiliser la définition 1.3.1. Noter que pour n'importe quelle version $X$ du MB-L on a $X_0 = 0$ p.s., puisque $X_0$ suit la loi $\mathcal{N}(0,0)$.

Là encore on a besoin de prouver que cette définition n'est pas vide, ce qui est une entreprise bien plus difficile que pour le MB-L. Nous commençons par un résultat bien plus général, et intéressant en lui-même.

**Théorème 1.3.2. (Kolmogorov)** *Soit $\mathbb{T}$ une partie de $\mathbb{R}^d$ de la forme $\mathbb{T} = \prod_{i=1}^d I_i$, où les $I_i$ sont des intervalles (fermés, ouverts, semi-ouverts, éventuellement infinis) de $\mathbb{R}$. Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus réel indicé par $\mathbb{T}$, défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons que*

$$s,t \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(|X_t - X_s| > g(\|t-s\|) \ \le\ h(\|t-s\|), \tag{1.3.1}$$

*où $g$ et $h$ sont deux fonctions croissantes positives sur $[0,\infty)$ vérifiant*

$$\int_0^1 \frac{g(r)}{r}\, dr \ <\ \infty, \qquad \int_0^1 \frac{h(r)}{r^{1+d}}\, dr \ <\ \infty. \tag{1.3.2}$$

*Le processus $X$ admet alors une modification dont toutes les trajectoires sont continues.*

Bien entendu ce résultat est également vrai pour un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ pour $q \ge 2$, en remplçant la valeur absolue de $X_t - X_s$ par la norme; il suffit de raisonner "composante par composante".

**Preuve.** Etape 1) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $D_n$ l'ensemble des points "dyadiques" d'ordre $n$ de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont de la forme $k2^{-n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit $D = \cup_n D_n$, et $\mathbb{T}^0 = \prod I_i^0$ l'intérieur de $\mathbb{T}$ ($I_i^0$ est évidemment l'intérieur de $I_i$) . Supposons qu'on ait montré la propriété suivante:

**(A)** Pour tout $K \ge 1$ il existe $N_K \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(N_K) = 0$ tel que, si $\omega \notin N_K$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est uniformément continue en restriction à l'ensemble $\mathbb{T}^0 \cap D \cap [-K,K]^d$.

L'ensemble $N = \cup_{K\in\mathbb{N}} N_K$ est encore mesurable et négligeable, et si $\omega \notin N$ la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est uniformément continue en restriction à $\mathbb{T}^0 \cap D \cap [-K,K]^d$, simultanément pour tout $K$. Cette fonction se prolonge donc en une fonction continue, notée $t \mapsto Y_t(\omega)$, à la fermeture de $\mathbb{T}^0 \cap D$. Comme $D$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ et comme $\mathbb{T}$ est contenue dans la fermeture de $\mathbb{T}^0$, la fermeture de $\mathbb{T}^0 \cap D$ contient $\mathbb{T}$ et $Y_t(\omega)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{T}$. Par suite le processus

$$X'_t(\omega) \ =\ \begin{cases} Y_t(\omega) & \text{si } \ \omega \notin N \\ 0 & \text{si } \ \omega \in N, \end{cases}$$

indicé par $\mathbb{T}$, est à trajectoires continues sur $\mathbb{T}$.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a $X'_t = X_t$ p.s. C'est évident si $t \in \mathbb{T}^0 \cap D$ (puisque $Y$ prolonge la restriction de $X$ à $\mathbb{T}^0 \cap D$ quand on n'est pas dans $N$). Si maintenant $t \in \mathbb{T}$, il existe une suite $t_n \in \mathbb{T}^0 \cap D$ convergeant vers $t$, et par continuité $X'_{t_n} \to X'_t$. D'autre part (1.3.2) et le fait que $g$ et $h$ sont croissantes entraînent que $g(r)$

et $h(r)$ tendent vers 0 quand $r \to 0$. Par suite (1.3.1) entraîne que $X_{t_n}$ converge vers $X_t$ en probabilité. Comme $X_{t_n} = X'_{t_n}$ p.s., on a aussi $X'_{t_n} \to X_t$ en probabilité; donc les variables $X'_t$ et $X_t$, limites en probabilité de la même suite, sont p.s. égales.

Etape 2) Il reste à montrer la propriété (A). On fixe $K \in \mathbb{N}$. Notons $A_n$ l'ensemble des couples $(s,t)$ avec $s \neq t$ et $s,t \in \mathbb{T}^0 \cap D_n \cap [-K,K]^d$ et $\|s-t\| \leq 2^{-n}$. Posons

$$Z_n \;=\; \sup\Big(|X_t - X_s| : \; (s,t) \in A_n\Big).$$

Comme $h$ est croissante, on a

$$\int_0^1 \frac{h(r)}{r^{d+1}}\, dr = \sum_{n\geq 1} \int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} \frac{h(r)}{r^{d+1}}\, dr \geq \frac{2^d-1}{d} \sum_{n\geq 1} 2^{(n-1)d} h(2^{-n}).$$

Par ailleurs comme le cardinal de $A_n$ est majoré par $(2K+1)^d 2^{nd}$, (1.3.1) entraîne que

$$\mathbb{P}\Big(Z_n > g(2^{-n})\Big) \;\leq\; (2K+1)^d 2^{nd} h(2^{-n}).$$

On déduit des deux majorations précédentes que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big(Z_n > g(2^{-n})\Big) \;\leq\; \frac{2(2K+1)^d}{2^d-1} \int_0^1 \frac{h(r)}{r^{d+1}}\, dr \;<\infty.$$

Par suite le lemme de Borel-Cantelli implique l'existence d'un ensemble négligeable $N_K \in \mathcal{F}$ tel que

$$\forall \omega \notin N_K,\; \exists n_0(\omega) \in \mathbb{N},\; \forall n \geq n_0(\omega), \quad Z_n(\omega) \leq g(2^{-n}). \tag{1.3.3}$$

On va maintenant montrer que si $\omega \notin N_K$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est uniformément continue sur $\mathbb{T}^0 \cap D \cap [-K,K]^d$. Soit $s,t$ dans cet ensemble, avec $\|s-t\| \leq 2^{-p}$ pour un certain entier $p$. Il existe $u \in \mathbb{T}^0 \cap D_p \cap [-K,K]^d$ tel que $\|t-u\| \leq 2^{-p}$ et $\|s-u\| \leq 2^{-p}$. De plus, on a $t \in D_n$ pour un certain $n > p$, donc il existe une suite de points $t_k \in \mathbb{T}^0 \cap D_k \cap [-K,K]^d$ pour $k = p, \cdots, n$ tels que $t_n = t$ and $t_p = u$ et aussi $\|t_k - t_{k+1}\| \leq 2^{-k}$, donc

$$|X_t(\omega) - X_u(\omega)| \leq \sum_{k=p}^{n-1} |X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k+1}}(\omega)| \leq \sum_{k=p}^{n-1} Z_k(\omega),$$

et bien-sûr la même estimation marche pour $s$ au lieu de $t$ (avec un $n$ différent). Donc finalement

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \;\leq\; 2 \sum_{n\geq p} Z_n(\omega).$$

Comme $g$ est croissante on a, comme ci-dessus pour $h$:

$$\int_0^{2^{1-p}} \frac{g(r)}{r}\, dr = \sum_{n\geq p} \int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} \frac{g(r)}{r}\, dr \geq \log 2 \sum_{n\geq p} g(2^{-n}),$$

donc $|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq \frac{2}{\log 2} \int_0^{2^{1-p}} \frac{g(r)}{r}\, dr$ dès que $p \geq n_0(\omega)$. Cette majoration étant vraie pour tout $s,t \in \mathbb{T}^0 \cap D \cap [-K,K]^d$ avec $\|s-t\| \leq 2^{-p}$, on déduit la propriété (A) du fait que $\int_0^{2^{1-p}} \frac{g(r)}{r}\, dr \to 0$ quand $p \to \infty$. □

**Corollaire 1.3.3.** *On a le même résultat que dans le théorème précédent si on remplace (1.3.1) par la condition*

$$s,t \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(|X_t - X_s|^p) \;\le\; C\|t-s\|^q, \tag{1.3.4}$$

*où $C, p, q$ sont des constantes, avec $p > 0$ et $q > d$.*

**Preuve.** L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff et (1.3.4) entraînent

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| > \|t-s\|^\gamma) \;\le\; C\|t-s\|^{q-p\gamma}$$

pour tout $\gamma > 0$. Il suffit alors d'appliquer le théorème, avec les fonctions $g(r) = r^\gamma$ et $h(r) = Cr^{q-p\gamma}$, en choisissant $\gamma > 0$ de sorte que $q - p\gamma > d$, ce qui est évidemment possible si $p > 0$ et $q > d$. □

**Corollaire 1.3.4.** *Le MB existe.*

**Preuve.** On considère un MB-L $X$. Si $t > s$ la variable $X_t - X_s$ est $\mathcal{N}(0, t-s)$, donc $X_t - X_s$ a même loi que $\sqrt{t-s}\, U$, où $U$ est normale standard. Par suite

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^4) \;=\; (t-s)^2 E(U^4) \;=\; 3(t-s)^2,$$

et il suffit d'appliquer le corollaire précédent. □

Il est peut-être utile de revenir encore une fois, ici, sur la notion de loi. Soit $W$ un MB sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (on utilisera d'habitude $W$ pour désigner le MB, appelé aussi "processus de Wiener"). Sa loi est une probabilité $\mu$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ muni de la tribu $\mathcal{G}$ décrite plus haut. Mais on peut aussi considérer $W$ comme une application de $\Omega$ dans $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues nulles en 0), donc sa loi comme une probabilité $\nu$ sur cet espace, muni de la tribu "trace" $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cap C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Une autre manière de voir les choses consiste à observer que tout $A \in \mathcal{G}'$ est de la forme $A = B \cap C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour un $B \in \mathcal{G}$ et à poser $\nu(A) = \mu(B)$ (la représentation précédente de $A$ n'est clairement pas unique, et il faut donc encore montrer que la définition de $\nu(A)$ ne dépend pas du $B$ choisi. Cela vient du fait que la "$\mu$ probabilité extérieure" de $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vaut 1).

*L'espace de Wiener* est l'espace $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de la tribu $\mathcal{G}'$ et de la probabilité $\nu$ ci-dessus (appelée aussi "mesure de Wiener"). Sur l'espace de Wiener le processus canonique $W_t(x) = x(t)$ est évidemment un MB.

Terminons ce paragraphe avec une notions élémentaire, mais très utile:

**Définition 1.3.5.** *Le MB (ou processus de Wiener) d-dimensionnel* est un processus $W$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dont les composantes $W^j$ sont des MB (1=dimensionnels) *indépendants.*

Il est facile de vérifier que cela revient à dire que $W$ est un processus p.s. continu et nul en 0, gaussien centré, de covariance

$$\mathbb{E}(W_t^j W_s^k) \;=\; \delta_{jk}\, \min(s,t)$$

($\delta_{jk}$ est le symbole de Kronecker). Comme dans la proposition 1.2.3, on vérifie que $W$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

Les deux résultats ci-dessous sont très simples, mais de première importance; le premier est appelé propriété d'autosimilarité, ou de "scaling", le second sera notablement amélioré plus tard.

**Proposition 1.3.6.** *Soit $W$ est un MB d-dimensionnel et deux constantes $\lambda > 0$ et $r > 0$.*

*a) Le processus $X_t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} W_{\lambda t}$ est un MB.*

*b) Le processus $Y_t = W_{s+t} - W_s$ est un MB.*

**Preuve.** Les processus $X$ et $Y$ sont p.s. continus, nuls en 0, gaussiens, centrés. On a

$$\mathbb{E}(X_t^j X_s^k) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(W_{\lambda t}^j W_{\lambda s}^k) = \frac{1}{\lambda}\delta_{jk}\min(\lambda t, \lambda s) = \delta_{jk}\min(s,t),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t^j Y_s^k) &= \mathbb{E}(W_{r+t}^j W_{r+s}^k + W_r^j W_r^k - W_r^j W_{r+s}^k - W_{r+t}^j W_r^k) \\ &= \delta_{jk}(r + \min(s,t) + r - r - r) = \delta_{jk}\min(s,t),\end{aligned}$$

d'où les deux résultats. □

## 1.4 Propriétés des trajectoires

On considère ci-dessous un MB (1-dimensionnel) $W$, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Non seulement les trajectoires sont continues, mais on peut évaluer de manière très précise leurs propriétés "fines". Ci-dessous nous donnons un résultat sur le module de continuité, d'autres résultats trajectoriels seront donnés au chapitre suivant.

**Théorème 1.4.1. (Module de continuité de Lévy).** *Presque toutes les trajectoires du mouvement brownien $W$ vérifient, pour tous $0 \leq A < B < \infty$:*

$$\limsup_{r\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2r\,\log(1/r)}}\sup_{s,t\in[A,B],\ |s-t|\leq r}|W_t - W_s|\right) = 1. \tag{1.4.1}$$

**Preuve.** Etape 1) On peut clairement supposer ici que toutes les trajectoires de $W$ sont continues. On pose $\phi(r) = \sqrt{2r\log(1/r)}$. Dans cette étape on montre que, si $M(A,B,r)$ désigne le "sup" apparaissant dans (1.4.1) et $M(r) = M(0,1,r)$, il suffit de montrer que

$$M_+ = \limsup_{r\to 0}\frac{M(r)}{\phi(r)} \quad \text{vérifie} \quad M_+ = 1 \quad \text{p.s.} \tag{1.4.2}$$

Si $A \geq 0$ et $B \in (0,\infty)$, par successivement (b) et (a) de la proposition 1.3.6 on obtient que le processus $(M(A, A+B, r))_{r>0}$ a même loi que $(M(0,B;r))_{r>0}$, puis que $\left(\sqrt{B}\,M(r/B)\right)_{r>0}$. Donc les variables $\limsup_{r\to 0}\frac{M(A,A+B,r)}{\phi(r)}$ et $\limsup_{r\to 0}\frac{\sqrt{B}\,M(r/B)}{\phi(r)}$ ont même loi, tandis que la seconde variable est aussi $\limsup_{r\to 0}\frac{\sqrt{B}\,M(r)}{\phi(Br)}$, qui égale $M_+$ puisque $\frac{\sqrt{B}\,\phi(r)}{\phi(Br)} \to 1$ lorsque $r \to 0$. Par suite (1.4.2) implique

$$0 \leq A < B < \infty \quad \Rightarrow \quad \limsup_{r\to 0}\frac{M(A,B,r)}{\phi(r)} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Ainsi, en dehors d'un ensemble négligeable $N$, on a $\limsup_{r\to 0} \frac{M(A,B,r)}{\phi(r)} = 1$ pour tous rationnels $0 \le A < B$. Comme $M(A',B',r) \le M(A,B,r) \le M(A'',B'',r)$ si $A'' \le A \le A' < B' \le B \le B''$, il est alors évident qu'en dehors de $N$ on a aussi $\limsup_{r\to 0} \frac{M(A,B,r)}{\phi(r)} = 1$ pour tous réels $0 \le A < B$, d'où le résultat.

Etape 2) On va maintenant montrer que $M_+ \ge 1$ p.s. On pose $I(a) = \int_a^\infty e^{-x^2/2}\,dx$ pour $a > 0$. On a

$$I(a) \;\le\; \int_a^\infty \frac{x}{a}\, e^{-x^2/2}\,dx \;=\; \frac{e^{-a^2/2}}{a} \;=\; \int_a^\infty \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\, e^{-x^2/2}\,dx \;\le\; \left(1+\frac{1}{a^2}\right) I(a),$$

de sorte que

$$\frac{e^{-a^2/2}}{a+1/a} \;\le\; I(a) \;\le\; \frac{e^{-a^2/2}}{a}. \tag{1.4.3}$$

Soit $\delta \in ]0,1[$ et $I_n = \mathbb{P}(|W_{2^{-n}}| > \delta\phi(2^{-n}))$. Comme $2^{n/2}W_{2^{-n}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on déduit de (1.4.3) que, pour une certaine constante $K_\delta$ dépendant de $\delta$ et tout $n \ge 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, I\left(2^{n/2}\delta\phi(2^{-n})\right) \;=\; \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, I\left(\delta\sqrt{2n\log 2}\right) \\ &\ge \frac{2e^{-n\delta^2\log 2}}{\sqrt{2\pi}\left(\delta\sqrt{2n\log 2} + 1/\delta\sqrt{2n\log 2}\right)} \;\ge\; K_\delta \frac{e^{-n\delta^2\log 2}}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant l'indépendance et la stationarité des accroissements de $W$:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le 2^n} \left|W_{k2^{-n}} - W_{(k-1)2^{-n}}\right| \le \delta\phi(2^{-n})\right) \;=\; (1-I_n)^{2^n} \\ &= e^{2^n\log(1-I_n)} \;\le\; e^{-2^n I_n} \;\le\; \exp\left(-\frac{K_\delta}{\sqrt{n}}\, e^{n(1-\delta^2)\log 2}\right). \end{aligned}$$

Comme $1-\delta^2 > 0$ la série $\sum \alpha_n$ est convergente. Donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour tout $\omega$ en dehors d'un ensemble négligeable $N_\delta$ on a pour tout $n$ assez grand:

$$\frac{M(2^{-n})(\omega)}{\phi(2^{-n})} \;\ge\; \sup_{1\le k\le 2^n} \frac{|W_{k2^{-n}}(\omega) - W_{(k-1)2^{-n}}(\omega)|}{\phi(2^{-n})} \;>\; \delta.$$

Pour tout $\omega \notin N_\delta$ on a donc $M_+ \ge \delta$ p.s., et comme $\delta$ est arbitrairement proche de 1 on a finalement $M_+ \ge 1$ p.s.

Etape 3) Il reste à montrer que $M_+ \le 1$ p.s. Soit $\delta \in ]0,1[$ et $\varepsilon > \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} - 1$. Comme $W_{t+s} - W_t$ a même loi que $\sqrt{s}\, U$, où $U$ est $\mathcal{N}(0,1)$, on a (avec $[x]$ = partie entière de $x \ge 0$):

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \mathbb{P}\left(\sup_{0\le i<j\le 2^n,\ j-i\le[2^{n\delta}]} \frac{\left|W_{j2^{-n}} - W_{i2^{-n}}\right|}{\phi((j-i)2^{-n})} > 1+\varepsilon\right) \\ &\le \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{k=1}^{[2^{n\delta}]} \mathbb{P}\left(|U| > (1+\varepsilon)\phi(k2^{-n})/\sqrt{k2^{-n}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le\ 2^n\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{[2^{n\delta}]} I\left(\frac{(1+\varepsilon)\phi(k2^{-n})}{\sqrt{k2^{-n}}}\right)\\
&\le\ \frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{[2^{n\delta}]}\frac{e^{-(1+\varepsilon)^2(n\log 2-\log k)+n\log 2}}{\sqrt{n\log 2-\log k}}\ \le\ K_{\varepsilon,\delta}e^{-n\log 2\big((1+\varepsilon)^2(1-\delta)-1-\delta\big)},
\end{aligned}$$

en utilisant de nouveau (1.4.3) pour l'avant-dernière inégalité, et le fait que $\log k \le n\delta\log 2$, pour la dernière, $K_{\varepsilon,\delta}$ désignant une constante dépendant de $\varepsilon$ et $\delta$. Comme $(1+\varepsilon)^2(1-\delta)-1-\delta > 0$ la série $\sum \alpha_n$ converge. Par le lemme de Borel-Cantelli on en déduit donc que pour tout $\omega$ n'appartenant pas à un ensemble négligeable $N_{\delta,\varepsilon}$ on a pour un $n_{\delta,\varepsilon} = n_{\delta,\varepsilon}(\omega)$:

$$n \ge n_{\delta,\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad \sup_{0\le i<j\le 2^n,\ j-i\le[2^{n\delta}]}\frac{\big|W_{j2^{-n}}-W_{i2^{-n}}\big|}{\phi((j-i)2^{-n})}\le 1+\varepsilon.$$

On choisit alors deux suites $\delta_m \to 0$ et $\varepsilon_m \to 0$ avec $\varepsilon_m > \sqrt{(1+\delta_m)/(1-\delta_m)}-1$, et avec $\delta_m \le 1/2$. L'ensemble $N = \cup_m N_{\delta_m,\varepsilon_m}$ est négligeable et, en vertu de ce qui précède, pour tout $\omega \notin N$ et tout $m$ il existe $n_m = n_m(\omega) \ge 4$ tel que

$$n \ge n_m \quad\Rightarrow\quad \sup_{0\le i<j\le 2^n,\ j-i\le[2^{n\delta_m}]}\frac{\big|W_{j2^{-n}}-W_{i2^{-n}}\big|}{\phi((j-i)2^{-n})}\ \le\ 1+\varepsilon_m. \tag{1.4.4}$$

Etape 4) Il nous reste à résoudre un problème purement déterministe: étant donnée une fonction continue $(W_t)$ sur $[0,1]$ qui vérifie (1.4.4), montrer que la quantité associée $M_+$ par (1.4.2) est inférieure ou égale à 1. Noter que $2^{-n_m(1-\delta_m)} \le 1/e$ pour tout $m$, et que la fonction $\phi$ est croissante sur $]0,1/e]$.

On fixe $m$ et $r\ \in ]0,2^{-n_m(1-\delta_m)}[$, de sorte qu'il existe un (unique) $n \ge n_m$ avec $2^{-(n+1)(1-\delta_m)} \le r < 2^{-n(1-\delta_m)}$. Soit $s<t$ deux dyadiques de $[0,1]$ tels que $t-s\le r$. On peut les écrire $s = i2^{-q}$ et $t = j2^{-q}$ pour un $q > n$. Deux situations sont possibles:

• Il existe $i$ avec $s' = t' := i2^{-n} \le s < t \le (i+1)2^{-n}$. Alors $s = s' + \sum_{l=n+1}^q i_l 2^{-l}$ et $t = t' + \sum_{l=n+1}^q j_l 2^{-l}$ avec des $i_l$ et $j_l$ valant 0 ou 1.

• Il existe $i$ avec $(i-1)2^{-n} < s \le s' := i2^{-n}$ et $j$ avec $t' := j2^{-n} \le< t \le (j+1)2^{-n}$. Alors $s = s' - \sum_{l=n+1}^q i_l 2^{-l}$ et $t = t' + \sum_{l=n+1}^q j_l 2^{-l}$ avec $i_l$ et $j_l$ comme ci-dessus.

Dans les deux cas on a $0 \le t'-s' \le r$, et $t'-s' = k2^{-n}$ avec $k \le 2^{n\delta_m}$. Par suite $|W_t - W_s|$ est majoré par $|W_{t'} - W_{s'}|$ plus deux sommes d'accroissements successifs de $W$ sur des intervalles dyadiques de taille $2^{-l}$ pour $l$ allant de $n+1$ à $q$. Par suite (1.4.4) et le fait que $\phi$ soit croissante sur l'intervalle $]0,1/e]$ impliquent que $|W_t - W_s| \le (1+\varepsilon_m)\Big(\phi(r) + 2\sum_{l=n+1}^\infty \phi(2^{-l})\Big)$. Cette majoration est vraie pour tous dyadiques $s,t$ avec $|t-s|\le r$, mais comme $W$ est continu elle est aussi vraie pour tous réels vérifiant la même condition. On a donc montré que (sous les conditions précédentes sur $r$):

$$M(r)\ \le\ (1+\varepsilon_m)\Big(\phi(r) + 2\sum_{l=n+1}^{\infty}\phi(2^{-l})\Big). \tag{1.4.5}$$

D'une part $\phi(2^{-l}) = \phi(2^{-n})\,2^{-(l-n)/2}\,\sqrt{l/n}$, donc $\sum_{l=n+1}^{\infty}\phi(2^{-l}) \leq C\phi(2^{-n})$ pour une certaine constante $C$. D'autre part $\log(1/r) \geq n(1-\delta_m)\log 2$ et $r2^n \geq 2^{n\delta_m - 1 + \delta_m}$, donc on a pour une autre constante $C'$,

$$\phi(2^{-n}) \;=\; \phi(r)\sqrt{\frac{n\log 2}{r2^n\log(1/r)}} \;\leq\; C'2^{-(n\delta_m+\delta_m-1)/2}.$$

Par suite (1.4.5) implique $M(r) \leq (1+\varepsilon_m)\phi(r)\Big(1+2CC'2^{-(n\delta_m+\delta_m-1)/2}\Big)$. Lorsque $r \to 0$ et $m$ reste fixé, on a $r < 2^{-n_m(1-\delta_m)}$ pour $r$ assez petit, et $n \to \infty$, de sorte que $M_+ \leq 1+\varepsilon_m$ (rappelons que $\delta_m > 0$). Comme $\varepsilon_m \to 0$ on en déduit $M_+ \leq 1$, et la preuve est terminée. $\square$

**Corollaire 1.4.2.** *Presque toutes les trajectoires du MB sont höldériennes d'indice $\alpha$ arbitraire dans $]0,\frac{1}{2}[$, uniformément sur les compacts, et ne le sont pas pour l'indice $\frac{1}{2}$.*

*En particulier elles ne sont dérivables en aucun point.*

**Preuve.** Dire que $W$ est höldériennes d'indice $\alpha$ sur le compact $[A,B]$ (pour une trajectoire donnée) revient à dire qu'il existe une constante $C$ (dépendant de la trajectoire), telle que $M(A,B,r) \leq Cr^\alpha$, avec les notations de la preuve précédente.

D'une part (1.4.1) implique que, pour $\omega$ en dehors d'un ensemble négligable, on a $M(A,B,r) \leq 2\phi(r)$ pour tout $r \leq r_0$ (de nouveau $r_0$ dépend de $\omega$). On a aussi $M(A,B,r) \leq K$ pour tout $r > 0$ et une autre constante $K$. Donc $M(A,B,r) \leq \psi(r) := 2\phi(r) + K1_{\{[r_0,\infty[\}}(r)$, et comme la fonction $\psi(r)/r^\alpha$ est bornée si $\alpha \in ]0,\frac{1}{2}[$ on a le premier résultat.

Si $M(A,B,r) \leq C\sqrt{r}$ pour tout $r > 0$, on a évidemment $\frac{M(A,B,r)}{\phi(r)} \to 0$ quand $r \to 0$, ce qui contredit (1.4.5), d'où le second résultat.

Enfin si pour un $\omega$ la fonction est dérivable en un point $s$, on a $|W_t - W_s| \leq C|t-s|$ pour tout $t$ dans un voisinage fermé $[A,B]$ de $s$, ce qui entraine encore $\frac{M(A,B,r)}{\phi(r)} \to 0$ quand $r \to 0$. Cela prouve la dernière assertion. $\square$

## 1.5 La variation quadratique

Les résultats du paragraphe précédent sont très intéressants du point de vue théorique, mais pas vraiment utiles pour le calcul stochastique qui nous occupera beaucoup dans la suite. En revanche le résultat suivant est tout-à-fait fondamental.

Considérons un mouvement brownien $W$ et, pour chaque $n$, une suite strictement croissante $(t(n,i) : i \geq 0)$ tendant vers l'infini, et avec $t(n,0) = 0$. A cette suite on associe les variables aléatoires

$$S(n)_t \;=\; \sum_{i\geq 1: t(n,i)\leq t} (W_{t(n,i)} - W_{t(n,i-1)})^2. \tag{1.5.1}$$

Cela définit un nouveau processus, qu'on appelle la *variation quadratique approchée* de $W$, le long de la subdivision $(t(n,i))_{i\geq 0}$.

**Théorème 1.5.1.** *Si le* pas *des subdivisions* $(t(n,i))_{i\geq 0}$ *tend vers* 0 *quand* $n \to \infty$, *ce qui signifie que pour tout* $t$ *la suite* $m_n(t) = \sup(t(n,i) - t(n,i-1) : i \geq 1, t(n,i-1) \leq t)$ *tend vers* 0, *alors on a*

$$S(n)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} t \tag{1.5.2}$$

*(convergence en probabilité). On a même la convergence en probabilité uniformément sur chaque intervalle borné, ce qui veut dire que pour tout* $t$ *on a*

$$\sup_{s\leq t} |S(n)_s - s| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{1.5.3}$$

**Preuve.** Soit $t$ fixé, et $\alpha_n = \mathbb{E}\Big((S(n)_t - t)^2\Big)$. Pour (1.5.2) il suffit de montrer que $\alpha_n \to 0$. Avec les notations $\chi(n,i) = (W_{t(n,i)} - W_{t(n,i-1)})^2 - (t(n,i) - t(n,i-1))$ et $\zeta_n = t - t(n,i_n)$, où $i_n$ est l'unique entier tel que $t(n,i_n) \leq t < t(n,i_n+1)$, on a $S(n)_t - t = \sum_{i=1}^{i_n} \chi(n,i) - \zeta_n$. D'après les propriété d'accroissements indépendants et de scaling de $W$, les variables $\chi(n,i)$ sont indépendantes (quand $i$ varie), et ont la même loi que $(t(n,i) - t(n,i-1))(U^2 - 1)$, où $U$ est une variable $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc

$$\mathbb{E}(\chi(n,i)) \;=\; 0, \qquad \mathbb{E}(\chi(n,i)^2) \;=\; 2(t(n,i) - t(n,i-1))^2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{i,j=1}^{i_n} \mathbb{E}(\chi(n,i)\chi(n,j)) + \zeta_n^2 - 2\zeta_n \sum_{i=1}^{i_n} \mathbb{E}(\chi(n,i)) \\ &= \sum_{i=1}^{i_n} 2(t(n,i) - t(n,i-1))^2 + \zeta_n^2 \;\leq\; m_n(t) \left( 2 \sum_{i=1}^{i_n} (t(n,i) - t(n,i-1)) + \zeta_n \right) \end{aligned}$$

et la dernière expression est majorée par $2tm_n(t)$, qui tend vers 0 par hypothèse.

Quant à (1.5.3), c'est une conséquence immédiate de deux propriétés très utiles:

1) Si on a une suite $f_n$ de fonctions croissantes sur $[0,A]$, et $f$ une fonction croissante *continue*, la convergence $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t$ rationnel de $[0,A]$ implique la convergence uniforme.

2) Pour qu'une suite de variables $Y_n$ (à valeurs dans un espace polonais $E$) converge en probabilité vers $Y$, il faut et il suffit que de toute sous-suite infinie on puisse extraire une sous-sous-suite qui converge p.s. vers $Y$.

Soit $M(n)_t$ le membre de gauche de (1.5.3). Par (2), (1.5.3) découlera du fait que, étant donnée une suite quelconque $n_k \to \infty$, il existe une suite $m_k$ telle que $M(n_{m_k})_t \to 0$ p.s. Mais (1.5.2) implique pour chaque $s$ l'existence d'une sous-suite de $S(n_k)_s$ convergeant p.s. vers $s$, donc par un argument diagonal il existe une suite $m_k$ telle que, en dehors d'un ensemble négligeable, $S(n_{m_k})_s \to s$ pour tout rationnel $s \leq t$. On conclut en appliquant (1). $\square$

Terminons par un résultat du même type, pour un couple $(W, W')$ de MB indépendants (par exemple deux des composantes d'un MB $d$-dimensionnel): on étudie la "covariation" quadratique.

**Théorème 1.5.2.** *Sous les hypothèses du théorème 1.5.1, on a*

$$\sum_{i \geq 1 : t(n,i) \leq t} (W_{t(n,i)} - W_{t(n,i-1)})(W'_{t(n,i)} - W'_{t(n,i-1)}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{1.5.4}$$

**Preuve.** Il suffit de reprendre la preuve du théorème 1.5.1, avec $\chi(n,i) = (W_{t(n,i)} - W_{t(n,i-1)})(W'_{t(n,i)} - W'_{t(n,i-1)})$. On a $\mathbb{E}(\chi(n,i)) = 0$ et aussi $\mathbb{E}(\chi(n,i)\chi(n,j)) = 0$ si $i \neq j$, de sorte que l'espérance du carré du membre de gauche de (1.5.4), soit $\alpha_n$, vaut

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{i_n} \mathbb{E}(\chi(n,i)^2) + \zeta_n^2.$$

Comme $\mathbb{E}(\chi(n,i)^2) = (t(n,i) - t(n,i-1))^2$, il vient

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{i_n} (t(n,i) - t(n,i-1))^2 + \zeta_n^2 \to 0. \qquad \square$$

# Chapitre 2

# Martingales à temps continu

Ce chapitre est consacré aux résultats les plus simples de la théorie des martingales qui sont indicées par $\mathbb{R}_+$. La théorie des martingales à temps discret (théorème d'arrêt, inégalités de Doob, théorèmes limite) est supposée connue.

## 2.1 Filtrations et temps d'arrêt

La structure de base est un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. Ultérieurement on ajoutera une probabilité $\mathbb{P}$, mais dans ce paragraphe la probabilité est inutile. En revanche, on a un ensemble d'indices (les "temps"), et cet ensemble sera toujours $\mathbb{R}_+$. Nous rassemblons dans deux (longues) définitions l'ensemble des notions les plus utiles.

**Définition 2.1.1.** (a) Une *filtration* est une famille $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, qui est *croissante*: $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Par convention, on pose $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ (= la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{F}_t$). On pose aussi $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

(b) Une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est dite càd (pour "continue à droite") si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pour tout $t$.

(c) Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est dit *adapté* à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si $X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t$.

(d) La filtration *engendrée par un processus* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est la plus petite filtration càd à laquelle il est adapté. On la note $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, et de manière évidente on peut la définir ainsi: $\mathcal{F}_t^X = \cap_{s>t} \sigma(X_r : r \leq s)$; ici, comme d'habitude, $\sigma(X_r : r \leq s)$ désigne la tribu engendrée par la famille $(X_r : r \leq s)$ de variables aléatoires [rappelons qu'un processus est une famille d'applications mesurables, de sorte que nécessairement $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}$ ci-dessus, comme il convient]. $\square$

Attention à (d) ci-dessus, nous imposons à $\mathbb{F}^X$ d'être càd! Si on avait posé $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r : r \leq t)$ on aurait obtenu une filtration, mais pas càd, *même si le processus* $X$ *est à trajectoires continues.*

Passons maintenant aux temps d'arrêt:

**Définition 2.1.2.** Un *temps d'arrêt* de la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (ou $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, ou seulement "temps d'arrêt" s'il n'y a pas d'ambiguité) est une application $T : \Omega \to [0, \infty]$ qui vérifie

$$\forall t \geq 0, \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{2.1.1}$$

On associe à $T$ la classe suivante de parties de $\Omega$:

$$\mathcal{F}_T \;=\; \{A : \; A \in \mathcal{F}, \; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \;\; \forall t\}, \tag{2.1.2}$$

appelée la *tribu du passé avant* $T$ [cf. (P2) ci-dessous]. □

Ces définitions sont analogues à celles du cas discret, i.e. le cas où l'ensemble des temps est $\mathbb{N}$: sauf que dans le cas discret la continuité à droite est une notion vide, et qu'on peut aussi utiliser comme définition d'un temps d'arrêt que $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n$. Dans le cas continu, $\{T = t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t$ n'implique pas que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Voici maintenant une liste de propriétés des temps d'arrêt. Elles sont toutes élémentaires et les démonstrations sont laissées au lecteur, avec parfois quelques indications. Il est sous-entendu ci-dessous que $T, S, T_n$ sont des temps d'arrêt, pour une filtration fixée $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$. Noter que la filtration $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_{t+})$ est la plus petite filtration càd contenant $\mathbb{F}$.

**(P1):** Si $R(\omega) = t$ pour tout $\omega$, alors $R$ est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_t$ (il n'y a donc pas d'ambiguité de notation).

**(P2):** La classe $\mathcal{F}_T$ est une tribu [ce ne serait pas vrai si $T$ n'était pas un temps d'arrêt].

**(P3):** $T + t$ (i.e. $(T + t)(\omega) = T(\omega) + t$) est un temps d'arrêt. On note alors $\mathcal{F}_{T+}$ la tribu $\mathcal{F}_{T+} = \cap_{t>0} \mathcal{F}_{T+t}$ [notation compatible avec $\mathcal{F}_{t+}$, lorsque $T(\omega) = t$ pour tout $\omega$].

**(P4):** Si $S \leq T$ (identiquement) on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

**(P5):** $\min(S, T)$ et $\max(S, T)$ sont des temps d'arrêt. De plus $\mathcal{F}_{\min(S,T)} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. [utiliser (P4) et aussi $A \cap \{\min(S, T) \leq t\} = \Big(A \cap \{S \leq t\}\Big) \cup \Big(A \cap \{T \leq t\}\Big)$].

**(P6):** $\{S < T\}$, $\{S \leq T\}$, $\{S = T\}$ sont dans $\mathcal{F}_S$ et dans $\mathcal{F}_T$. Si de plus $A \in \mathcal{F}_S$, alors $A \cap \{S < T\}$, $A \cap \{S \leq T\}$ et $A \cap \{S = T\}$ sont dans $\mathcal{F}_T$ [utiliser $\{S < T\} = \cup_{r \in \mathbb{Q}_+} \Big(\{S \leq r\} \cap \{T > r\}\Big)$].

**(P7):** Si $A \in \mathcal{F}_T$, l'application $R$ de $\Omega$ dans $[0, \infty]$ définie par $R = T$ sur $A$ et $R = \infty$ sur $A^c$ est un temps d'arrêt.

**(P8):** Une application $R : \Omega \to [0, \infty]$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt si et seulement si $\{R < t\} \in \mathcal{F}_{t+}$ pour tout $t$, et aussi si et seulement si $\{R < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t$ [pour les implications $\Leftarrow$, utiliser $\{R \leq t\} = \lim_n \{R < t + 1/n)\}$].

On note $\mathcal{F}_{R+}$ la filtration du passé avant $R$ lorsque $R$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt. La propriété suivante montre que cette notation n'est pas ambigüe:

**(P9):** La tribu $\mathcal{F}_{T+}$ définie dans (P3) est aussi la tribu du passé avant $T$, relativement à la filtration $\mathbb{F}^+$.

**(P10):** Si $\mathbb{F}$ n'est pas càd, il existe des $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt qui ne sont pas des $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.

**(P11):** Si $\mathbb{F}$ est càd, $\mathcal{F}_T$ est l'ensemble des $A \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t$.

**(P12):** $\sup_n T_n$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, et $\inf_n T_n$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt. Si de plus $\mathbb{F}$ est càd on a $\mathcal{F}_{\inf T_n} = \cap_n \mathcal{F}_{T_n}$.

**(P13):** Si $R$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt, il existe une suite décroissante $R_n$ de $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, de limite $R$, et telle de plus que chaque $R_n$ ne prenne qu'un nombre *fini* de valeurs, et enfin que $R_n > R$ si $R < \infty$ [par exemple, $R_n = k2^{-n}$ sur l'ensemble $\{(k-1)2^{-n} \leq R < k2^{-n}\}$ et $1 \leq k \leq n2^n$, et $R_n = \infty$ sur l'ensemble $\{R \geq n2^n\}$].

**(P14):** En revanche il n'existe pas en général de suite *croissante* de temps d'arrêt $S_n$, de limite $R$ et avec $S_n < R$ si $R > 0$.

## 2.2 Temps d'arrêt et processus adaptés

On considère encore un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ et sa "régularisée à droite" $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_{t+})$, comme dans le paragraphe précédent. On se donne aussi un processus $X$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Si $A \in \mathcal{E}$, on note $T_A$ le "temps d'entrée" du processus $X$ dans l'ensemble $A$, c'est-à-dire

$$T_A(\omega) \;=\; \begin{cases} \inf(t : X_t(\omega) \in A) & \text{s'il existe } t \text{ avec } X_t(\omega) \in A \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Moralement, lorsque le processus est adapté à la filtration, si on connait $\mathcal{F}_t$ on "connait" la trajectoire de $X$ sur $[0, t]$ et on sait donc dire si $T_A < t$ ou non (on ne sait en général pas dire si $T_A = t$ ou non, car on peut avoir $T_A = t$ et cependant $X_t \notin A$); plus précisément, on a

$$\{T_A < t\} \;=\; \cup_{s<t} \{X_s \in A\} \tag{2.2.2}$$

et par suite $T_A$ "doit" être un temps d'arrêt pour, au moins, $\mathbb{F}^+$. En revanche si $X$ n'est pas adapté, il est clair que $T_A$ n'est en général pas un temps d'arrêt.

Mathématiquement, c'est exactement ce qui se passe dans le cas discret: la réunion dans (2.2.2) est une réunion finie. Malheureusement, dans le cas continu les choses sont beaucoup plus difficiles, à commencer par la mesurabilité de $T_A$: on a toujours (2.2.2), mais il s'agit d'une réunion non dénombrable, et bien que chaque $\{X_s \in A\}$ soit dans $\mathcal{F}_t$ pour $s < t$, on ne peut pas en conclure $\{T_A < t\} \in \mathcal{F}_t$, ni même d'ailleurs $\{T_A < t\} \in \mathcal{F}$.

Nous allons démontrer un certain nombre de résultats partiels (les plus utiles dans les applications), et nous nous contenterons d'énoncer le résultat général, difficile à prouver.

**Proposition 2.2.1.** *Supposons que $(E, \mathcal{E})$ soit un espace métrique, muni de ses boréliens. Supposons aussi $X$ adapté à $\mathbb{F}$.*

*a) Si $A$ est un ouvert, et si $X$ est à trajectoires continues à droite (càd), ou continues à gauche (càg), alors $T_A$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt.*

*b) Si $A$ est un fermé, et si $X$ est càd, alors $T_A$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.*

*c) Si $A$ est un fermé, et si $X$ est càg, alors $T_A$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt.*

**Preuve.** Tout repose sur le fait de pouvoir remplacer, d'une manière ou d'une autre, la réunion non dénombrable de (2.2.2) par une réunion dénombrable.

Si $A$ est ouvert et $X$ est càg ou càd, il est évident que $\{T_A < t\} = \cup_{s \in \mathbb{Q}_+ : s<t}\{X_s \in A\}$. Comme on a $\{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$, on obtient $\{T_A < t\} \in \mathcal{F}_t$ et (a) découle de (P8).

Soit maintenant $A$ fermé, et $d$ une distance sur $E$. Le processus $Y_t = d(X_t, A)$ ($d(x, A)$ = distance de $x \in E$ au fermé $A$, c'est une fonction continue de $x$) est adapté, et càg (càd) si $X$ est càg (càd), et évidemment $T_A = \inf(t : Y_t = 0)$ (avec $\inf(\emptyset) = +\infty$). De plus, si $V_t = \inf_{s\in[0,t[} Y_s$, dans les deux cas càd et càg on a aussi $V_t = \inf_{s\in\mathbb{Q}_+,\, s<t} Y_s$, de sorte que $V_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Si $Y$ est càd, il est immédiat que $\{T_A \leq t\} = \{V_t = 0\} \cup \{Y_t = 0\}$, qui est dans $\mathcal{F}_t$, ce qui prouve (b). Dans le cas càg il est aussi immédiat que $\{T_A < t\} = \{V_t = 0\}$, qui est dans $\mathcal{F}_t$, ce qui prouve (c). $\square$

Pour énoncer le cas général, il nous faut une notion un peu plus forte que l'adaptation d'un processus. Ci-dessous, $\mathcal{B}(I)$ désigne la tribu borélienne d'un intervalle $I$.

Un processus $X$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ peut être considéré, de manière évidente, comme une application de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ dans $E$. Cet espace est naturellement muni de la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, et si $X$ est mesurable par rapport à cette tribu on dit que $X$ est *mesurable*. Si $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ on dit que aussi que l'ensemble (aléatoire) $A$ est *mesurable*. Introduisons maintenant une autre tribu sur cet espace:

**Définition 2.2.2.** On appelle *tribu progressive* la tribu de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ constituée des $A$ qui vérifient $A \cap (\Omega \times [0, t]) \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ pour tout $t \geq 0$.

Un ensemble aléatoire $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ est dit *progressivement mesurable*, ou *progressif*, s'il appartient à cette tribu. Un processus $X$ est dit *progressivement mesurable* si, considéré comme application sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$, il est mesurable par rapport à cette tribu. $\square$

Cette notion est évidemment relative à la filtration. Si on veut préciser ce fait, on écrit $\mathbb{F}$-progressivement mesurable.

**Proposition 2.2.3.** *a) Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. Un processus mesurable a des trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ qui sont boréliennes.*

*b) Un processus adapté à trajectoires càd ou càg (avec $E$ topologique, bien entendu) est progressivement mesurable.*

**Preuve.** (a) est évident. Si $X$ est càd, pour $t$ fixé on pose pour $s \leq t$ et $n \geq 1$:

$$X_s^n = \begin{cases} X_{kt/n} & \text{si} \quad \frac{(k-1)t}{n} \leq s < \frac{kt}{n},\ k = 1, \cdots, n \\ X_t & \text{si} \quad s = t. \end{cases}$$

Si $X$ est adapté, il est évident que $(\omega, s) \mapsto X_s^n(\omega)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-mesurable. Par ailleurs la continuité à droite implique $X_s^n(\omega) \to X_s(\omega)$ pour tous $\omega \in \Omega$, $s \in [0,t]$. Donc $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ est aussi $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-mesurable. Si $X$ est càg la même démonstration marche, pourvu qu'on prenne

$$X_s^n = \begin{cases} X_{(k-1)t/n} & \text{si} \quad \frac{(k-1)t}{n} < s \leq \frac{kt}{n}, \ k = 1, \cdots, n \\ X_0 & \text{si} \quad s = 0. \end{cases}$$

□

Remarquer que si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ pour tout $t$ (la "plus grosse" filtration possible), mesurable et progressivement mesurable sont la même notion. Remarquer aussi qu'il existe des processus non mesurables: par exemple soit $X$ un processus tel que les variables $X_t$ sont toutes indépendantes, avec $\mathbb{P}(X_t = 0) = \mathbb{P}(X_t = 1) = \frac{1}{2}$ (voir l'exemple 1.1.7). On peut montrer que, quel que soit l'espace sur lequel ce processus est défini, presque toutes ses trajectoires ne sont pas boréliennes, en restriction à n'importe quel intervalle !, de sorte que $X$ n'est pas mesurable. On peut exhiber des exemples, mais c'est plus compliqué, de processus mesurables adaptés, mais pas progressivement mesurables.

Dans la proposition suivante on considère $X_T$, où $T$ est un temps d'arrêt. Cela signifie $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$, et bien entendu $X_T$ n'est défini que sur l'ensemble $\{T < \infty\}$. Afin d'obtenir une fonction définie sur $\Omega$ entier, on convient que $X_T = \Delta$ sur $\{T = \infty\}$, où $\Delta$ est un état fictif, hors $E$ lui-même. Noter qu'a priori $X_T$ n'est *pas* une variable aléatoire (i.e., mesurable).

**Proposition 2.2.4.** *Si $X$ est un processus progressivement mesurable et $T$ un temps d'arrêt, $X_T$ est une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

**Preuve.** Il s'agit de montrer que si $A \in \mathcal{E}$ on a $\{X_T \in A, T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$. C'est évident si $t = 0$. Fixons alors $t > 0$. Soit $\Omega' = \{T \leq t\}$ avec la tribu trace $\mathcal{F}'_t$ de $\mathcal{F}_t$, et $G := \Omega' \times [0,t]$ avec la tribu trace $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$. L'application $Y: \ G \to E$ définie par $Y(\omega, s) = X_s(\omega)$ est $\mathcal{G}$-mesurable puisque $X$ est progressivement mesurable. Comme $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$, l'application $S: \ \Omega' \to G$ définie par $S(\omega) = ((\omega, T(\omega))$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{F}'_t$ sur $\Omega'$ et $\mathcal{G}$ sur $G$. Par suite $Y \circ S$ est mesurable de $(\Omega', \mathcal{F}'_t)$ dans $(E, \mathcal{E})$. Comme $\{X_T \in A, T \leq t\} = \{\omega \in \Omega', \ Y \circ S(\omega) \in A\}$, cet ensemble est dans $\mathcal{F}'_t$, donc aussi dans $\mathcal{F}_t$. □

Voici quelques propriété faciles mais souvent utiles; $T$ désigne un temps d'arrêt quelconque:

**(P15):** Si une variable $Y$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable, les processus

$$X_t = Y 1_{\{T \leq t\}}, \qquad X'_t = Y 1_{\{T < t\}}, \qquad X''_t = Y 1_{\{T = t\}}$$

sont progressivement mesurables [ils sont adaptés, $X$ est càd, $X'$ est càg, $X'' = X - X'$].

**(P16):** Si $X$ est un processus progressivement mesurable, le *processus arrêté en* $T$, noté $X^T$ et défini par $X_t^T = X_{\min(t,T)}$ est aussi progressivement mesurable [on a $X_t^T = X_T 1_{\{T \leq t\}} + X_t 1_{\{T > t\}}$].

Revenons maintenant au problème des temps d'entrée. Comme on l'a vu, la question de savoir si le temps d'entrée $T_A$ défini par (2.2.1) est un temps d'arrêt suppose d'abord résolue la question de savoir si $T_A$ est $\mathcal{F}$-mesurable, et c'est là en fait la question difficile.

La proposition 2.2.1 donne une réponse partielle: c'est vrai si $X$ a des trajectoires assez régulières et $A$ est fermé ou ouvert. Mais on a en fait un résultat bien plus fort, à condition d'augmenter un peu la tribu $\mathcal{F}$.

Rappelons quelques résultats de théorie de la mesure. Si $P$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on appelle "$\mathbb{P}$-négligeable" toute partie $A$ de $\Omega$ (pas nécessairement dans $\mathcal{F}$), qui est contenu dans un $N \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mathbb{P}(N) = 0$. La *complétion* de $\mathcal{F}$ est la tribu $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ engendrée par $\mathcal{F}$ et par tous les $\mathbb{P}$-négligeables (en fait $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ est constituée des ensembles de la forme $A \cup B$, avec $A \in \mathcal{F}$ et $B$ $\mathbb{P}$-négligeable). On étend $\mathbb{P}$ à $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ en posant $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$ si $A \in \mathcal{F}$ et $B$ est $\mathbb{P}$-négligeable, et on obtient ainsi une probabilité sur $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}})$, notée encore $\mathbb{P}$. De plus $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ contient tous les $\mathbb{P}$-négligeables, donc la complétion de $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ est $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ elle-même.

On a alors le résultat suivant, connue sous le nom "théorème de section (mesurable)", voir par exemple le livre de Dellacherie et Meyer, "Probabilités et potentiel":

**Théorème 2.2.5.** *Si $X$ est un processus mesurable, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, et si $A \in \mathcal{E}$, pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ le temps d'entrée $T_A$ est une variable aléatoire $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$-mesurable.*

Passons maintenant à la complétion des filtrations. C'est un peu plus compliqué que la complétion d'une seule tribu, et en particulier la "limite à droite" ne commute pas avec la complétion. On opère ainsi: on note $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$ la classe des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables, *relativement à la tribu $\mathcal{F}$*. Ensuite, on note $\widetilde{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}$, resp. $\widetilde{\mathcal{F}}_{t+}^{\mathbb{P}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$, resp. $\mathcal{F}_{t+}$ et $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. Il est facile de vérifier que $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}$, resp. $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_{t+}^{\mathbb{P}}$, si et seulement s'il existe un $B \in \mathcal{F}_t$, resp. $B \in \mathcal{F}_{t+}$, qui est égal à $A$ à un $\mathbb{P}$ -négligeable près (ce qui signifie que la différence symétrique $A \Delta B$ est dans $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$). On en déduit aisément que la filtration $\mathbb{F}^{+,\mathbb{P}} = (\widetilde{\mathcal{F}}_{t+}^{\mathbb{P}})_{t \geq 0}$ est la plus petite filtration càd contenant la filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}})_{t \geq 0}$.

Dans la littérature, la filtration $\mathbb{F}^{+,\mathbb{P}}$ (càd, et chacune de ses tribus contenant tous les $\mathbb{P}$-négligeables relativement à $\mathcal{F}$) est dite *vérifier les conditions habituelles.*

**Théorème 2.2.6.** *Si $X$ est un processus progressivement mesurable, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, et si $A \in \mathcal{E}$, le temps d'entrée $T_A$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $\mathbb{F}^{+,\mathbb{P}}$ associée à $\mathbb{F}$ et à n'importe quelle probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que $\{T_A < t\} \in \overline{\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}$ pour tout $t$, ce qui est évident si $t = 0$. On fixe donc $t > 0$. Comme $X$ est progressivement mesurable, le processus $X'_s = X_s$ si $s < t$ et $X'_s = \Delta$ si $s \geq t$ (où $\Delta$ est un point extérieur à $E$) est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable, de sorte que d'après le théorème précédent le temps d'entrée $T'_A$ de $X'$ dans $A$ est mesurable par rapport à la complétion pour $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}_t$, qui est contenue dans $\overline{\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}$. Comme $T'_A = T_A$ si $T_A < t$ et $T'_A = \infty$ si $T_A \geq t$, on en déduit immédiatement le résultat. □

Une autre manière d'exprimer ce résultat, peut-être plus facile à utiliser parce qu'elle ne met pas en jeu les filtrations "complétées" au sens (un peu compliqué) ci-dessus, est la suivante:

**Théorème 2.2.7.** *Si $X$ est un processus progressivement mesurable, à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$, et si $A \in \mathcal{E}$, le temps d'entrée $T_A$ est, pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$, $\mathbb{P}$-p.s. égal à un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt $T$.*

Il n'y a toutefois pas de miracle: l'ensemble négligeable $\{T_A \neq T\}$ n'est en général pas dans $\mathcal{F}$, mais seulement dans la complétion $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$. De plus, le temps d'arrêt $T$ *dépend* de $\mathbb{P}$. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 2.2.6 et de la proposition suivante:

**Proposition 2.2.8.** *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$ et si $T$ est un $\mathbb{F}^{+,\mathbb{P}}$-temps d'arrêt, il existe un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt $S$ tel que l'ensemble $\{T \neq S\}$ soit $\mathbb{P}$-négligeable. De plus tout $A \in \mathcal{F}_T^{+,\mathbb{P}}$ est égal, à un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable près, à un $B \in \mathcal{F}_{S+}$.*

**Preuve.** Pour tout $t>0$ il existe $B_t \in \mathcal{F}_t$ tel que la différence symétrique $N_t$ de $\{T<t\}$ et de $B_t$ soit dans $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. Il suffit alors de poser

$$S(\omega) \;=\; \inf(s:\; s\in\mathbb{Q}_+,\; \omega\in B_s).$$

D'une part $\{S<t\} = \cup_{s\in\mathbb{Q}_+\cap[0,t[}B_s$, qui est dans $\mathcal{F}_t$, de sorte que $S$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt. D'autre part l'ensemble $N=\cup_{s\in\mathbb{Q}_+}N_s$ est dans $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. Si alors $\omega\notin N$, on a $T(\omega)<s$ pour un $s$ rationnel si et seulement si $\omega\in B_s$, donc il est évident que $T(\omega)=S(\omega)$. Ainsi $\{T\neq S\}\subset N$, et on a le premier résultat.

Quant au second résultat, il suffit de le montrer séparément pour $A'=A\cap\{T=\infty\}$ et $A''=A\cap\{T<\infty\}$. Il existe $B\in\mathcal{F}$ avec $A\Delta B\in\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$ et soit $B'=B\cap\{S=\infty\}$, qui est dans $\mathcal{F}_{S+}$ et vérifie $A'\Delta B'\subset(A\Delta B)\cup\{S\neq T\}$, donc $A'\Delta B'\in\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. Par ailleurs $A''=\{T=T''<\infty\}$, où $T''$ égale $T$ sur $A$ et $+\infty$ sur $A^c$ (cf. (P7)), et il existe un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt $S''$ tel que $\{S''\neq T''\}\in\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$; on a $B'':=\{S=S''<\infty\}\in\mathcal{F}_{S+}$, et $A''\Delta B''\subset\{T=S\}\cup\{S''\neq T''\}$, donc $A''\Delta B''\in\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. $\square$

La fin de ce paragraphe est consacrée à quelques applications de ce qui précède au brownien. Si $W$ un MB sur $(\Omega,\mathcal{F})$, on sait que la tribu $\sigma(W_0)$ est la tribu triviale $\{\Omega,\emptyset\}$ (puisque $W_0=0$), et que la variable $W_{t+s}-W_t$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_t^{0,W} = \sigma(W_r:r\leq t)$. Il est remarquable que ces deux propriétés restent vraies si on remplace $\mathcal{F}_t^{0,W}$ par sa régularisés à droite $\mathcal{F}_t^W=\mathcal{F}_{t+}^{0,W}$, ou même par la complétée (cette dernière extension est bien-sûr triviale), et aussi si on remplace $t$ par un temps d'arrêt.

Nous énonçons ces diverses extensions dans un seul théorème, qui étend également (b) de la proposition 1.3.6. Nous généralisons même un peu la situation, dans le cas $d$-dimensionnel, et au cadre suivant:

**Définition 2.2.9.** Si $\mathbb{F}$ est une filtration, on appelle $\mathbb{F}$-MB $d$-dimensionnel un processus $W$ p.s. continu nul en 0, adapté à $\mathbb{F}$, et tel que pour tous $s,t\geq 0$ le vecteur $W_{t+s}-W_t$ soit indépendant de $\mathcal{F}_t$ et de loi $\mathcal{N}(0,sI_d)$ (où $I_d$ est la matrice identité $d\times d$). $\square$

Evidemment un MB est un $\mathbb{F}$-MB pour $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t^{0,W})_{t\geq 0}$, et on verra ci-dessus que c'est aussi un $\mathbb{F}^W$-MB. L'intérêt de la notion précédente vient que souvent un MB est un $\mathbb{F}$-MB pour une filtration beaucoup plus grosse que $\mathbb{F}^W$; par exemple la première composante $W^1$ d'un MB $W$ est un $\mathbb{F}^W$-MB uni-dimensionnel, mais bien d'autres exemples naturels existent.

**Théorème 2.2.10.** *Soit $W$ un $\mathbb{F}$-MB d-dimensionnel, pour une filtration quelconque sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ sa régularisée à droite.*

*a)* **(Propriété forte de Markov)** *Si $T$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt à valeurs finies, le processus $Y_t = W_{T+t} - W_T$ est un MB, indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{T+}$.*

*b)* **(Loi $0-1$)** *La probabilité $\mathbb{P}(A)$ de tout $A \in \mathcal{F}_0^W$ vaut $0$ ou $1$.*

*En particulier $W$ est aussi un $\mathbb{F}^+$-MB.*

(a) est parfois énoncé de manière un peu différente, lorsque $T$ n'est pas à valeurs finies: dans ce cas, le processus $Y$ n'est défini que sur l'ensemble $\{T < \infty\}$, et on peut poser de manière arbitraire $Y_t = 0$ pour tout $t$ sur $\{T = \infty\}$. Il découle alors de manière immédiate de (a) que

$$\begin{array}{l}\text{La loi de } Y\text{, conditionnellement à } \mathcal{F}_{T+} \text{ et en restriction}\\ \text{à } \{T<\infty\}\text{, est la mesure de Wiener, i.e. la loi du MB.}\end{array} \tag{2.2.3}$$

**Preuve.** 1) On va d'abord montrer le résultat suivant: si $T$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt fini et $s \geq 0$ et $g$ est une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{F}_{T+}$, on a:

$$\mathbb{E}\Big(1_A\ g(W_{T+s} - W_T)\Big) \ = \ \mathbb{P}(A)\ \mathbb{E}(g(W_s)). \tag{2.2.4}$$

Au vu de la proposition 2.2.8 il suffit de le montrer lorsque $T$ est un $\mathbb{F}^+$-temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_{T+}$ Par un argument de classe monotone, il suffit aussi de le montrer pour $g$ continue.

Grâce à (P13), on peut trouver une suite $T_n$ de $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, décroissant vers $T$, avec $T < T_n$, et ne prenant chacun qu'un nombre fini de valeurs. Fixons $n$, et notons $s_1 < \cdots < s_p < s_{p+1} = \infty$ les valeurs prises par $T_n$. Comme $W_{s_j+s} - W_{s_j}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{s_j}$ et de même loi que $W_s$, et comme $A \cap \{T_n = s_j\} \in \mathcal{F}_{s_j}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(1_A\ 1_{\{T_n<\infty\}}\ g(W_{T_n+s} - W_{T_n})\Big) \ &= \ \sum_{j=1}^p \mathbb{E}\Big(1_A\ 1_{\{T_n=s_j\}}\ g(W_{s_j+s} - W_{s_j})) \\
&= \ \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(A \cap \{T_n = s_j\})\ \mathbb{E}(g(W_s)) \\
&= \ \mathbb{P}(A \cap \{T_n < \infty\})\ \mathbb{E}(g(W_s)).
\end{aligned}$$

Par ailleurs $W$ est continu, donc $g(W_{T_n+s} - W_{T_n}) \to g(W_{T+s} - W_T)$ si $T < \infty$, tandis que $\{T_n < \infty\} \to \Omega$ puisque $T$ est à valeurs finies. On peut donc passer à la limite dans les deux membres extrêmes ci-dessus, ce qui donne (2.2.4).

2) Dans une seconde étape, on considère une fonction réelle $G$ sur $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ mesurable pour la tribu $\mathcal{C}$ trace de la tribu de Kolmogorov. Ainsi $G(W) = G(W)(\omega)$ est la fonction $G$ évaluée sur la trajectoire $W_.(\omega)$, et on définit de même $G(Y)$. On va alors montrer que (avec $T$ et $A$ comme dans (2.2.4)):

$$\mathbb{E}\Big(1_A\ G(Y)\Big) \ = \ \mathbb{P}(A)\ \mathbb{E}(G(W)). \tag{2.2.5}$$

Par un argument de classe monotone, il suffit de montrer ce résultat pour $G$ de la forme $G(y) = h(y(0)) \prod_{j=1}^q g_j(y(s_j) - y(s_{j-1}))$ avec des fonctions $g_j$ continues bornées et $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_q$. Dans ce cas, (2.2.5) s'écrit

$$h(0)\ \mathbb{E}\Big(1_A\ \prod_{j=1}^q g_j(W_{T+s_j} - W_{T+s_{j-1}})\Big)\ =\ h(0)\ \mathbb{P}(A)\ \prod_{j=1}^q \mathbb{E}(g_j(W_{s_j-s_{j-1}})).$$

Lorsque $q = 1$ ceci n'est autre que (2.2.4). Pour $q \geq 2$, on utilise (2.2.4) avec $T + s_{q-1}$ au lieu de $T$ et $1_A\ \prod_{j=1}^{q-1} \mathbb{E}(g_j(W_{s_j-s_{j-1}}))$ au lieu de $1_A$ pour obtenir que le membre de gauche ci-dessus pour $q$ égale le même membre de gauche pour $q-1$, multiplié par $\mathbb{E}(g_j(W_{s_q-s_{q-1}}))$. Une récurrence immédiate donne alors le résultat.

3) Ce qui précède démontre (a), et la dernière assertion provient de (a) appliqué avec $T \equiv 0$. Si maintenant $A \in \mathcal{F}_0^W$, il existe évidemment $B \in \mathcal{C}$, tel que $A = \{\omega : W(\omega) \in B\}$, et en appliquant (2.2.5) avec $T \equiv 0$ (donc $Y = W$) et $G = 1_B$, on arrive à

$$\mathbb{P}(A)\ =\ \mathbb{E}(1_A 1_A)\ =\ \mathbb{E}(1_A\ G(Y))\ =\ \mathbb{P}(A)\ \mathbb{E}(G(W))\ =\ \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(A).$$

Ainsi $\mathbb{P}(A)$, qui égale son carré, ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, d'où (b). □

## 2.3 Martingales

Dans ce paragraphe on a un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration càd $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Ainsi, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ par hypothèse, et cette propriété joue un rôle important. Un processus réel $X$ sera dit *de puissance p*ième *intégrable* si $\mathbb{E}(|X_t|^p) < \infty$ pour tout $t$, et simplement *intégrable* quand $p = 1$.

**Définition 2.3.1.** Un processus réel *adapté et intégrable* $X$ est appelé

*une martingale* si $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \ \ \forall t > s$,

*une surmartingale* si $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s \ \ \forall t > s$,

*une sousmartingale* si $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \ \ \forall t > s$.

Evidemment si $X$ est une surmartingale, alors $-X$ est une sousmartingale. Tout processus intégrable et adapté est une sousmartingale. D'après l'inégalité de Jensen, on vérifie facilement que si $f$ est une fonction réelle telle que chaque $f(X_t)$ soit intégrable, alors

$$X \text{ martingale, } f \text{ convexe} \quad \Rightarrow \quad f(X) \text{ sousmartingale,} \tag{2.3.1}$$
$$X \text{ sousmartingale, } f \text{ convexe croissante} \quad \Rightarrow \quad f(X) \text{ sousmartingale.} \tag{2.3.2}$$

En particulier:

$$X \text{ martingale de carré intégrable} \quad \Rightarrow \quad X^2 \text{ sousmartingale.} \tag{2.3.3}$$

**Exemples 2.3.2.** Le MB $W$ nous fournit une série d'exemples de martingales. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, et $W = (W^i)_{1\leq i\leq d}$ un $\mathbb{F}$-MB $d$-dimensionnel: en vertu du théorème 1.5.2, ce n'est pas une restriction que de supposer $\mathbb{F}$ càd.

a) Chaque composante $W^i$ est une martingale: c'est un processus adapté et intégrable; comme il est centré et à accroissements indépendants, on a $\mathbb{E}(W_t^i - W_s^i \mid \mathcal{F}_s) = 0$ si $s < t$.

b) $X_t = (W_t^i)^2 - t$ est une martingale: là encore, ce processus est adapté intégrable, et comme $X_t - X_s = (W_t^i - W_s^i)^2 + 2W_s^i(W_t^i - W_s^i) - (t-s)$ si $t \geq s$, on a

$$\mathbb{E}(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((W_t^i - W_s^i)^2 \mid \mathcal{F}_s) + 2W_s^i\, \mathbb{E}(W_t^i - W_s^i \mid \mathcal{F}_s) - t + s = 0.$$

c) $Y_t = W_t^i W_t^j$, si $i \neq j$: même raisonnement, en utilisant $Y_t - Y_s = (W_t^i - W_s^i)(W_t^j - W_s^j) + W_s^i(W_t^j - W_s^j) + W_s^j(W_t^i - W_s^i)$.

d) $Z_t = e^{aW_t^i - a^2t/2}$ pour tout $a$ réel: encore un processus adapté et intégrable, qui vérifie à cause de la propriété d'accroissements indépendants (pour $s \leq t$):

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_t}{Z_s} \mid \mathcal{F}_s\right) \;=\; e^{-a^2(t-s)/2}\, \mathbb{E}\left(e^{a(W_t^i - W_s^i)} \mid \mathcal{F}_s\right) \;=\; e^{-a^2(t-s)/2}\, \mathbb{E}\left(e^{aW_{t-s}^i}\right) \;=\; 1$$

d'après la forme de la transformée de Laplace d'un loi normale, et donc $\mathbb{E}(Z_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s$.

Le reste de ce paragraphe est essentiellement consacré à ce qu'on appelle la "régularisation" des martingales, c'est-à-dire à montrer qu'une martingale ou une sousmartingale admet des trajectoires càdlàg (= continues à droite, avec des limites à gauche).

**Lemme 2.3.3.** *Soit $X$ une sousmartingale. En dehors d'un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable, la fonction $r \mapsto X_r(\omega)$ retreinte aux rationnels admet des limites à droite en tout réel $t \geq 0$, et à gauche en tout réel $t > 0$.*

**Preuve.** La preuve est basée sur *l'inégalité des descentes* de Doob. Si $a < b$ on désigne par $D(a,b;I,x)$ le nombre de "descentes" de $a$ à $b$ pour la fonction $t \mapsto x(t)$ restreinte à l'ensemble $I \subset \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire le nombre défini ainsi: on pose $t_0 = 0$ et, par récurrence sur $n \geq 1$, $s_n = \inf(t \in I:\ t > t_{n-1}, x(t) > b)$ et $t_n = \inf(t \in I,\ t > s_n, x(t) < a)$. Avec ces notations, $D(a,b;I,x)$ est le plus grand entier $n$ tel que $t_n < \infty$. L'inégalité de Doob nous dit que si $I$ est fini,

$$\mathbb{E}\Big(D(a,b;I,X)\Big) \;\leq\; \frac{1}{b-a}\, \sup_{t\in I}\, \mathbb{E}\Big((X_t - b)^+\Big).$$

Comme la fonction $y \mapsto (y-b)^+$ est convexe croissante, si $X$ est une sousmartingale il en est de même de $(X-b)^+$ par (2.3.2). Par suite

$$\mathbb{E}\Big(D(a,b;I,X)\Big) \;\leq\; \frac{1}{b-a}\, \mathbb{E}\Big((X_k - b)^+\Big)$$

pour toute partie finie $I$ de $[0,k]$, où $k \in \mathbb{N}$. En appliquant ceci à une suite croissante $I_n$ de partie finies de limite $\mathbb{Q} \cap [0,k]$, et comme $D(a,b;I_n,x)$ croît vers $D(a,b;\mathbb{Q}\cap[0,k],x)$, on en déduit (par le théorème de limite monotone) que

$$\mathbb{E}\Big(D(a,b;\mathbb{Q}\cap[0,k],X)\Big) \;\leq\; \frac{1}{b-a}\, \mathbb{E}\Big((X_k - b)^+\Big) \;<\; \infty.$$

En particulier on a $D(a,b;\mathbb{Q}\cap[0,k],X)<\infty$ p.s. Par suite en dehors d'un ensemble négligeable $N\in\mathcal{F}$, les trajectoires de $X$ ont la propriété:

$$D(a,b;\mathbb{Q}\cap[0,k],x))<\infty \qquad \forall k\in\mathbb{N},\ \ \forall a,b\in\mathbb{Q},\ a<b. \tag{2.3.4}$$

Or une fonction $x$ vérifiant (2.3.4) a des limites à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$, le long des rationnels: en effet si en un $t$ il n'y a pas de limite à droite, par exemple, il y a au moins deux points limite $\alpha<\beta$ (avec possibilité de $\alpha=-\infty$ et/ou $\beta=\infty$), soit deux suites $(s_n)$ et $(t_n)$ de rationnels décroissant vers $t$ avec $x(s_n)\to\alpha$ et $x(t_n)\to\beta$, et il est facile d'en déduire que $D(a,b;\mathbb{Q}\cap[0,k],x))=\infty$ si $\alpha<a<b<\beta$ et $k>t$. □

**Lemme 2.3.4.** *Si $X$ est une sousmartingale, pour toute suite décroissante $(t_n)$ de réels positifs la suite de variables $X_{t_n}$ est uniformément intégrable.*

**Preuve.** Soit $a>0$ and $p$ un entier. Si $n\geq p$ on a $t_n\leq t_p$, donc d'après la propriété de sousmartingale:

$$\begin{aligned}\alpha_n(a) \;:=\; \mathbb{E}\Big(|X_{t_n}|\ 1_{\{|X_{t_n}|\geq a\}}\Big) &= \mathbb{E}\Big(X_{t_n}(1_{\{X_{t_n}\geq a\}}+1_{\{X_{t_n}>-a\}}-1)\Big)\\ &\leq \mathbb{E}\Big(X_{t_p}(1_{\{X_{t_n}\geq a\}}+1_{\{X_{t_n}>-a\}})\Big)-\mathbb{E}\Big(X_{t_n}\Big).\end{aligned}$$

La suite $\mathbb{E}(X_{t_n})$ décroît vers une limite finie $\alpha$; donc pour tout $\varepsilon>0$ il existe $p$ tel que pour $n\geq p$ on ait $\mathbb{E}(X_{t_n})\geq\mathbb{E}(X_{t_p})-\varepsilon$. Par suite

$$\begin{aligned}\alpha_n(a) &\leq \varepsilon+\mathbb{E}\Big(X_{t_p}(1_{\{X_{t_n}\geq a\}}+1_{\{X_{t_n}>-a\}}-1)\Big)\\ &\leq \varepsilon+\mathbb{E}\Big(|X_{t_p}|\ 1_{\{|X_{t_n}|\geq a\}}\Big)\ \leq\ \varepsilon+b\mathbb{P}(|X_{t_n}|\geq a)+\mathbb{E}\Big(|X_{t_p}|\ 1_{\{|X_{t_p}|\geq b\}}\Big)\end{aligned}$$

pour tout $b>0$. Par ailleurs on a

$$\mathbb{P}(|X_{t_n}|\geq a)\leq\frac{1}{a}\ \mathbb{E}(|X_{t_n}|)=\frac{1}{a}\ \Big(2\mathbb{E}(X^+_{t_n})-\mathbb{E}(X_{t_n})\Big)\leq\frac{1}{a}\ \Big(2\mathbb{E}(X^+_{t_p})-\alpha\Big)\leq\frac{\beta}{a}$$

où $\beta=2\mathbb{E}(X^+_{t_1})-\alpha$, car $X^+$ est encore une sousmartingale. Il vient alors pour $n\geq p=p(\varepsilon)$:

$$\alpha_n(a)\ \leq\ \varepsilon+\frac{b\beta}{a}+\mathbb{E}\Big(|X_{t_p}|\ 1_{\{|X_{t_p}|\geq b\}}\Big).$$

En faisant d'abord $b\to\infty$, puis $a\to\infty$, on voit que $\lim_{a\to\infty}\ \sup_{n\geq p}\ \alpha_n(a)\leq\varepsilon$. Comme $\varepsilon$ est arbitrairement petit, et come $\alpha_n(a)\to 0$ pour chaque $n$ fixé, on en déduit que $\lim_{a\to\infty}\ \sup_{n\geq 1}\ \alpha_n(a)=0$, d'où le résultat. □

**Théorème 2.3.5.** *Soit $X$ une sousmartingale, et sa* "régularisée à droite" *$Y$ définie par $Y_t=\limsup_{r\in\mathbb{Q},r\downarrow\downarrow t}X_r$.*

*a) $Y$ est une sousmartingale, p.s. à trajectoires càdlàg.*

*b) Il existe une modification $Y'$ de $Y$, adaptée à la filtration complétée $\mathbb{F}^{\mathbb{P}}$ et dont toutes les trajectoires sont càdlàg, et c'est une sousmartingale relativement à $\mathbb{F}^{\mathbb{P}}$.*

*c) Pour tout $t$, on a $X_t\leq Y_t$ p.s.*

*d) $Y$ est une modification de $X$ si et seulement si la fonction $t\mapsto\mathbb{E}(X_t)$ est continue à droite (c'est le cas notamment lorsque $X$ est une martingale, car alors $\mathbb{E}(X_t)=\mathbb{E}(X_0)$).*

**Preuve.** On note $N$ l'ensemble négligeable du lemme 2.3.3. En reprenant la fin de la preuve de ce lemme, on voit très facilement que pour $\omega \notin N$, la fonction $Y_.(\omega)$ est càdlàg. Par ailleurs $Y$ est clairement adapté (car $\mathbb{F}$ est càd). Si $t < s$ on prend deux suites $t_n < s_n$ de rationnels, décroissant strictement vers $t$ et $s$ respectivement. On a $X_{t_n} \to Y_t$ et $X_{s_n} \to Y_s$ en dehors de $N$, donc p.s.; comme $\mathbb{E}(X_{t_n} \mid \mathcal{F}_t) \leq \mathbb{E}(X_{s_n} \mid \mathcal{F}_t)$ (car $X$ est une sousmartingale), et comme l'espérance conditionnelle commute avec la limite p.s. de suites uniformément intégrables, au vu du lemme 2.3.4 on obtient $Y_t = \mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_t) \leq \mathbb{E}(Y_s|\mathcal{F}_t)$. Cela achève de montrer (a), tandis que (b) s'obtient en posant $Y'_t = Y_t$ sur $N^c$ et $Y'_t = 0$ pour tout $t$ (par exemple) sur $N$.

Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, on a $X_t \leq \mathbb{E}(X_{t_n} \mid \mathcal{F}_t)$, et en passant à la limite on obtient $X_t \leq Y_t$ p.s., d'où (c), ce qui entraîne aussi que $X_t = Y_t$ p.s. si et seulement si $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y_t)$. Mais comme $\mathbb{E}(X_{t_n}) \to \mathbb{E}(Y_t)$, (d) est évident. □

**Remarque 2.3.6.** 1) Rien dans la définition 2.3.1 n'impose de prendre $\mathbb{F}$ càd. Mais si on ne le fait pas, le théorème précédent doit être modifié: $Y$ est une $\mathbb{F}^+$-sousmartingale, en général non adaptée à la filtration $\mathbb{F}$.

2) En modifiant la définition de $Y$ ci-dessus, on pourrait obtenir un processus ayant les mêmes propriétés, avec en plus *toutes* ses trajectoires càd, et làg excepté en un seul temps $T$ qui en plus est p.s. infini.

**Convention importante:** Etant donné ce théorème, on apporte une (légère) restriction à la définition 2.3.1 en imposant dans toute la suite que les martingales, surmartingales et sousmartingales sont p.s. à trajectoires càdlàg.

## 2.4 Le théorème d'arrêt

Ce paragraphe est consacré à un certains nombre de propriétés, plus ou moins simples, des sousmartingales. Pour la première d'entre elles, on rappelle la convention pour $X$ d'être p.s. càdlàg: donc $\sup_{s\leq t} X_s$ et $\sup_{s\leq t} |X_s|$ sont p.s. égales à des variables $\mathcal{F}_t$-mesurables (puisqu'il suffit de prendre le sup sur $([0,t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$). Noter aussi que si $X$ est une sousmartingale, $X^+$ est aussi une sousmartingale et donc $\mathbb{E}(X_t^+)$ croît avec $t$. Il en est de même de $\mathbb{E}(|X_t|)$ si $X$ est une martingale.

**Proposition 2.4.1. (Doob)** *a) Si $X$ est une sousmartingale, on a pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $a > 0$:*

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t} X_s \geq a) \;\leq\; \frac{1}{a}\,\mathbb{E}(X_t^+), \qquad \mathbb{P}(\sup_{s\in\mathbb{R}_+} X_s \geq a) \;\leq\; \frac{1}{a}\,\sup_s\,\mathbb{E}(X_s^+). \tag{2.4.1}$$

*b) Si $X$ est une martingale, on a pour tous $t > 0$, $a > 0$, $p > 1$:*

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t} |X_s| \geq a) \;\leq\; \frac{1}{a}\,\mathbb{E}(|X_t|), \qquad \mathbb{P}(\sup_{s\in\mathbb{R}_+} |X_s| \geq a) \;\leq\; \frac{1}{a}\,\sup_s\,\mathbb{E}(|X_s|). \tag{2.4.2}$$

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |X_s|^p) \;\leq\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_t|^p), \quad \mathbb{E}(\sup_{s\in\mathbb{R}_+} |X_s|^p) \;\leq\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_s\,\mathbb{E}(|X_s|^p). \tag{2.4.3}$$

**Preuve.** Soit $I_n$ une suite d'ensemble finis, contenant $t$, et croissant vers l'ensemble $[0,t]\cap\mathbb{Q})\cup\{t\})$. Par le théorème de limite monotone il suffit de montrer les trois inégalités de gauche, avec en plus $\sup_{s\leq t}$ remplacé par $\sup_{s\in I_n}$. Mais le "processus" $(X_t)_{t\in I_n}$ est une sousmartingale ou une martingale à temps discret, pour lesquelles ces inégalités sont bien connues. Enfin les inégalités de droite s'obtiennent comme limites de celles de gauche. □

Le résultat suivant est aussi une extension des résultats analogues pour les (sous)martingales discrètes:

**Proposition 2.4.2.** *a) Si $X$ est une sousmartingale telle que* $\sup_t \mathbb{E}(X_t^+)<\infty$*, en dehors d'un ensemble négligeable on a convergence de la famille $(X_t)$ quand $t\to\infty$ vers une variable $X_\infty$ prenant ses valeurs dans $[-\infty,\infty[$.*

*b) Si $X$ est une martingale, il y a équivalence entre les trois propositions suivantes:*

*(i) la famille $(X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable (on dit alors:* la martingale est uniformément intégrable);

*(ii) $X_t$ converge vers une limite $X_\infty$ dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{P})$ quand $t\to\infty$;*

*(iii) il existe une variable intégrable $Y$ telle que $X_t=\mathbb{E}(Y\mid\mathcal{F}_t)$ pour tout $t$.*

*De plus, dans ce cas, en dehors d'un ensemble négligeable on a convergence de la famille $(X_t)$ quand $t\to\infty$ vers la variable réelle $X_\infty$.*

Comme dans le cas discret, on peut toujours prendre $Y=X_\infty$ dans (b), et à l'inverse si $X_t=\mathbb{E}(Y\mid\mathcal{F}_t)$ alors $X_\infty=\mathbb{E}(Y\mid\mathcal{F}_\infty)$.

**Preuve.** a) On peut reprendre la preuve du lemme 2.3.3: pour toute partie finie $I\subset\mathbb{R}_+$ on a si $a<b$:

$$\mathbb{E}(D(a,b;I,X))\ \leq\ \frac{1}{b-a}\ \sup_{t\in I}\mathbb{E}((X_t-b)^+)\ \leq\ \frac{1}{b-a}\ \left(|b|+\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}(X_t^+)\right).$$

En prenant une suite $I_n$ de parties finies croissant vers $\mathbb{Q}_+$, on en déduit $\mathbb{E}(D(a,b;\mathbb{Q}_+,X))$ $<\infty$. Par suite en dehors d'un ensemble négligeable on a $D(a,b;\mathbb{Q}_+,X(\omega))<\infty$ pour tous $a,b\in\mathbb{Q}$ avec $a<b$, ce qui entraine que $X_t(\omega)$ converge vers une limite $X_\infty(\omega)$ dans $[-\infty,\infty]$. Par ailleurs (2.4.1) donne $\sup_s X_s<\infty$ p.s., donc $X_\infty<\infty$ p.s.

b) (iii) $\Rightarrow$ (i) est bien connu. Si on a (i), on peut appliquer (a) à $X$ et à $-X$ pour obtenir la convergence p.s. de $X_t$ vers une limite $X_\infty$, qui est à valeurs réelles (d'où la dernière assertion), et l'uniforme intégrabilité implique la convergence dans $\mathbb{L}^1$, d'où (ii). Enfin on a $X_t=\mathbb{E}(X_s\mid\mathcal{F}_t)$ si $s>t$, donc sous (ii) on peut faire $s\to\infty$ pour obtenir $X_t=\mathbb{E}(X_\infty\mid\mathcal{F}_t)$, d'où (iii) avec $Y=X_\infty$. □

**Théorème 2.4.3. (Théorème d'arrêt - 1)** *Si $X$ est une martingale et si $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt vérifiant $S\leq T$, et aussi $T\leq K$ pour une constante $K$, on a $\mathbb{E}(X_T\mid\mathcal{F}_S)=X_S$.*

**Preuve.** Les variables $X_S$ et $X_T$ sont respectivement mesurables par rapport à $\mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_T$ (propositions 2.2.3 et 2.2.4). Par (P13) on a deux suites $(S_n)$ et $(T_n)$ de temps d'arrêt, prenant chacun un nombre fini de valeurs, et décroissant vers $S$ et $T$, et si on choisit ces suites selon la manière décrite dans (P13) on a en plus $S_n \leq T_n$, et aussi $T_n \leq K+1$ pour $n$ assez grand. Par suite, le théorème d'arrêt en temps discret (utilisé pour la restriction de $X$ à l'ensemble des temps possibles pour un couple $(S_n, T_n)$) entraîne que $X_{S_n} = \mathbb{E}(X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{S_n})$. Par suite si $A \in \mathcal{F}_S$ il vient

$$\mathbb{E}(1_A\ X_{S_n}) = \mathbb{E}(1_A\ X_{T_n})$$

(puisque $A \in \mathcal{F}_{S_n}$). On a aussi $X_{S_n} = \mathbb{E}(X_{K+1} \mid \mathcal{F}_{S_n})$, donc la suite $X_{S_n}$ est uniformément intégrable, et il en est de même de la suite $X_{T_n}$, et ces suites convergent respectivement vers $X_S$ et $X_T$: en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient $\mathbb{E}(1_A\ X_S) = \mathbb{E}(1_A\ X_T)$, d'où le résultat. $\square$

**Théorème 2.4.4. (Théorème d'arrêt - 2)** *Si $X$ est une martingale uniformément intégrable et si $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt vérifiant $S \leq T$, on a $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$* (avec la convention $X_S = X_\infty$ sur l'ensemble $\{S = \infty\}$ et de même pour $X_T$, où $X_\infty$ est la limite des $X_t$ quand $t \to \infty$).

**Preuve.** Si $S_n = \min(S, n)$ et $T_n = \min(T, n)$, le théorème précédent entraîne $X_{S_n} = \mathbb{E}(X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{S_n})$. Par suite si $A \in \mathcal{F}_S$ il vient

$$\mathbb{E}(1_A\ 1_{\{S \leq n\}}\ X_S) \ = \ \mathbb{E}(1_A\ 1_{\{S \leq n\}}\ X_{S_n}) \ = \ \mathbb{E}(1_A\ 1_{\{S \leq n\}}\ X_{T_n}).$$

Les variables étant uniformément intégrables, on peut passer à la limite en $n$:

$$\mathbb{E}(1_A\ 1_{\{S<\infty\}}\ X_S) \ = \ \mathbb{E}(1_A\ 1_{\{S<\infty\}}\ X_T).$$

Par ailleurs

$$\mathbb{E}(1_A\ 1_{\{S=\infty\}}\ X_S) \ = \ \mathbb{E}(1_A\ 1_{\{S=\infty\}}\ X_T)$$

est évident (car $X_S = X_T$ sur $\{S = \infty\}$). Le résultat est obtenu en rassemblant ces deux égalités. $\square$

**Théorème 2.4.5. (Théorème d'arrêt - 3)** *Soit $X$ est une surmartingale positive.*

*a) En dehors d'un ensemble négligeable on a convergence de la famille $(X_t)$ quand $t \to \infty$ vers une variable $X_\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.*

*b) Si $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt vérifiant $S \leq T$, on a $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) \leq X_S$* (avec la convention $X_S = X_\infty$ sur l'ensemble $\{S = \infty\}$ et de même pour $X_T$).

*c) Si $R = \inf(t :\ X_t = 0$ ou $X_{t-} = 0)$, où $X_{t-}$ désigne la limite à gauche de $X$ au temps $t$, alors $R$ est un temps d'arrêt et en dehors d'un ensemble négligeable on a $X_t = 0$ pour tout $t \geq R$ sur $\{R < \infty\}$.*

**Preuve.** a) En appliquant la proposition 2.4.2-(a) à $-X$, on obtient $X_t \to X_\infty$ p.s., avec $X_\infty$ à valeurs dans $]-\infty, \infty]$, mais comme $X \geq 0$ on a évidemment $X_\infty \geq 0$. De plus $\mathbb{E}(X_t) \leq \mathbb{E}(X_0)$, donc d'après le lemme de Fatou on a aussi $\mathbb{E}(X_\infty) \leq \mathbb{E}(X_0)$, donc en fait $X_\infty$ est p.s. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

b) On associe à $S$ et $T$ les suites $(S_n)$ et $(T_n)$ par la méthode de (P13), donc $S_n \leq T_n$ et a fortiori $S_n \leq T_m$ si $n \geq m$. D'après le théorème d'arrêt pour les surmartingales discrètes, et comme pour tout $p > 0$ les temps d'arrêt $\min(p, S_n)$ et $\min(p, T_m)$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs finies, on a $\mathbb{E}(X_{\min(p,T_m)} \mid \mathcal{F}_{\min(p,S_n)}) \leq X_{\min(p,S_n)}$. Cela revient à dire que

$$\mathbb{E}(X_{\min(p,T_m)} \mid \mathcal{F}_{S_n}) \leq X_{S_n} \qquad \text{sur l'ensemble } \{S_n \leq p\}.$$

En faisant $p \to \infty$ et en utilisant le lemme de Fatou, on arrive à $\mathbb{E}(X_{T_m} \mid \mathcal{F}_{S_n}) \leq X_{S_n}$ sur $\{S_n < \infty\}$, et cette inégalité est évidente (c'est même une égalité) sur $\{S_n = \infty\}$. Donc $\mathbb{E}(X_{T_m} \mid \mathcal{F}_{S_n}) \leq X_{S_n}$.

On fait ensuite $n \to \infty$. Les tribus $\mathcal{F}_{S_n}$ décroissent vers $\mathcal{F}_S$ et $X_{S_n} \to X_S$ et $X_{T_m}$ est intégrable, donc l'inégalité précédente passe à la limite et $\mathbb{E}(X_{T_m} \mid \mathcal{F}_S) \leq X_S$. Enfin si $m \to \infty$, une nouvelle application du lemme de Fatou entraîne $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) \leq X_S$.

c) Soit $R_n = \inf(t : X_t \leq 1/n)$, qui est un temps d'arrêt par la proposition 2.2.1. La suite $R_n$ croît vers $R$, qui est donc aussi un temps d'arrêt. Si $t \geq 0$, on a par (b):

$$\mathbb{E}\left(1_{\{R_n<\infty\}}\, X_{R+t}\right) \;\leq\; \mathbb{E}\left(1_{\{R_n<\infty\}}\, X_{R_n}\right) \;\leq\; \frac{1}{n}.$$

Comme $\{R < \infty\} \subset \liminf_n \{R_n < \infty\}$, d'après le lemme de Fatou, on en déduit que $\mathbb{E}(1_{\{R<\infty\}}\, X_{R+t}) = 0$, donc $X_{R+t} = 0$ p.s. sur $\{R < \infty\}$. Comme $X$ est p.s. càdlàg, le résultat est alors évident. $\square$

Terminons par un corollaire facile, mais très utile, des théorèmes précédents:

**Corollaire 2.4.6.** *Soit $X$ une martingale (resp. une surmartingale positive) et $T$ un temps d'arrêt. Le processus arrêté $X_t^T = X_{\min(t,T)}$ est une martingale (resp. une surmartingale positive).*

**Preuve.** Par (P16), le processus $X^T$ est adapté. Si $X$ est une martingale on a $X_t^T = \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{\min(t,T)})$ par le théorème 2.4.3, donc $X^T$ est un processus intégrable. De plus si $s \leq t$, le même théorème implique $\mathbb{E}(X_t^T \mid \mathcal{F}_{\min(s,T)}) = X_s^T$. Si maintenant $A \in \mathcal{F}_s$, on a $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_{\min(s,T)}$ par (P5) et (P6), tandis sur $A \cap \{T \leq s\}$ on a $X_t^T = X_s^T = X_T$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_A\, X_t^T) &= \mathbb{E}(1_A\, 1_{\{T>s\}}\, X_t^T) + \mathbb{E}(1_A\, 1_{\{T\leq s\}}\, X_T) \\ &= \mathbb{E}(1_A\, 1_{\{T>s\}}\, X_s^T) + \mathbb{E}(1_A\, 1_{\{T\leq s\}}\, X_T) \;=\; \mathbb{E}(1_A\, X_s^T), \end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité des martingales pour $X^T$.

Si $X$ est une surmartingale positive, on utilise le théorème 2.4.5 à la place de 2.4.3: l'intégrabilité de $X^T$ provient de $\mathbb{E}(X_t^T) = \mathbb{E}(X_{\min(t,T)}) \leq \mathbb{E}(X_0)$, et l'inégalité des surmartingales est montrée comme ci-dessus. $\square$

## 2.5 Applications au mouvement brownien

Dans ce paragraphe, nous donnons essentiellement deux applications de la théorie des martingales au MB. La première complète le théorème 1.4.1 sur le module de continuité de P. Lévy.

**Théorème 2.5.1. (Loi du logarithme itéré)** *Si $W$ est un MB, pour tout temps d'arrêt $T$ fini on a presque sûrement*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{W_{T+r}-W_T}{\sqrt{2r\log\log(1/r)}} \;=\; 1, \qquad \liminf_{r\to 0} \frac{W_{T+r}-W_T}{\sqrt{2r\log\log(1/r)}} \;=\; -1. \tag{2.5.1}$$

Si $\phi(r)=\sqrt{2r\log(1/r)}$ et $\psi(r)=\sqrt{2r\log\log(1/r)}$, on a $\psi(r)/\phi(r)\to 0$ quand $r\to 0$. Cependant (2.5.1) ne contredit pas (1.4.1), puisque (2.5.1) concerne le comportement de $W$ autour d'un temps d'arrêt fixé $T$ et l'ensemble négligeable dépend de manière essentielle de $T$, alors que dans (1.4.1) il y a en plus un sup en $T$. Noter que la fonction $\psi(r)$ n'est bien définie que pour $r<1$, et est croissante sur $]0,t_0]$ pour un certain $t_0>0$ (en fait, $t_0>1/e$).

**Preuve.** Par le théorème 2.2.10 il suffit de montrer le résultat pour $T\equiv 0$, et par symétrie il suffit de montrer que $Y=\limsup_{r\to 0} W_r/\psi(r)$ est p.s. égal à 1.

Etape 1) On va d'abord montrer que $Y\le 1$ p.s. D'après l'exemple 2.3.2-(d) le processus $M^a_t=e^{aW_t-a^2t/2}$ est une martingale pour tout $a\in\mathbb{R}$. Par suite (2.4.2) implique $\mathbb{P}(\sup_{t\le 1} M^a_t>\lambda)\le \frac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(|M^a_1|)=\frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda>0$, donc pour tous $a,b>0$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\le 1}\left(W_t-\frac{at}{2}\right)>b\right) \;=\; \mathbb{P}(\sup_{t\le 1} M^a_t>e^{ab}) \;\le\; e^{-ab}. \tag{2.5.2}$$

Soit alors $\theta,\delta\in]0,1[$. Posons $a_n=(1+\delta)\theta^{-n}\psi(\theta^n)$ et $b_n=\psi(\theta^n)/2$, de sorte que $a_nb_n=(1+\delta)\log\log(\theta^{-n})=(1+\delta)\Big(\log n-\log\log(1/\theta)\Big)$. Si on applique (2.5.2) avec $a=a_n$ et $b=b_n$, on obtient

$$\sum_{n\ge 1}\mathbb{P}\left(\sup_{t\le 1}\left(W_t-\frac{a_nt}{2}\right)>b_n\right) \;\le\; \sum_{n\ge 1} e^{-a_nb_n} \;\le\; e^{-(1+\delta)\log\log(1/\theta)}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^{1+\delta}} \;<\;\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, pour $\omega$ en dehors d'un ensemble négligeable $N$ il existe $n_0=n_0(\omega)$ tel que pour tout $n\ge n_0$ on ait $W_t\le \frac{a_nt}{2}+b_n=\frac{\psi(\theta^n)}{2}\Big(1+t(1+\delta)\theta^{-n}\Big)$ pour tout $t\le 1$. Si de plus $t\le\theta^{n-1}$, alors $W_t\le\frac{\psi(\theta^n)}{2}\Big(1+\frac{1+\delta}{\theta}\Big)$, tandis que $\psi(\theta^n)\le\psi(t)$ si $\theta^n\le t\le t_0$. En d'autres termes,

$$\theta^n\le t\le\theta^{n-1},\; n\ge n_0,\; n\ge 1+\frac{\log(1/t_0)}{\log(1/\theta)} \quad\Rightarrow\quad W_t\le\frac{\psi(t)}{2}\Big(1+\frac{1+\delta}{\theta}\Big).$$

Il en découle immédiatement que $Y\le\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1+\delta}{\theta}\Big)$ pour tous $\theta,\delta\in]0,1[$, donc $Y\le 1$ p.s.

Etape 2) Il reste à montrer $Y\ge 1$ p.s. Soit $\theta\in]0,1[$. Les événements $A_n=\{W_{\theta^n}-W_{\theta^{n+1}}\ge(1-\sqrt{\theta})\psi(\theta^n)\}$ sont indépendants. D'après (1.4.3) et le fait que $(W_{\theta^n}-W_{\theta^{n+1}})/\sqrt{\theta^n-\theta^{n+1}}$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$, si $a_n=(1-\sqrt{\theta})\psi(\theta^n)/\sqrt{\theta^n-\theta^{n+1}}$ on obtient:

$$\mathbb{P}(A_n) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,I(a_n) \;\ge\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-a_n^2/2}}{a_n+1/a_n}\,.$$

Posons $\gamma = \frac{1-\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}}$. On a $a_n^2 = 2\gamma^2(\log n + \log\log(1/\theta)) \to \infty$, donc $1/(a_n + 1/a_n) \geq 1/2a_n \geq 1/(4\gamma\sqrt{\log n})$ pour tout $n$ assez grand, auquel cas

$$\mathbb{P}(A_n) \;\geq\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-\gamma\log\log(1/\theta)}}{4\gamma}\,\frac{1}{n^\gamma\sqrt{\log n}}.$$

Comme $\gamma < 1$, il en découle que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Par le lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$. En d'autres termes, pour tout $\omega$ en dehors d'un ensemble négligeable on a $W_{\theta^n} - W_{\theta^{n+1}} \geq (1-\sqrt{\theta}\,)\psi(\theta^n)$ pour une infinité de valeurs de $n$; par ailleurs d'après l'étape 1 on sait qu'en dehors d'un ensemble négligeable on a aussi $W_{\theta^{n+1}} \geq -2\psi(\theta^{n+1})$ pour tout $n$ assez grand. Donc en dehors d'un ensemble négligeable on a pour une infinité de valeurs de $n$:

$$W_{\theta^n} \geq (1-\sqrt{\theta}\,)\psi(\theta^n) - 2\psi(\theta^{n+1}) = \psi(\theta^n)\left(1-\sqrt{\theta}-2\sqrt{\theta}\,\frac{\log(n+1)+\log\log(1/\theta)}{\log n+\log\log(1/\theta)}\right).$$

Par suite

$$Y \;\geq\; \limsup_n \frac{W_{\theta^n}}{\psi(\theta^n)} \;\geq\; 1-3\sqrt{\theta}$$

p.s. Comme $\theta$ est arbitraire dans $]0,1[$, on en déduit $Y \geq 1$ p.s. $\square$

Si $B^a = \{t:\ W_t = a\}$ est "l'ensemble de niveau $a$" du MB $W$, ce résultat a la conséquence immédiate suivante (puisque $W$ est p.s. continu): pour tout temps d'arrêt fini $T$ tel que $W_T = a$, alors en dehors d'un ensemble négligeable on a

le sous-ensemble $B^a\cap]T,\infty[$ de $\mathbb{R}_+$ admet $T$ pour point d'accumulation. (2.5.3)

**Corollaire 2.5.2.** *Si $W$ est un MB, on a presque sûrement:*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \;=\; 1, \qquad \liminf_{t\to\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \;=\; -1. \tag{2.5.4}$$

**Preuve.** Posons $X_t = tW_{1/t}$ pour $t > 0$ et $X_0 = 0$. Ce processus est gaussien centré, et si $s \leq t$ le nombre $E(X_tX_s)$ égale 0 si $s = 0$, et $stE(W_{1/t}W_{1/s}) = st(1/t) = s$ sinon. Par suite $X$ est MB-L, à trajectoires p.s. continues sauf en 0, et en particulier c'est une martingale en restriction à l'ensemble de temps $]0,\infty[$, relativement à la filtration $\mathbb{F}^X$ qu'il engendre. Par suite sa régularisée à droite $Y$, définie comme dans le théorème 2.3.5 pour tout $t \geq 0$ est p.s. à trajectoires continues, et évidemment $Y_t = X_t$ identiquement pour tout $t > 0$. Comme $Y_t \to Y_0$ p.s. et $\mathbb{E}(Y_t^2) = t \to 0$ quand $t \to 0$, on a $Y_0 = 0$ p.s.. Donc le processus $Y$ est un MB.

Il s'ensuit, par application de (2.5.1) à $Y$, qu'on a p.s.

$$\limsup_{t\to 0}\frac{tW_{1/t}}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} \;=\; 1, \qquad \liminf_{t\to 0}\frac{W_{1/t}}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} \;=\; -1,$$

et le changement de variable $t \mapsto 1/t$ donne (2.5.4). $\square$

Ce résultat donne l'ordre de grandeur de $W_t$ quand $t$ est grand, puisqu'il implique que $\limsup_{t\to\infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$ p.s. Il implique aussi la propriété suivante, à comparer à (2.5.3): En dehors d'un ensemble négligeable on a

$$\text{les parties } B^a \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ ne sont bornées pour aucun } a \in \mathbb{R}. \tag{2.5.5}$$

Cette propriété est une propriété de *récurrence*: le brownien $W$ passe une infinité de fois par *tous* les points $x$ lorsque le temps tend vers l'infini. En particulier pour tout $t$ arbitrairement grand il repasse en 0 après l'instant $t$.

Le second type d'applications concerne les temps de passage en des points. On a toujours un MB $W$, et on pose pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$T_a \;=\; \inf(t : W_t = a), \qquad S_a = \inf(t : |W_t| = a). \tag{2.5.6}$$

Ce sont des $\mathbb{F}^W$-temps d'arrêt puisque $\{a\}$ et $\{a,-a\}$ sont des fermés, et (2.5.5) implique $T_a < \infty$ p.s. pour tout $a$, et aussi $S_a < \infty$ p.s. pour tout $a \geq 0$ (et bien-sûr $T_0 = S_0 = 0$). On peut en fait expliciter la loi de ces variables aléatoires, ou au moins leurs transformées de Laplace:

**Proposition 2.5.3.** *Pour tout* $\lambda \geq 0$ *on a*

$$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(e^{-\lambda T_a}\right) \;=\; e^{-|a|\sqrt{\lambda}}, \tag{2.5.7}$$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(e^{-\lambda S_a}\right) \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}(a\sqrt{2\lambda})}. \tag{2.5.8}$$

En particulier, (2.5.7) signifie que la loi de $T_a$ est une loi stable unilatère d'indice 1/2.

**Preuve.** Par symétrie, il suffit de montrer (2.5.7) pour $a > 0$. On utilise encore le fait que $M_t^b = e^{bW_t - b^2t/2}$ est une martingale lorsque $b \geq 0$. Le processus arrêté $M^b_{\min(t,T_a)}$ prend ses valeurs dans $[0, e^{ba}]$, donc le théorème d'arrêt 2.4.4 nous donne $\mathbb{E}(M^b_{T_a}) = \mathbb{E}(M^b_0) = 1$. Comme $M^b_{T_a} = e^{ba - b^2T_a/2}$, on en déduit $\mathbb{E}(e^{-b^2T_a/2}) = e^{-ba}$, et il suffit de poser $b = \sqrt{2\lambda}$ pour obtenir (2.5.7).

De la même manière, $N^b = \frac{M^b + M^{-b}}{2}$ est une martingale et $N^b_{\min(t,S_a)}$ prend ses valeurs dans $[0, e^{ba}]$, donc $\mathbb{E}(N^b_{S_a}) = 1$. On a aussi $N^b_t = e^{-b^2t/2}\mathrm{ch}(bW_t)$ et $\mathrm{ch}(bW_{S_a}) = \mathrm{ch}(ba)$, de sorte que $\mathbb{E}(e^{-b^2S_a/2}) = 1/\mathrm{ch}(ba)$ et on obtient (2.5.8) en posant encore $b = \sqrt{2\lambda}$. □

**Proposition 2.5.4.** *Si* $a < 0 < b$, *on a*

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) \;=\; \frac{b}{b-a}, \qquad \mathbb{P}(T_a > T_b) \;=\; \frac{-a}{b-a}. \tag{2.5.9}$$

**Preuve.** Comme $T_a = T_b$ entraine $T_a = \infty$, on a $\mathbb{P}(T_a < T_b) + \mathbb{P}(T_a > T_b) = 1$. Comme le processus $W_{\min(t,T_a,T_b)}$ est une martingale bornée, le théorème d'arrêt entraine $a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b\mathbb{P}(T_a > T_b) = \mathbb{E}(W_{\min(T_a,T_b)}) = 0$, et (2.5.9) est alors évident. □

# Chapitre 3

# Intégrales stochastiques

Le problème abordé dans ce chapitre est le suivant: on se donne, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeures réelles. On veut donner un sens aux intégrales $\int_0^t H_s \, dX_s$, pour des processus $H$ "raisonnables" (mesurables, pas trop grands,...).

Si $X$ est à variation finie (i.e., chaque trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à variation finie sur tout intervalle borné), l'intégrale précédente est évidemment à prendre au sens de Stieltjes, et tout est facile. Les problèmes commencent quand on veut prendre pour $X$ le mouvement brownien, ou une martingale plus générale.

## 3.1 Les processus à variation finie

Le contenu de ce paragraphe est en un certain sens totalement élémentaire, la principale difficulté venant de ce qu'on tient à étudier le cadre probabiliste, et notamment l'influence d'une filtration.

### 3.1.1 Rappels sur les fonctions à variation finie

Dans cette partie il n'y a pas de probabilité. Néanmoins les fonctions sur $\mathbb{R}_+$ qu'on va considérer seront notées comme des processus, par exemple $A_t$, bien que $\omega$ soit absent.

On note $\mathbb{A}^+$ l'ensemble des fonctions croissantes càd nulles en 0, et par $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions qui sont différences de deux fonctions de $\mathbb{A}^+$. L'ensemble $\mathbb{A}$ s'appelle l'ensemble des fonctions *à variation finie*, sous-entendu: sur chaque compact.

Toute fonction $A \in \mathbb{A}^+$ est la fonction de répartition d'une (unique) mesure de Radon $\mu$ (i.e. donnant une masse finie à tout compact) positive sur $\mathbb{R}_+$, ne chargeant pas $\{0\}$, c'est-à-dire que

$$A_t = \mu([0, t]) \tag{3.1.1}$$

pour tout $t$. Réciproquement cette formule associe une fonction $A \in \mathbb{A}$ à toute mesure $\mu$ ayant les propriétés ci-dessus. Si $A = B - C$, avec $B, C \in \mathbb{A}$, les fonctions $B$ et $C$ sont associées à deux mesures positives $\nu$ et $\eta$, donc $A$ est encore associée à la mesure $\mu = \nu - \eta$

par la formule (3.1.1). La mesure $\mu$ est maintenant une mesure de Radon *signée*, et comme ci-dessus on associe à une telle mesure une fonction $A \in \mathbb{A}$.

La décomposition $A = B - C$ (resp. $\mu = \nu - \eta$) ci-dessus n'est évidemment pas unique, on peut toujours ajouter à $B$ et $C$ (resp. à $\nu$ et $\eta$) la même fonction $D \in \mathbb{A}^+$ (resp. la même mesure positive $\rho$). Toutefois il y a une décomposition "minimale", d'habitude donnée pour les mesures, et qui correspond à la *décomposition de Jordan-Hahn.* Plus précisément si $\mu$ est une mesure de Radon signée (ne chargeant pas $\{0\}$, ici) il existe deux mesures de Radon positives $\mu^+$ et $\mu^-$, telles que

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad \mu = \nu - \eta \text{ avec } \nu,\, \eta \text{ mesures positives } \Rightarrow\ \nu \geq \mu^+, \quad \eta \geq \mu^-, \tag{3.1.2}$$

et cette décomposition est unique. De plus on a

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- \text{ est la plus petite mesure positive telle que } |\mu| \geq \mu,\ |\mu| \geq -\mu. \tag{3.1.3}$$

Ainsi, on a une décomposition analogue à la décomposition d'une fonction réelle en "partie positive" et "partie négative". On a une autre caractérisation des deux mesures positives $\mu^+$ et $\mu^-$ qui, elle, est spécifique aux mesures:

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad \text{il existe un borélien } G \text{ tel que } \mu^+(G) = 0, \quad \mu^-(G^c) = 0. \tag{3.1.4}$$

Enfin, les mesures $\mu$, $\mu^+$ et $\mu^-$ sont absolument continues par rapport à $|\mu|$, avec

$$\mu^+ \;=\; 1_{G^c} \bullet |\mu|, \qquad \mu^- \;=\; 1_G \bullet |\mu|, \qquad \mu \;=\; (1_{G^c} - 1_G) \bullet |\mu|. \tag{3.1.5}$$

Revenons aux fonctions à variation finie. En utilisant la correspondance entre fonctions de $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}^+$) et mesures de Radon ne chargeant pas $\{0\}$ (resp. et positives), on voit que si $A \in \mathbb{A}$ il existe une décomposition

$$A = A(+) - A(-), \quad A = B - C \text{ avec } B, C \in \mathbb{A}^+ \ \Rightarrow\ B - A(+) \in \mathbb{A}^+, \quad C - A(-) \in \mathbb{A}^+, \tag{3.1.6}$$

et cette décomposition est unique. De plus la fonction $V(A) = A(+) + A(-)$, appelée *fonction variation* de $A$, vérifie

$$V(A) \text{ est la plus petite fonction de } \mathbb{A}^+ \text{ telle que } V(A) - A \in \mathbb{A}^+,\ V(A) + A \in \mathbb{A}^+. \tag{3.1.7}$$

On utilise les notations $A(+)$ et $A(-)$ plutôt que $A^+$ et $A^-$, pour éviter toute confusion avec les parties positive et négative de $A$. Bien entendu, si $A$ est la fonction de répartition de $\mu$, alors $A(+)$, $A(-)$ et $V(A)$ sont les fonctions de répartition de $\mu^+$, $\mu^-$ et $|\mu|$.

Terminons avec un lemme qui jouera un rôle fondamental dans la suite, et pour lequel on introduit des notations analogues à celles du théorème 1.5.1. On fixe $t > 0$, et pour chaque $n$ on a une suite finie $t(n,0) = 0 < t(n,1) < \cdots < t(n,p_n) = t$. Le "pas" de la subdivision $I_n = \{t(n,i) : 0 \leq i \leq p_n\}$ est le nombre $m_n = \sup_{j=1}^{p_n}(t(n,j) - t(n,j-1))$. Avec ces notations, on pose

$$V(A,n)_t \;=\; \sum_{j=1}^{p_n} |A_{t(n,j)} - A_{t(n,j-1)}|. \tag{3.1.8}$$

(Bien entendu ces quantités dépendent des subdivisions choisies, et pas seulement de $n$, $t$ et $A$; on appelle l'expression précédente la "variation approchée" sur $[0,t]$, à comparer avec la variation quadratique approchée définie en (1.5.1)). Le lecteur reconnaitra dans la preuve suivante l'une des méthodes de construction de la dérivée de Radon-Nikodym.

**Lemme 3.1.1.** *Si $A \in \mathbb{A}$ on a $V(A,n)_t \leq V(A)_t$. Si de plus $m_n \to 0$ et si les subdivisions sont de plus en plus fines (i.e. $I_n \subset I_{n+1}$), alors quand $n \to \infty$ on a*

$$V(A,n)_t \;\to\; V(A)_t. \tag{3.1.9}$$

**Preuve.** On note comme ci-dessus $\mu$ et $|\mu|$ les mesures de fonctions de répartition respectives $A$ et $V(A)$, et $a = |\mu|(]0,t])$. Si $a = 0$ tout est évident (car $A_s = 0$ pour tout $s \leq t$), donc on suppose que $a > 0$ et on considère la probabilité $\nu$ sur $]0,t]$ muni de la tribu $\mathcal{G} = \mathcal{B}(]0,t])$ qui est la restriction de $|\mu|$ à $]0,t]$, divisée par $a$. Enfin, on pose $B(n,i) = ]t(n,i-1), t(n,i)]$ et on note $\mathcal{G}_n$ la tribu (finie) de $]0,t]$ engendrée par les $B(n,i)$ pour $i \leq p_n$.

Comme les mesures $|\mu| - \mu$ et $|\mu| + \mu$ sont positives, on a

$$V(A,n)_t \;=\; \sum_{j=1}^{p_n} |\mu(B(n,i))| \;\leq\; \sum_{j=1}^{p_n} |\mu|(B(n,i)) \;=\; |\mu|(]0,t]) \;=\; V(A)_t.$$

Cela prouve le premier résultat. Pour (3.1.9) on suppose que $I_n \subset I_{n+1}$, ce qui implique $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$, et aussi que $m_n \to 0$, ce qui implique que la tribu engendrée par les $\mathcal{G}_n$ égale $\mathcal{G}$. Définissons alors les fonctions $X_n$ sur $]0,t]$ par

$$X_n(s) \;=\; \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\mu(B(n,i))}{|\mu|(B(n,i))}\, 1_{B(n,i)}(s).$$

$X_n$ est $\mathcal{G}_n$-mesurable (car constante sur les atomes $B(n,i)$ de $\mathcal{G}_n$), et comme $B(n,i)$ est la réunion (finie disjointe) des $B(n+1,j)$ pour un ensemble fini $J(n,i)$ d'entiers $j$ consécutifs il vient

$$\begin{aligned}
\int_{B(n,i)} X_{n+1}(s)\nu(ds) \;&=\; \sum_{j\in J(n,i)} \int_{B(n+1,j)} X_{n+1}(s)\nu(ds) \\
&=\; \sum_{j\in J(n,i)} \frac{\mu(B(n+1,j))}{|\mu|(B(n+1,j))}\, \nu(B(n+1,j)) \\
&=\; \frac{1}{a} \sum_{j\in J(n,i)} \mu(B(n+1,j)) \;=\; \frac{1}{a}\, \mu(B(n,i)) \\
&=\; \int_{B(n,i)} X_n(s)\nu(ds).
\end{aligned}$$

En d'autres termes, la suite $(X_n)$ est une martingale, bornée par 1 par construction, sur l'espace probabilisé $(]0,t], \mathcal{G}, \nu)$, relativement à la filtration $(\mathcal{G}_n)$. Elle converge donc $\nu$-p.s. et dans $\mathbb{L}^1(\nu)$ vers une limite $X_\infty$. Par ailleurs il est évident que $\int_B X_n(s)\nu(ds) = \frac{\mu(B)}{a}$ lorsque $B = B(n,i)$, donc cette relation reste vraie par additivité pour tout $B \in$

$\mathcal{G}_n$. Comme si $B \in \mathcal{G}$ on a $\int_B X_n(s)\nu(ds) \to \int_B X_\infty(s)\nu(ds)$, on en déduit que $\mu(B) = a\int_B X_\infty(s)\nu(ds) = \int_B X_\infty(s)|\mu|(ds)$ pour tout $B \in \mathcal{G}_n$ pour un $n$, donc aussi pour tout $B \in \mathcal{G}$ par un argument de classe monotone.

Ainsi, $X_\infty$ est la densité de Radon-Nikodym de la mesure $\mu$ par rapport à la mesure $|\mu|$, en restriction à $]0,t]$. Mais (3.1.5) implique alors que $|X_\infty| = 1$ $\nu$-p.s. On en déduit que $|X_n| \to 1$ $\nu$-p.s., donc aussi dans $\mathbb{L}^1(\nu)$. Il reste à remarquer que $\int |X_n(s)|\nu(ds) = \frac{1}{a}\, V(A,n)_t$ (vérification immédiate), donc $V(A,n)_t \to a = V(A)_t$. $\square$

**Remarque 3.1.2.** Ce résultat montre en particulier que si $A \in \mathbb{A}$, alors $V(A)_t$ est le sup des $V(A,n)_t$, lorsqu'on prend des subdivisions (finies) quelconques $I_n$ de $[0,t]$. On peut montrer une réciproque (nous ne le ferons pas ici): si $A$ est une fonction quelconque, càd et nulle en 0, on peut définir $V(A,n)_t$ pour toute subdivision $I_n$. Si alors le sup des $V(A,n)_t$, pris sur toutes les subdivisions possibles, est fini, alors $A$ est à variation finie sur $[0,t]$ (= la fonction "arrêtée" $s \mapsto A_{\min(s,t)}$ est dans $\mathbb{A}$). C'est de cette propriété que vient la terminologie "à variation finie"). $\square$

### 3.1.2 Processus adaptés à variation finie

On se donne maintenant un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$, avec une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *càd*. Introduisons les notations suivantes:

• On note $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des processus adaptés réels $A$ à trajectoires croissantes càd et avec $A_0 = 0$.

• On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des différences de deux processus de $\mathcal{A}^+$.

• On note $\mathcal{A}^c$ et $\mathcal{A}^{c+}$ les ensembles de processus dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^+$ respectivement, et à trajectoires continues.

En d'autres termes, $\mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}$ sont les ensembles de processus adaptés dont les trajectoires sont dans $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^+$ respectivement. Donc si $A \in \mathcal{A}$ on lui associe les "processus" $A(+)$, $A(-)$ et $V(A)$ (ce dernier est le *processus variation* de $A$), définis "trajectoriellement" (pour chaque $\omega$): par exemple, $V(A)(\omega) = V(A(\omega))$. De même (3.1.8) définit maintenant une variable aléatoire.

**Proposition 3.1.3.** *Si* $A \in \mathcal{A}$ *les processus* $A(+)$, $A(-)$ *et* $V(A)$ *sont dans* $\mathcal{A}^+$.

**Preuve.** Les processus $A(+)$, $A(-)$ et $V(A)$ sont à trajectoires croissantes càd nulles en 0. Comme les $V(A,n)_t$ sont clairement $\mathcal{F}_t$-mesurables, il en est de même de $V(A)_t$ qui en est la limite pour chaque $\omega$, par (3.1.9), donc aussi de $A(+)_t = \frac{1}{2}\,(A_t + V(A)_t)$ et de $A(-)_t = A(+)_t - A_t$. $\square$

Passons maintenant aux intégrales. Si $A \in \mathcal{A}$ et si $H = (H_t)$ est un processus réel, on pose

$$H \bullet A_t(\omega) \ = \ \int_0^t H_s(\omega)\, dA_s(\omega) \tag{3.1.10}$$

dès que $s \mapsto H_s(\omega)$ est borélienne et "pas trop grande", au sens où

$$\int_0^t |H_s(\omega)|\, dV(A)_s(\omega) \ < \ \infty. \tag{3.1.11}$$

Il s'agit ici d'intégrales de Stieltjes usuelles, c'est-à-dire des intégrales de $s \mapsto H_s(\omega)$ ou $s \mapsto |H_s(\omega)|$ par rapport aux mesures sur $\mathbb{R}_+$ dont les fonction de répartition sont $t \mapsto A_t(\omega)$ ou $t \mapsto V(A)_t(\omega)$, et les bornes signifient qu'on intègre sur l'intervalle $]0,t]$, ce qui est la même chose qu'intégrer sur $[0,t]$ puisque $A_0 = V(A)_0 = 0$, mais pas sur $]0,t[$ puisque $A$ peut être discontinue. Noter en particulier que $1 \bullet A_t = A_t$.

**Proposition 3.1.4.** *Si $A \in \mathcal{A}$ et si $H$ est un processus progressivement mesurable, tel que (3.1.11) soit satisfaite pour tous $t$ et $\omega$, la formule (3.1.10) définit un processus $H \bullet A$ qui appartient également à $\mathcal{A}$ (et à $\mathcal{A}^+$ si $H \geq 0$ et $A \in \mathcal{A}^+$).*

**Preuve.** Exactement comme dans la proposition précédente, la seule chose qui n'est pas évidente est que $H \bullet A_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable (noter que $t \mapsto H_t(\omega)$ est borélienne, par la proposition 2.2.3). On fixe $t$. Le nombre $H \bullet A_t(\omega)$ est l'intégrale de $s \mapsto H_s(\omega)$ par rapport à la mesure $\mu_t(\omega, ds)$ qui est la restriction à $[0,t]$ de la mesure $\mu(\omega, ds)$ associée à la fonction $A(\omega) \in \mathbb{A}$ par (3.1.1). Mais $\mu_t(\omega, ds)$ admet la fonction de répartition $s \mapsto A_{\min(s,t)}(\omega)$, qui en tant que fonction de $\omega$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, par suite $\mu_t$ est en fait une "mesure de transition" de $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ dans $([0,t], \mathcal{B}([0,t]))$, et par un résultat classique (extension du théorème de Fubini) sur les mesures de transition l'intégrale $\int K_s(\omega)\mu_t(\omega, ds)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable si $K$ est une fonction $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-mesurable sur $\Omega \times [0,t]$. Cette dernière propriété étant satisfaite par $K = H$ puisque $H$ est progressivement mesurable, on a le résultat. □

Terminons ce paragraphe en montrant qu'un MB $W$, bien qu'à trajectoires continues nulles en 0, n'est pas dans $\mathcal{A}$ (et c'est même bien pire !):

**Proposition 3.1.5.** *Presque toutes les trajectoires du MB sont à variation infinie sur tout intervalle $[0,t]$ (avec $t > 0$).*

**Preuve.** Comme dans la preuve du théorème 1.5.1, on peut trouver une sous-suite telle que $S(n)_t \to t$ p.s., ce qui veut dire en fait qu'il existe une suite de subdivisions $I_n$ de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, telle qu'en dehors d'un négligeable $N$ on ait $S(n)_t \to t$. Par ailleurs, on a aussi

$$S(n)_t \;=\; \sum_{i=1}^{p_n} (W_{t(n,i)} - W_{t(n,i-1)})^2 \;\leq\; \varepsilon_n \sum_{i=1}^{p_n} |W_{t(n,i)} - W_{t(n,i-1)}| \;\leq\; \varepsilon_n V(W,n)_t,$$

où $\varepsilon_n$ désigne le module de continuité de la fonction $W$ sur l'intervalle $[0,t]$, pour le pas $m_n$.

Comme $m_n \to 0$ on a $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\omega) \to 0$ pour tout $\omega$. Si alors pour un $\omega$ la trajectoire de $W$ est à variation finie sur $[0,t]$, on a $V(W(\omega),n)_t \leq V(W(\omega))_t < \infty$, et par suite $S(n)_t(\omega) \to 0$. Par suite $\omega \in N$, et on a le résultat. □

## 3.2 Variation quadratique des martingales continues

L'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ est fixé, avec $\mathbb{F}$ càd. On rappelle la notation $X^T$ pour un processus $X$ arrêté au temps d'arrêt $T$: $X^T_t = X_{\min(t,T)}$.

**Définition 3.2.1.** On appelle *martingale locale* un processus $M$ pour lequel il existe une suite $(T_n)$ de temps d'arrêt croissant p.s. vers $+\infty$, telle que chaque processus arrêté $X^{T_n}$ soit une martingale uniformément intégrable. □

La suite $(T_n)$ ci-dessus s'appelle une *suite localisante*, et elle n'est pas évidemment pas unique; en effet si $M$ est une martingale uniformément intégrable et si $T$ est un temps d'arrêt, d'après le théorème d'arrêt 2.4.4 $M^T$ est aussi une martingale uniformément intégrable.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des martingales uniformément intégrables, et $\mathcal{M}_{loc}$ l'ensemble des martingales locales. $\mathcal{M}^c$ et $\mathcal{M}^c_{loc}$ sont les ensembles de processus appartenant à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_{loc}$ respectivement, et dont les trajectoires sont p.s. continues.

Voici une liste de propriétés élémentaires:

**(Q1):** Toute martingale est dans $\mathcal{M}_{loc}$ [prendre la suite localisante $T_n \equiv n$].

**(Q2):** Si $M \in \mathcal{M}_{loc}$ est localisée par $(T_n)$, elle l'est aussi par toute suite $S_n$ de temps d'arrêt croissant vers $\infty$ et telle que $S_n \leq T_n$.

**(Q3):** $\mathcal{M}_{loc}$ est aussi l'ensemble des processus $M$ pour lesquels il existe une suite localisante $(T_n)$ telle que chaque $M^{T_n}$ soit une martingale (pas forcément dans $\mathcal{M}$).

**(Q4):** L'ensemble des processus $M$ pour lesquels il existe une suite localisante $(T_n)$ telle que chaque $M^{T_n}$ soit dans $\mathcal{M}_{loc}$ est exactement $\mathcal{M}_{loc}$.

**(Q5):** Les ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_{loc}$ sont des espaces vectoriels, "stables par arrêt" (i.e. si $M$ est dans l'ensemble et $T$ est un temps d'arrêt, alors $M^T$ est aussi dans l'ensemble).

On a aussi les deux résultats simples suivants que, en raison de leur importance, on énonce sous forme de propositions:

**Proposition 3.2.2.** *Toute martingale locale positive est une surmartingale.*

**Preuve.** Soit $M$ une martingale locale positive, avec une suite localisante $(T_n)$. Si $s \leq t$ on a donc $\mathbb{E}(M_{\min(t,T_n)} \mid \mathcal{F}_s) = M_{\min(s,T_n)}$. Lorsque $n \to \infty$ on a $M_{\min(t,T_n)} \to M_t$ et $M_{\min(s,T_n)} \to M_s$, donc le lemme de Fatou pour les espérances conditionnelles implique $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$, d'où l'inégalité des surmartingales. On a aussi $\mathbb{E}(M_{\min(t,T_n)}) = \mathbb{E}(M_0)$, donc par Fatou $\mathbb{E}(M_t) \leq \mathbb{E}(M_0) < \infty$. □

**Proposition 3.2.3.** *Soit $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$.*

*a) Si $M_0$ est une variable bornée, il existe une suite localisante $(T_n)$ telle que chaque $M^{T_n}$ soit un processus borné.*

*b) Si de plus $M \in \mathcal{A}$, presque toutes les trajectoires de $M$ sont identiquement nulles.*

(b) est à comparer avec la proposition 3.1.5; on pourrait d'ailleurs montrer la propriété suivante pour toute $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$: pour presque tout $\omega$, si la trajectoire $t \mapsto M_t(\omega)$ est à variation finie alors elle est constante (égale à $M_0(\omega)$);,c'est essentiellement la même chose que la proposition 3.1.5, dans un cadre bien plus général.

**Preuve.** a) Soit $(S_n)$ une suite localisante pour $M$, et $R_n = \inf(t : |M_t| \geq n)$, ce qui définit une suite croissante de temps d'arrêt de limite infinie. Donc $T_n = \min(R_n, S_n)$ est encore une suite localisante pour $M$ (cf. (Q2)). Il découle trivialement de la continuité des trajectoires que $|M_t^{R_n}| \leq \max(n, |M_0|)$ pour tout $t$, donc a fortiori $|M_t^{T_n}| \leq \max(n, |M_0|)$, de sorte que si $|M_0(\omega)| \leq K$ pour une constante $K$ on a $|M^{T_n}| \leq \max(K, n)$.

b) Si $M \in \mathcal{A}$ on a $M_0 = 0$. Donc en vertu de (a) il existe une suite localisante $(T_n)$ telle que les processus $M^{T_n}$ soient bornés. On peut même faire mieux: en remplaçant $R_n$ par $R'_n = \inf(t : V(M)_t \geq n)$ (qui vérifie évidemment $R'_n \leq R_n$), on voit que les processus $V(M)^{T_n}$ sont aussi bornés.

Par suite, il suffit de montrer le résultat si en plus $M$ et $V(M)$ sont bornés. Soit $t > 0$. Utilisons les notations du lemme 3.1.1, avec une suite de subdivision $I_n = \{0 = t(n, 0) < \cdots < t(n, p_n) = t\}$ de pas $m_n \to 0$. On a en utilisant le même argument que dans la preuve de la proposition 3.1.5, plus la propriété de martingale de $M$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{p_n}(M^2_{t(n,i)} - M^2_{t(n,i-1)})\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{p_n}\Big((M_{t(n,i)} - M_{t(n,i-1)})^2 + 2M_{t(n,i-1)}(M_{t(n,i)} - M_{t(n,i-1)})\Big)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t(n,i)} - M_{t(n,i-1)})^2\right) \qquad (3.2.1) \\
&\leq \mathbb{E}\Big(V(M,n)_t \sup_{1 \leq i \leq p_n} |M_{t(n,i)} - M_{t(n,i-1)}|\Big). \qquad (3.2.2)
\end{aligned}$$

Comme $M$ est continu borné et $m_n \to 0$, $\sup_{1 \leq i \leq p_n} |M_{t(n,i)} - M_{t(n,i-1)}| \to 0$ tout en restant borné, tandis que $V(M, n)_t \leq V(MP)_t$ qui est également borné. Donc (3.2.2) tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc $E(M_t^2) = 0$. Par suite on a $M_t = 0$ p.s., et comme $t$ est arbitraire et $M$ est continu on a clairement le résultat. □

Nous arrivons au résultat principal de ce paragraphe, qui généralise le théorème 1.5.1 à toutes les martingales continues. On utilise les mêmes notations: une suite de subdivisions $(t(n, i) : i \geq 0)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}_+$ avec $t(n, 0) = 0$ et $t(n, i) \to \infty$ quand $i \to \infty$, de pas $m_n(t)$ tendant vers 0. Comme dans (1.5.1), on associe à tout processus $M$ les processus "variation quadratique approchée" suivants:

$$S(M, n)_t = \sum_{i \geq 1,\, t(n,i) \leq t} (M_{t(n,i)} - M_{t(n,i-1)})^2. \qquad (3.2.3)$$

Rappelons aussi (cf. la fin du paragraphe 1.1) que deux processus $X$ et $Y$ sont indistinguables si l'ensemble des $\omega$ pour lesquels leurs trajectoires diffèrent est négligeable.

**Théorème 3.2.4. (Meyer)** *Soit $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. Il existe un processus continu dans $\mathcal{A}^+$, unique à l'indistinguabilité près, noté $\langle M, M \rangle$, et tel que $M^2 - \langle M, M \rangle - M_0^2$ soit une martingale locale.*

*De plus:*

*a) Pour tout temps d'arrêt $T$ on a $\langle M^T, M^T\rangle = \langle M, M\rangle^T$.*

*b) On a $\langle M, M\rangle = \langle M - M_0, M - M_0\rangle$.*

*c) Pour toute suite de subdivisions de pas tendant vers $0$, on a*

$$S(M,n)_t \ \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow}\ \langle M, M\rangle_t \tag{3.2.4}$$

*et cette convergence a même lieu, en probabilité, uniformément en $t$ sur tout compact.*

Le processus $\langle M, M\rangle$ s'appelle la *variation quadratique* de $M$ (ou parfois, le "crochet oblique"). Bien entendu, les égalités dans (a) et (b) sont "à l'indistinguabilité près" (c'est comme pour l'espérance conditionnelle: quand on écrit $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) = Z$, cette égalité est "à un ensemble négligeable près", ce qu'on n'écrit jamais !).

On commence par un lemme technique. Soit $(s_n)$ une suite strictement croissante, tendant vers l'infini, avec $s_0 = 0$. Pour $t \geq 0$ on pose $i_t = \sup(i :\ s_i \leq t)$, et

$$S'(M)_t \ = \ \sum_{i=1}^{i_t} (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})^2 + (M_t - M_{s_{i_t}})^2, \tag{3.2.5}$$

qui est une formule analogue à (3.2.3), sauf qu'on a ajouté un terme supplémentaire assurant la continuité en $t$, lorsque $M$ est continu. On remarquera toutefois que le lemme suivant est aussi valide quand $M$ est seulement càdlàg.

**Lemme 3.2.5.** *Soit $M$ une martingale nulle en $0$ et vérifiant $\sup_{s\leq t,\omega\in\Omega} |M_s(\omega)| \leq K_t$ où les $K_t$ sont des constantes. Le processus $Y = M^2 - S'(M)$ est une martingale nulle en $0$, et on a*

$$\mathbb{E}(S'(M)_t^2) \ \leq\ 8K_t^2 \mathbb{E}(M_t^2) \ \leq\ 8K_t^4. \tag{3.2.6}$$

**Preuve.** Le processus $Y$ est càdlàg, adapté, nul en 0, borné sur $[0, t]$ pour tout $t$. Si $s_i \leq s < t \leq s_{i+1}$ on a

$$Y_t - Y_s \ = \ M_t^2 - M_s^2 - (M_t - M_{s_i})^2 + (M_s - M_{s_i})^2 \ = \ 2M_{s_i}(M_t - M_s),$$

de sorte que $\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = Y_s$. Donc si $s_j \leq s < s_{j+1} \leq s_i < t \leq s_{i+1}$ on a $\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y_{s_i}|\mathcal{F}_s)$, qui vaut (par récurrence descendante sur $k$) $\mathbb{E}(Y_{t_k}|\mathcal{F}_s)$ pour $j+1 \leq k < i$, donc finalement (en prenant $k = j+1$) $\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = Y_s$, d'où la première assertion.

Pour (3.2.6) on fixe $t > 0$. On ne change pas $S'(M)_t$ en ajoutant à la subdivision $(s_i)$ le point $t$ s'il n'y est pas déjà, ce qui revient à supposer que $s_p = t$ si $p = i_t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S'(M)_t^2 \ &= \ \sum_{i=1}^{p} (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})^4 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq p} (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})^2 (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})^2 \\ &= \ \sum_{i=1}^{p} (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})^4 + 2 \sum_{i=1}^{p-1} (S'(M)_{s_i} - S'(M)_{s_{i-1}})\ (S'(M)_t - S'(M)_{s_i}) \end{aligned}$$

Comme $Y$ est une martingale, $\mathbb{E}(S'(M)_t - S'(M)_{s_i} \mid \mathcal{F}_{s_i}) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_{s_i}^2 \mid \mathcal{F}_{s_i})$. En utilisant $|M| \leq K$, on obtient alors

$$\mathbb{E}(S'(M)_t^2) \ \leq\ \mathbb{E}\left(4K^2 \sum_{i=1}^{p} (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})^2 + 2 \sum_{i=1}^{p-1} (S'(M)_{s_i} - S'(M)_{s_{i-1}})(M_t^2 - M_{s_i}^2)\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(4K^2 S'(M)_t + 4K^2 \sum_{i=1}^{p-1} (S'(M)_{s_i} - S'(M)_{s_{i-1}})\right) \leq 8K^2\, \mathbb{E}(S'(M)_t),$$

et une nouvelle application du fait que $Y$ est une martingale avec $Y_0 = 0$ donne (3.2.6). $\square$

**Preuve du théorème.** 1) Si $A$ et $B$ sont deux processus continus dans $\mathcal{A}^+$, tels que $M^2 - A$ et $M^2 - B$ soient des martingales locales, alors $A - B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}^c_{loc}$, donc $A$ et $B$ sont indistinguables par la proposition 3.2.3: on a donc l'unicité de $\langle M, M\rangle$.

2) Supposons l'existence de $\langle M, M\rangle$ et la propriété (3.2.4) acquises pour toute $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ vérifiant en outre $M_0 = 0$. Si maintenant $M$ est quelconque dans $\mathcal{M}^c_{loc}$, le processus $M^2 - (M - M_0)^2 = 2M_0 M - M_0^2$ est aussi dans $\mathcal{M}^c_{loc}$. Par suite si on pose $\langle M, M\rangle = \langle M - M_0, M - M_0\rangle$ il est clair que $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale locale, et comme $S(M, n) = S(M - M_0, n)$ par construction on a (3.2.4) pour $M$. Il suffit donc de montrer les résultats quand $M_0 = 0$, et (b) sera satisfaite.

3) Supposons l'existence de $\langle M, M\rangle$ acquise pour une $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. Si $T$ est un temps d'arrêt, alors $(M^2 - \langle M, M\rangle)^T = (M^T)^2 - \langle M, M\rangle^T$ est dans $\mathcal{M}_{loc}$ par (Q5), et évidemment $\langle M, M\rangle^T$ est un processus continu dans $\mathcal{A}^+$, donc l'unicité entraine (a).

4) Supposons l'existence de $\langle M, M\rangle$ et (c) acquis pour toute $M \in \mathcal{M}^c$ bornée nulle en 0. Soit maintenant $M$ quelconque dans $\mathcal{M}^c_{loc}$, avec $M_0 = 0$, et $(T_n)$ une suite localisante pour $M$, telle que $|M^{T_n}| \leq n$ identiquement. Comme $(M^{T_{n+1}})^{T_n} = M^{T_n}$, (a) implique que $\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle = \langle M^{T_{n+1}}, M^{T_{n+1}}\rangle^{T_n}$. La formule

$$\langle M, M\rangle_t \ = \ \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_t \quad \text{sur l'ensemble } \ \{t \leq T_n\}$$

définit alors sans ambiguité un processus continu $\langle M, M\rangle$ dans $\mathcal{A}^+$, qui vérifie en outre $\langle M, M\rangle^{T_n} = \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle$ (toutes ces égalités sont à une indistinguabilité près). Par suite $(M^2 - \langle M, M\rangle)^{T_n} = (M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle \in \mathcal{M}^c_{loc}$ pour tout $n$, donc $M^2 - \langle M, M\rangle \in \mathcal{M}^c_{loc}$. On a donc montré l'existence de la variation quadratique $\langle M, M\rangle$ de $M$.

Si $t > 0$, on a par construction $S(M, n)_s = S(M^{T_p}, n)_s$ pour tout $s \leq t$, dès que $T_p \geq t$. Donc en restriction à l'ensemble $\{T_p \geq t\}$, $S(M, n)_s$ converge en probabilité, uniformément en $s \in [0, t]$, vers $\langle M^{T_p}, M^{T_p}\rangle_s = \langle M, M\rangle_s$. Comme $T_p \to \infty$ si $p \to \infty$, on en déduit immédiatement (c) pour $M$.

5) Considérons la propriété suivante, pour $M \in \mathcal{M}^c$ bornée nulle en 0:

$\mathbf{P}(M)$**:** Si $(t(n, i))$ est une suite quelconque de subdivisions de pas $m_n(t)$ tendant vers 0 pour tout $t$, si $i_{n,t} = \sup(i : t(n, i) \leq t)$ et si

$$S'(M, n)_t \ = \ S(M, n)_t + (M_t - M_{t(n, i_{n,t})})^2$$

(c'est donc le processus (3.2.5) pour $s_i = t(n, i)$), alors, pour tout $t$ la suite $S'(M, n)_t$ converge dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ vers une limite $A_t$.

Dans cette étape, nous allons montrer que $\mathbf{P}(M)$ implique l'existence de $\langle M, M\rangle$ et la convergence (3.2.4) uniformément en $t$ sur les compacts. On pose

$$\varepsilon_{n,t} = \sup(|M_r - M_s| : \ r, s \leq t, |r - s| \leq m_n(t)), \qquad Y(n) = M^2 - S'(M, n). \qquad (3.2.7)$$

Les $S'(M,n)_t$, donc aussi $A_t$, sont $\mathcal{F}_t$-mesurables. On a $|S(M,n)_t - S'(M,n)_t| \leq \varepsilon_{n,t}^2$, et $\varepsilon_{n,t} \to 0$ puisque $M$ est continue et $m_n(t) \to 0$. Donc $\mathbf{P}(M)$ implique $S(M,n)_t \to A_t$ en probabilité, et comme $S(M,n)_t \leq S(M,n)_s$ si $t < s$, on a aussi $A_t \leq A_s$ p.s. Donc, comme on peut modifier chaque $A_t$ sur un négligeable sans altérer la convergence, on peut supposer $A$ croissant, pour tout $\omega$, le long des rationnels. La régularisée à droite $B_t = \lim_{r\in\mathbb{Q},\, r\downarrow\downarrow t} A_r$ est un processus $B$ adapté càdlàg.

On pose $Y = M^2 - B$ et $Y' = M^2 - A$. Le lemme 3.2.5 implique que $Y(n)$ est une martingale, donc si $r < r'$ sont deux rationnels la convergence dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ implique

$$\mathbb{E}(Y'_{r'} \mid \mathcal{F}_r) \;=\; \mathbb{L}^2 - \lim_n \, \mathbb{E}(Y(n)_{r'} \mid \mathcal{F}_r) \;=\; \mathbb{L}^2 - \lim_n \, Y(n)_r \;=\; Y'_r.$$

Si $s < t$ on prend deux suites de rationnels $r_n \downarrow\downarrow s$ et $r'_n \downarrow\downarrow t$. On peut passer à la limite dans l'égalité précédente (on a $M$ borné et $A_{r'_n} \leq A_R \in \mathbb{L}^1$ pour un certain $R$), donc $\mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_s) = Y_s$. Ainsi, $Y$ est une martingale, a priori càdlàg. On a aussi $0 = \mathbb{E}(Y(n)_{r'_p}) \to_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y'_{r'_p}) \to_{p\to\infty} \mathbb{E}(Y_t)$, donc $B_0 = 0$ p.s., et quitte à poser $B_t = 0$ pour tout $t$ sur l'ensemble $\mathcal{F}_0$-mesurable et négligeable $\{B_0 \neq 0\}$ on obtient $B \in \mathcal{A}^+$.

Montrons maintenant que $B$ est continu. D'après l'inégalité de Doob (2.4.3)

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |Y_s - Y(n)_s|^2) \;\leq\; 4\mathbb{E}(|Y_t - Y(n)_t|^2),$$

qui tend vers 0, de sorte que pour une sous-suite on a $\sup_{s\leq t} |Y_s - Y(n_k)_s| \to 0$ p.s. Comme les $Y(n)$ sont continus, il en est de même de $Y$, donc de $B$. Comme $B_s \leq A_r \leq B_t$ si $s < r < t$ et $r$ est rationnel, et $B$ est continu croissant, il vient $B_r = A_r$ p.s., donc $S(M,n)_r \to B_r$ en probabilité pour tout rationnel $r$. Comme en plus $S(M,n)$ est croissant et $B$ est croissant continu (encore !), on en déduit exactement comme dans la preuve du théorème 1.5.1 que la convergence en probabilité $S(M,n)_t \to B_t$ est uniforme en $t$ sur les compacts.

Ainsi, le processus $\langle M,M\rangle = B$ vérifie toutes les conditions requises, et on a (c) pour notre suite de subdivisions. Si enfin on considère une autre suite de subdivisions $(t'(n,i))$ le même argument montre la convergence vers un processus $B'$, et à cause de l'unicité $B'$ est indistinguable de $B$: par suite on a (c) pour toute suite de subdivisions de pas tendant vers 0, et le théorème est démontré.

6) Il nous reste à prouver $\mathbf{P}(M)$, lorsque $M \in \mathcal{M}^c$ vérifie $M_0 = 0$ et $|M| \leq K$ pour une constante $K$. Cela revient à montrer que, pour tout $t$, la suite $S'(M,n)_t$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$. Vu la définition de $S'(M,n)_t$, et comme dans la preuve du lemme 3.2.5, on peut ajouter le point $t$ à toutes les subdivisions. Soit $n,m \geq 1$. On ordonne les points de la réunion $\{t(n,i) : i \geq 0\} \cup \{t(m,i) : i \geq 0\}$ en $0 = s_0 < s_1 < \cdots$, et on a $t = s_q$ pour un $p \geq 1$. On utisera enfin la notation $S'(X)$ pour le processus associé à $X$ par (3.2.5), relativement à la subdivision $(s_i)$. Soit aussi $n,m \geq 1$. On utilise les notations (3.2.7).

D'après le lemme 3.2.5, $Y(n)$ et $Y(m)$ sont des martingales nulles en 0, bornées par une constante (dépendant de $n$ ou $m$) sur chaque intervalle de temps borné, donc il en est de même de $Z(n,m) = S'(M,n) - S'(M,m)$. Donc une nouvelle application du lemme entraine que $Z(n,m)^2 - S'(Z(n,m))$ est aussi une martingale. Par suite, comme évidemment $S'(X-Y) \leq 2S'(X) + 2S'(Y)$ (puisque $(x-y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$), on a

$$\mathbb{E}(Z(n,m)_t^2) \;\leq\; 2\,\mathbb{E}\Big(S'(S'(M,n))_t\Big) + 2\,\mathbb{E}\Big(S'(S'(M,m))_t\Big). \qquad (3.2.8)$$

On a évidemment

$$S'(M,n)_{s_k} - S'(M,n)_{s_{k-1}} \;=\; (M_{s_k} - M^2_{s_{k-1}} \;\leq\; \varepsilon_n |M_{s_k} - M_{s_{k-1}}|,$$

donc $S'(S'(M,n))_t \;\leq\; \varepsilon_n^2 \; S'(M)_t$. Appliquons Cauchy-Schwarz et (3.2.6) avec $K_t = K$:

$$\mathbb{E}\Big( S'(S'(M,n))_t \Big) \;\leq\; \sqrt{8}\; K^2 \; \sqrt{\mathbb{E}(\varepsilon_n^4)}.$$

Il découle alors de (3.2.8) que

$$\mathbb{E}(Z(n,m)_t^2) \;\leq\; 2\sqrt{8}\; K^2 \; \Big( \sqrt{\mathbb{E}(\varepsilon_n^4)} + \sqrt{\mathbb{E}(\varepsilon_m^4)} \Big),$$

qui tend vers 0 quand $n,m \to \infty$ puisque $\varepsilon_n(\omega) \to 0$ et $|\varepsilon_n(\omega)| \leq 2K$. Cela démontre que la suite $S'(M,n)_t$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$. □

**Remarque 3.2.6.** Le lemme clé 3.1.1 est vrai pour les martingales locales discontinues, et le lecteur vérifiera que la continuité de $M$ est essentiellement utilisée en deux endroits dans la preuve précédente: pour démontrer que la convergence dans (3.2.4) est localement uniforme, et surtout pour montrer que, par "localisation", on peut se ramener à des martingales bornées. Par suite si $M$ est une martingale bornée discontinue, on a le même résultat de convergence (3.2.4), sauf que la variation quadratique est discontinue et que la convergence n'est plus uniforme. Le même résultat peut aussi se montrer pour $M \in \mathcal{M}_{loc}$ quelconque, mais c'est techniquement plus difficile.

**Attention:** Dans le cas "général", la variation quadratique n'est pas notée $\langle M,M\rangle$, mais $[M,M]$, et la notation $\langle M,M\rangle$ est réservée à un autre processus croissant. Lorsque $M$ est continue, ces deux processus coïncident, et on utilise indifférement les notations $\langle M,M\rangle$ et $[M,M]$. □

De même que le théorème 1.5.1 admet une extension à la "covariation quadratique" entre deux MB (cf. théorème 1.5.2), nous pouvons considérer ici la covariation quadratique "approchée" de deux processus $M$ et $N$, associée à une suite de subdivisions $(t(n,i))$ par

$$S(M,N,n)_t \;=\; \sum_{i\geq 1,\, t(n,i)\leq t} (M_{t(n,i)} - M_{t(n,i-1)})\; (N_{t(n,i)} - N_{t(n,i-1)}) \tag{3.2.9}$$

et étudier son comportement quand $n \to \infty$. On pose aussi

$$\langle M,N\rangle \;=\; \frac{1}{4}\Big( \langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle \Big), \tag{3.2.10}$$

qui est à rapprocher de la relation $< x,y >= \frac{1}{4}(< x+y, x+y > - < x-y, x-y >) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ reliant le produit scalaire et la norme dans un espace de Hilbert. Cette égalité, de même que (3.2.10), s'appellent égalité de "polarisation".

**Théorème 3.2.7.** *Soit $M,N \in \mathcal{M}^c_{loc}$.*

*a) Le processus $\langle M,N\rangle$ est l'unique (à l'indistinguabilité près) processus continu dans $\mathcal{A}$ tel que $MN - \langle M,N\rangle$ soit une martingale locale.*

*b) Pour tout temps d'arrêt $T$ on a $\langle M,N\rangle^T = \langle M^T,N^T\rangle = \langle M^T,N\rangle$.*

*c) On a $\langle M,N\rangle = \langle M-M_0,N-N_0\rangle$.*

*d) On a $\langle M,N\rangle = \langle N,M\rangle$.*

*e) Si $a\in\mathbb{R}$ et si $M'$ est une autre martingale locale continue, on a $\langle aM+M',N\rangle = a\langle M,N\rangle + \langle M',N\rangle$.*

*f) Pour toute suite de subdivisions de pas tendant vers 0, on a*

$$S(M,N,n)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M,N\rangle_t \tag{3.2.11}$$

*et cette convergence a même lieu, en probabilité, uniformément en $t$ sur tout compact.*

**Preuve.** a) Comme pour le théorème précédent, l'unicité provient de la proposition 3.2.3. Le fait que $MN-\langle M,N\rangle$ soit une martingale locale découle immédiatement du théorème précédent encore, et de l'égalité $MN = \frac{1}{4}\Big((M+N)^2-(M-N)^2\Big)$.

b) La première égalité est évidente, et pour la seconde il suffit d'utiliser la caractérisation (a) et de remarquer que $M^TN-M^TN^T$ est dans $\mathcal{M}^c_{loc}$.

(c) et (d) sont évidents, tandis que (e) découle de la caractérisation (a) et du fait que $(aM+M')N = aMN+M'N$.

f) On a aussi de manière immédiate $S(M,N,n) = \frac{1}{4}\Big(S(M+N,n)-S(M-N,n)\Big)$, de sorte que le résultat découle du théorème 3.2.4-(c). $\square$

Le processus $\langle M,N\rangle$ se comporte comme un "produit scalaire" entre $M$ et $N$, ou plutôt entre $M-M_0$ et $N-N_0$. Cette interpétation est confortée par le résultat suivant:

**Proposition 3.2.8.** *Si une martingale locale continue $M$ est telle que $\langle M,M\rangle$ soit indistinguable de 0, alors on a $M_t=M_0$ p.s. pour tout $t$.*

**Preuve.** Si $\langle M,M\rangle=0$ on a aussi $\langle M-M_0,M-M_0\rangle=0$, donc $(M-M_0)^2$ est une martingale locale, donc une surmartingale par la proposition 3.2.2. On a donc $\mathbb{E}((M_t-M_0)^2)\leq\mathbb{E}((M_0-M_0)^2)=0$, et le résultat en découle. $\square$

**Théorème 3.2.9. (Kunita-Watanabe)** *Soit $M,N\in\mathcal{M}^c_{loc}$. Si $H$ et $K$ sont deux processus mesurables, on a*

$$|(HK)\bullet\langle M,N\rangle_t| \;\leq\; |HK|\bullet V(\langle M,N\rangle)_t \;\leq\; \sqrt{H^2\bullet\langle M,M\rangle_t}\,\sqrt{K^2\bullet\langle N,N\rangle_t}. \tag{3.2.12}$$

(on rappelle que $V(A)$ désigne le processus variation de $A\in\mathcal{A}$).

**Preuve.** La première inégalité est triviale. La seconde est (comme la première d'ailleurs) une inégalité "$\omega$ par $\omega$".

Avec $\omega$ fixé, on peut considérer les mesures associées (au sens du paragraphe 3.1) aux fonctions $\langle M,M\rangle$, $\langle N,N\rangle$, $\langle M+N,M+N\rangle+\langle M-N,M-N\rangle$ et $\langle M,N\rangle$, mesures qu'on notera respectivement $\mu$, $\nu$, $\eta$ et $\zeta$ (les trois premières sont positives, la dernière est signée). Avec ces notations (3.2.12) se ramène à l'inégalité

$$\int |h(s)k(s)|\ |\zeta|(ds) \ \leq\ \sqrt{\int h(s)^2\,\mu(ds)}\ \sqrt{\int k(s)^2\,\nu(ds)} \tag{3.2.13}$$

pour toutes fonctions $h$ et $k$ nulles en dehors de $[0,t]$.

Comme $\langle M+N,M+N\rangle + \langle M-N,M-N\rangle = 2\langle M,M\rangle + 2\langle N,N\rangle$ on a $\eta = 2\mu+2\nu$, tandis que $|\zeta| \leq \frac{1}{4}\,\eta$ est évident. Par suite les mesures $\mu$, $\nu$, $\zeta$ sont absolument continues par rapport à $\eta$, de dérivées de Radon-Nikodym respectives $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Par ailleurs pour tout $x\in\mathbb{R}$ le processus $\langle M+xN,M+xN\rangle$ est croissant, de sorte que la mesure associée $\mu+2x\gamma+x^2\nu$ est positive, donc $\alpha+2x\gamma+x^2\beta\geq 0$ $\eta$-p.p. pour tout $x$. On en déduit que $\gamma^2\leq\alpha\beta$ $\eta$-p.p. Par suite

$$\int |h(s)k(s)|\ |\zeta|(ds) \ =\int |hk\gamma|\,d\eta \ \leq\ \int |hk\sqrt{\alpha\beta}|\,d\eta \ \leq\ \sqrt{\int h^2\alpha\,d\eta\ \int k^2\beta\,d\eta}$$

par Cauchy-Schwarz, ce qui donne (3.2.13). □

## 3.3 Semimartingales et martingales de carré intégrable

L'espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ avec $\mathbb{F}$ càd est toujours fixé.

### 3.3.1 La décomposition de Doob-Meyer

Dans ce paragraphe nous allons donner, sans démonstration, un résultat de "structure" des sousmartingales qui est fondamental. Comme dans ce cours on ne considère en principe que des processus à trajctoires continues, on pourrait se passer de ce résultat général au prix de quelques contorsions peu naturelles, et d'une définition un peu restrictive des semimartigales continues. Cependant ce résultat est de toute manière intéressant à connaître, indépendamment de toute application, et fait partie de la "culture générale" du stochasticien, au même titre que le théorème 2.2.6.

Il faut d'abord compléter les notions introduites au paragraphe 2.2. L'espace $\Omega\times\mathbb{R}_+$ a été muni de la tribu progressive, et on va ajouter deux autres tribus:

**Définition 3.3.1.** *La tribu prévisible* (resp. *optionnelle)* est la tribu de $\Omega\times\mathbb{R}_+$ engendrée par les processus adaptés à trajectoires continues (resp. càd). un ensemble aléatoire $A\subset\Omega\times\mathbb{R}_+$ ou un processus $X$ sont dits prévisibles, resp. optionnels, s'ils sont mesurables par rapport à la tribu prévisible, resp. optionnelle. □

La tribu optionnelle est contenue dans la tribu progressive (cela découle de la proposition 2.2.3), et l'inclusion est stricte (même si on a pris une filtration "complète" par rapport à $\mathbb{P}$). Il est aussi évident que la tribu prévisible est contenue dans la tribu optionnelle, mais cette inclusion est parfois une égalité (par exemple pour la filtration complète engendrée par un MB). Une propriété remarquable des prévisibles est:

$$\text{Un processus adapté càg est prévisible.} \tag{3.3.1}$$

Ce qu'on appelle "décomposition de Doob-Meyer" est le résultat suivant:

**Théorème 3.3.2.** *Tout processus $X$ qui est la différence de deux sousmartingales se met de manière unique (à l'indistinguabilité près) sous la forme $X = M + A$, où $M$ est une martingale locale et $A$ est un processus prévisible dans $\mathcal{A}$. De plus:*

*a) Si $X$ est continu, il en est de même de $M$ et $A$.*

*b) Si $X$ est lui-même une sousmartingale, alors $A \in \mathcal{A}^+$.*

(ce qui précède est une version "étendue"; la version "classique" concerne le cas (b) seulement, quand en plus $X$ est "de classe (D)").

Dans le cas à temps discret ce résultat, très facile, est dû à Doob. Le cas continu, dû à Meyer, est bien plus complexe, cf. par exemple "Probabilités et Potentiel" de Dellacherie-Meyer.

L'unicité dans le cas à trajectoires continues est une conséquence de la proposition 3.2.3-(b), qui se généralise ainsi (ce qui suit peut être vu comme un corollaire du théorème ci-dessus, mais une preuve directe est assez facile):

**Proposition 3.3.3.** *Si $M$ est une martingale locale appartenant à $\mathcal{A}$ et est prévisible, alors presque toutes ses trajectoires sont nulles.*

Attention: si on supprime "prévisible" le résultat devient grossièrement faux. Par exemple $M_t = N_t - t$, où $N$ est un processus de Poisson standard, est une martingale appartenant à $\mathcal{A}$ (mais non prévisible, elle est toutefois optionnelle, comme toute processus adapté càd). Enfin, on termine ce paragraphe par un corollaire qui ne nous sera pas directement utile, mais qui est très simple, et fondamental dès qu'on étudie les processus discontinus:

**Proposition 3.3.4.** *Si $X \in \mathcal{A}$ est tel que $\mathbb{E}(V(X)_t) < \infty$ pour tout $t$, il existe un unique (à l'indistinguabilité près) processus $A \in \mathcal{A}$, prévisible, et tel que $X - A \in \mathcal{M}_{loc}$.*

$A$ s'appelle le *compensateur prévisible*, ou *projection duale prévisible* de $X$. La preuve est immédiate, puisque le processus $X$ s'écrit $X = X(+) - X(-)$, et que $X(+)$ et $X(-)$ sont des sousmartingales. On peut aussi montrer que $\mathbb{E}(V(A)_t) < \infty$, et que $X - A$ est une martingale.

Terminons en remarquant que si $M$ est une martingale continue vérifiant $E(M_t^2) < \infty$ (i.e., de carré intégrable), alors $M^2$ est une sousmartingale. Sa décomposition de Doob-Meyer, soit $M^2 = M_0^2 + N + A$ avec $N \in \mathcal{M}_{loc}$ et $A \in \mathcal{A}^+$ prévisible, est en fait donnée par le théorème 3.2.4, et on a $A = \langle M, M\rangle$. Ainsi, le début de ce théorème (mais pas la convergence dans (c)) est un cas particulier du théorème 3.3.2.

### 3.3.2 Semimartingales

**Définition 3.3.5.** On appelle *semimartingale* tout processus de la forme $X = X_0 + M + A$, où $X_0$ est $\mathcal{F}_0$-mesurable, $M \in \mathcal{M}_{loc}$ avec $M_0 = 0$, et $A \in \mathcal{A}$.

Une semimartingale est dite *spéciale* si elle admet une décomposition comme ci-dessus avec $A$ prévisible. Cette décomposition, unique par la proposition 3.3.3, s'appelle la *décomposition canonique.* □

On notera $\mathcal{S}$ la classe de toutes les semimartingales, et $\mathcal{S}^c$ le sous-ensemble des semimartingales p.s. continues. Toute semimartingale est adaptée. La décomposition $X = X_0 + M + A$ n'est aucune manière unique, puisqu'il existe des martingales à variation finie (cf. après la proposition 3.3.3). En vertu du théorème 3.3.2, les sousmartingales et les surmartingales sont des semimartingales.

**Proposition 3.3.6.** *Si $X$ est une semimartingale p.s. continue elle est spéciale, et les termes $M$ et $A$ de sa décomposition canonique sont p.s. continus.*

**Preuve.** Il suffit évidemment de montrer le résultat quand $X_0 = 0$. Soit $X = N + B$ avec $N \in \mathcal{M}_{loc}$ nulle en 0 et $B \in \mathcal{A}$. Soit $T_n = \inf(t : |N_t| \geq n \text{ ou } V(B)_t \geq n)$ et $(S_n)$ une suite localisante pour $M$, et $R_n = \min(S_n, T_n)$, qui est aussi une suite localisante.

Si $R_n = \infty$ on a $V(B)_\infty \leq n$; si $R_n < \infty$ on a $V(B)_{R_n} \leq n + |\Delta B_{R_n}|$, où $\Delta B_t = B_t - B_{t-}$ est la taille du "saut" de $B$ en $t$, et aussi (comme $X$ est continu) $|\Delta B_{R_n}| = |\Delta N_{R_n}| \leq n + |N_{R_n}|$. De plus comme $N^{R_n}$ est une martingale uniformément intégrable, sa valeur à l'infini, soit $N_{R_n}$, est intégrable. En rassemblant ces résultats, on voit que finalement $\mathbb{E}(V(B)_{R_n}) < \infty$ pour tout $n$.

En conséquence, le processus arrêté $X^{R_n} = N^{R_n} + B^{R_n}$ est la différence de deux sousmartingales (par exemple $N^{R_n} + B(+)^{R_n}$ et $B(-)^{R_n}$), et c'est un processus p.s. continu. D'après le théorème 3.3.2 il s'écrit $X^{R_n} = M(n) + A(n)$, avec $M(n) \in \mathcal{M}^c_{loc}$ et $A(n) \in \mathcal{A}^c$, et l'unicité implique $A(n+1)^{R_n} = A(n)$, tandis que $R_n \to \infty$. Donc, comme dans l'étape 4 de la preuve du théorème 3.2.4 on construit un processus $A$ vérifiant $A^{R_n} = A(n)$ pour tout $n$. Il est évident que $A \in \mathcal{A}$ et que $X - A \in \mathcal{M}_{loc}$. Comme les $A(n)$ sont continus, $A$ est également continu (donc aussi prévisible), ce qui achève la preuve. □

### 3.3.3 Martingales de carré intégrable

Rappelons qu'une martingale $M$ est "de carré intégrable" si $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout $t$. Dans la littérature le même nom désigne parfois (mais pas dans ce cours !) les martingales appartenant à l'espace suivant:

$$\mathcal{H}^2 \ = \ \{M \in \mathcal{M};\ M_\infty \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})\}. \tag{3.3.2}$$

Si $M \in \mathcal{H}^2$ on a $M_t = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_t)$, donc $M_t \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ et $M$ est de carré intégrable (dans le sens de ce cours).

On appellera *martingale localement de carré intégrable* les processus $M$ pour lesquels il existe une suite localisante $(T_n)$ de temps d'arrêt telle que chaque $M^{T_n}$ soit dans $\mathcal{H}^2$, et on note $\mathcal{H}^2_{loc}$ l'ensemble de ces processus. La terminologie n'est pas tout-à-fait correcte car si $M \in \mathcal{H}^2_{loc}$, c'est une martingale locale, mais pas nécessairement une martingale ... mais écrire "martingale locale localement de carré intégrable" est un peu long. Toute martingale de carré intégrable est dans $\mathcal{H}^2_{loc}$.

On notera aussi $\mathcal{H}^{2,c}$ et $\mathcal{H}^{2,c}_{loc}$ l'ensemble des processus appartenant à $\mathcal{H}^2$ et $\mathcal{H}^2_{loc}$ respectivement, et p.s. continus. On a bien-sûr $\mathcal{H}^{2,c}_{loc} \subset \mathcal{M}^c_{loc}$. A l'inverse, comme on l'a déjà vu, si $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ est nulle en 0 on peut trouver une suite localisante $(T_n)$ telle que chaque $M^{T_n}$ soit une martingale bornée, donc dans $\mathcal{H}^2$. Par suite on a

$$\mathcal{H}^{2,c}_{loc} \ = \ \{M \in \mathcal{M}^c_{loc} :\ \mathbb{E}(M_0^2) < \infty\}. \tag{3.3.3}$$

Enfin, dans la suite on “identifie” deux martingales locales indistinguables l'une de l'autre (à la manière de $\mathbb{L}^2$, pour lequel on identifie deux variables p.s. égales).

**Théorème 3.3.7.** *a) Avec l'identification faite ci-dessus, $\mathcal{H}^2$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|M\|_{\mathcal{H}^2} = \|M_\infty\|_{\mathbb{L}^2}$. Le produit scalaire associé est $< M, N >_{\mathcal{H}^2} = \mathbb{E}(M_\infty N_\infty)$.*

*b) $\mathcal{H}^{2,c}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^2$, ainsi que $\mathcal{H}_0^{2,c} = \{M \in \mathcal{H}^{2,c} :\ M_0 = 0\}$, et ce sont donc aussi des espaces de Hilbert.*

**Preuve.** Comme il y a une correspondance bijective entre les (classes d'équivalence de) martingales uniformément intégrables $M$, et l'ensemble des (classes d'équivalence de) leurs variables terminales $M_\infty$, c'est-à-dire avec $\mathbb{L}^1(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, (a) est immédiat.

$\mathcal{H}^{2,c}$ et $\mathcal{H}_0^{2,c}$ sont des sous-espaces vectoriels, donc pour (b) il suffit de montrer qu'ils sont fermés dans $\mathcal{H}^2$. Soit $M(n) \in \mathcal{H}^{2,c}$ convergeant vers $M \in \mathcal{H}^2$. D'après l'inégalité de Doob (2.4.3), on obtient

$$\mathbb{E}(\sup_{s\geq 0} |M_s - M(n)_s|^2) \ \leq\ 4\mathbb{E}(|M_\infty - M(n)_\infty|^2),$$

qui tend vers 0. On a donc $\sup_{s\geq 0} |M_s - M(n_k)_s| \to 0$ p.s. pour une sous-suite, de sorte que $M$ est p.s. à trajectoires continues et $\mathcal{H}^{2,c}$ est fermé. Si en plus $M(n)_0 = 0$ pour tout $n$, on a aussi $M_0 = 0$ p.s., et $\mathcal{H}_0^{2,c}$ est fermé. □

**Théorème 3.3.8.** *Soit $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$. On a $M \in \mathcal{H}^{2,c}$ si et seulement si $\mathbb{E}(M_0^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty) < \infty$. Dans ce cas $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale uniformément intégrable, et en particulier $\|M\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty)$.*

**Preuve.** Comme $\langle M, M\rangle = \langle M - M_0, M - M_0\rangle$ et comme $M$ est de carré intégrable si et seulement s'il en est de même de $M - M_0$ et $\mathbb{E}(M_0^2) < \infty$, il suffit de montrer les résultats pour $M - M_0$, ce qui revient à les montrer pour $M$ satisfaisant $M_0 = 0$. On pose $Y = M^2 - \langle M, M\rangle$ et $a = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty)$.

Il existe une suite localisante $(T_n)$ telle que $T_n \leq n$ et $|M_s| \leq n$ si $s \leq T_n$ et $\langle M, M\rangle_{T_n} \leq n$ et $Y^{T_n} \in \mathcal{M}$, et en particulier $\mathbb{E}(M_{T_n}^2) = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{T_n})$ (car $M_0 = 0$). Si $M \in \mathcal{H}^2$, on a alors $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{T_n}) \leq \mathbb{E}(M_\infty^2)$, donc par le théorème de limite monotone $a \leq \mathbb{E}(M_\infty^2) < \infty$. Dans ce cas, on a aussi

$$\sup_t |Y_t| \ \leq\ Z \ :=\ \sup_t |M_t|^2 + \langle M, M\rangle_\infty,$$

qui est intégrable. Donc les $Y_t$ sont uniformément intégrables, et dans les égalités $\mathbb{E}(Y_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s) = Y_s^{T_n}$ pour $s < t$ on peut passer à la limite pour obtenir que $Y$ est une martingale.

Réciproquement si $a < \infty$, on a (encore à cause de l'inégalité de Doob):

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq T_n} |M_s|^2) \ \leq\ 4\mathbb{E}(M_{T_n}^2) \ =\ 4\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{T_n}) \ \leq\ a.$$

En passant encore à la limite, on a $\mathbb{E}(\sup_t |M_t|^2) \leq a$, donc $\mathbb{E}(M_\infty^2) \leq a$, et $M \in \mathcal{H}^2$. □

Terminons ce paragraphe avec la mention d'une inégalité, dite de **Davis-Burholder-Gundy**. Elle ne concerne pas spécialement les martingales de carré intégrable mais, compte tenu du théorème précédent, elle se ramène dans le cas $p = 2$ à l'inégalité de Doob (2.4.3). Dans le cas $p \neq 2$ la démonstration, un peu délicate, est omise. Signalons aussi qu'il en existe une version pour les martingales locales quelconques (non continues; il faut alors utiliser la variation quadratique $[M, M]$ mentionnée dans la remarque 3.2.6).

**Théorème 3.3.9.** *Pour tout $p \in [1, \infty[$ il existe deux constantes $0 < c_p < C_p < \infty$ telles que, pour toute martingale locale p.s. continue $M$ nulle en $0$ et tout temps d'arrêt $T$ on ait*

$$c_p \, \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_T^{p/2}) \ \leq \ \mathbb{E}(\sup_{s\leq T} |M_s|^p) \ \leq \ C_p \, \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_T^{p/2}). \tag{3.3.4}$$

## 3.4 Les intégrales stochastiques

Ce paragraphe est consacré à la définition de l'intégrale $H \bullet X_t = \int_0^t H_s \, dX_s$ lorsque $X$ est une semimartingale continue, et $H$ un intégrand raisonnable. L'idée est, comme $X = X_0 + M + A$ avec $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ et $A \in \mathcal{A}^c$, de poser

$$\int_0^t H_s \, dX_s \ = \int_0^t H_s \, dM_s \ + \int_0^t H_s \, dA_s. \tag{3.4.1}$$

Le dernier terme ne pose en principe pas de problème (proposition 3.1.4). L'intégrale par rapport à $M$, qui n'est pas à variation finie, pose en revanche un problème. Nous commençons par le cas où $M \in \mathcal{H}^2$.

### 3.4.1 Intégrale par rapport à $M \in \mathcal{H}^{2,c}$

On suppose fixée la martingale $M \in \mathcal{H}^{2,c}$. L'idée de base de la construction de l'intégrale $H \bullet M_t = \int_0^t H_s \, dM_s = \int_{]0,t]} H_s \, dX_s$ est que, même si en tant qu'intégrale de Stieltjes cette expression n'a pas de sens, lorsqu'on intègre le processus $H \equiv 1$ on obtienne la "fonction de répartition", c'est-à-dire que $\int_0^t 1 \, dM_s = M_t - M_0$. On veut aussi que l'intégrale soit linéaire en $H$. Par suite si $H$ est un processus "élémentaire", de la forme

$$H_t \ = \ \sum_{i\geq 1} \zeta_i \ 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t), \tag{3.4.2}$$

pour une suite $(t_i)$ croissant vers l'infini, on doit avoir

$$H \bullet M_t \ = \ \sum_{i\geq 1} \zeta_i (M_{\min(t,t_{i+1})} - M_{\min(t,t_i)}). \tag{3.4.3}$$

Les processus élémentaires ne suffisent évidemment pas, et le prolongement à des processus plus généraux nécessite des hypothèses de mesurabilité sur $H$ que nous explicitons maintenant.

On notera $\mathcal{L}^2(M)$ l'ensemble de tous les processus *progressivement mesurables* $H$ tels que

$$\|H\|_M^2 \ := \ \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s^2 \ d\langle M, M\rangle_s\right) \ < \ \infty. \tag{3.4.4}$$

On note aussi $\mathbb{L}^2(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^2(M)$, pour la relation d'équivalence $H \sim K$ si $\|H - K\|_M = 0$. Comme la notation le suggère, $\mathbb{L}^2(M)$ est l'espace $\mathbb{L}^2$ d'une mesure (c'est donc un espace de Hilbert). Plus précisément, on peut munir $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ de la mesure $Q_M(d\omega, dt) = \mathbb{P}(d\omega)\mu(\omega, dt)$, où $\mu(\omega, .)$ est la mesure associée à la fonction $t \mapsto \langle M, M\rangle_t(\omega)$ par (3.1.1). Avec ces notations, on a $\mathbb{L}^2(M) = \mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{G}, Q_M)$, où $\mathcal{G}$ désigne la tribu progressivement mesurable. Noter aussi que comme $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty) < \infty$, la mesure $Q_M$ est finie.

**Théorème 3.4.1.** *Soit $M \in \mathcal{H}^{2,c}$.*

*a) Pour tout processus $H \in \mathbb{L}^2(M)$ il existe un unique processus dans $\mathcal{H}_0^{2,c}$, noté $H \bullet M$ ou aussi $\int_0^t H_s \, dM_s$ et appelé* processus intégrale stochastique, *et qui vérifie*

$$\langle H \bullet M, N\rangle \; = \; H \bullet \langle M, N\rangle \tag{3.4.5}$$

*pour tout $N \in \mathcal{H}_0^{2,c}$* (le membre de droite est le processus "intégrale de $H$" par rapport à $\langle M, N\rangle \in \mathcal{A}$, cf. proposition 3.1.4).

*b) Si $H$ est un processus "élémentaire" de la forme (3.4.2), borné et progressivement mesurable* (ce qui revient à dire que chaque $\zeta_i$ est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et que $|\zeta_i(\omega)| \leq C$ identiquement, pour une constante $C$), *alors $H \in \mathbb{L}^2(M)$ et $H \bullet M$ est donnée par (3.4.3).*

*c) On a $H \bullet M = H \bullet (M - M_0)$.*

On commence par un lemme général qui nous donne un critère de martingalité.

**Lemme 3.4.2.** *Si $X$ est un processus càdlàg, intégrable, adapté, et si $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné, alors $X$ est une martingale.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(1_A \, X_t) = \mathbb{E}(1_A \, X_s)$ pour tous $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Si $T$ vaut $s$ sur $A$ et $t$ sur $A^c$, c'est un temps d'arrêt borné, donc on a

$$\mathbb{E}(X_T) \; = \; \mathbb{E}(1_A \, X_s) + \mathbb{E}(1_{A^c} \, X_t) \; = \; \mathbb{E}(X_0), \quad \mathbb{E}(X_t) \; = \; \mathbb{E}(1_A \, X_t) + \mathbb{E}(1_{A^c} \, X_t) \; = \; \mathbb{E}(X_0).$$

Le résultat est alors évident. □

**Preuve du théorème.** a) Si $X, Y \in \mathcal{H}_0^{2,c}$ vérifient $\langle X, N\rangle = \langle Y, N\rangle$ pour tout $N \in \mathcal{H}^{2,c}$, alors en particulier $\langle X - Y, X - Y\rangle = 0$ et donc $X$ et $Y$ (tous deux nuls en 0) sont indistinguables (donc égaux en tant qu'éléments de $\mathcal{H}^2$) par la proposition 3.2.8. On a donc l'unicité du processus $H \bullet M$, s'il existe. En utilisant le théorème 3.2.7-(c), on en déduit l'assertion (c) ci-dessus, toujours en supposant l'existence.

Pour l'existence, on peut donc supposer $M_0 = 0$. Soit $N \in \mathcal{H}_0^{2,c}$. D'après l'inégalité de Kunita et Watanabe (3.2.12), qu'on peut utiliser pour $t = \infty$ puisque les intégrales sont définies sur $\mathbb{R}_+$ entier, et comme $\|N\|^2_{\mathcal{H}^2} = \mathbb{E}(\langle N, N\rangle_\infty)$ (théorème 3.3.8), il vient

$$|\mathbb{E}(H \bullet \langle M, N\rangle_\infty)| \;\; \leq \;\; \|H\|_M \; \|N\|_{\mathcal{H}^2}.$$

Par suite l'application $N \mapsto \mathbb{E}(H \bullet \langle M, N\rangle_\infty)$, qui est évidemment linéaire, est continue sur $\mathcal{H}^{2,c}$. Comme $\mathcal{H}^{2,c}$ est un espace de Hilbert (théorème 3.3.7), il existe $Y \in \mathcal{H}_0^{2,c}$ tel que

$$N \in \mathcal{H}_0^{2,c} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(N_\infty Y_\infty) \; = \; \mathbb{E}(H \bullet \langle M, N\rangle_\infty). \tag{3.4.6}$$

Si maintenant $N \in \mathcal{H}_0^{2,c}$ et $T$ est un temps d'arrêt, en utilisant (3.4.6) et le théorème 3.2.7-(b), et aussi le théorème d'arrêt 2.4.4, on obtient

$$\mathbb{E}(N_T Y_T) \;=\; \mathbb{E}(N_T Y_\infty) \;=\; \mathbb{E}(N_\infty^T Y_\infty) \;=\; \mathbb{E}(H \bullet \langle M, N^T \rangle_\infty) \;=\; \mathbb{E}(H \bullet \langle M, N \rangle_T).$$

Le processus $Z = YN - H \bullet \langle M, N\rangle$, nul en 0, vérifie donc $\mathbb{E}(Z_T) = 0$ pour tout temps d'arrêt $T$. Par ailleurs il est continu, et adapté (c'est là qu'intervient, de manière cruciale, le fait que $H$ est progressivement mesurable, cf. la proposition 3.1.4). Le lemme 3.4.2 implique alors que $Z$ est une martingale, et par suite le théorème 3.2.7-(a) entraîne que $H \bullet \langle M, N\rangle = \langle Y, N\rangle$. Le processus $H \bullet M = Y$ vérifie donc les conditions requises.

b) Soit $H$ donné par (3.4.2), et $Y$ le processus défini par le membre de droite de (3.4.3). On pose aussi $Z = YN - H \bullet \langle M, N\rangle$. Comme $H$ est borné et progressivement mesurable, il est dans $\mathbb{L}^2(M)$. Il nous suffit alors de montrer que les processus $Y$ et $Z$, qui sont clairement continus nuls en 0 et intégrables, vérifient

$$\mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_s) \;=\; Y_s, \qquad \mathbb{E}(Z_t \mid \mathcal{F}_s) \;=\; Z_s \tag{3.4.7}$$

si $s < t$. Par "recollements successifs" il suffit de montrer (3.4.7) lorsque $t_i \leq s < t \leq t_{i+1}$ pour un $i$ donné, ce que nous supposons dans la suite. Dans ce cas $Y_t - Y_s = \zeta_i(M_t - M_s)$, donc (3.4.7) pour $Y$ est évident puisque $\zeta_i$ est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable. Un calcul élémentaire montre

$$Z_t - Z_s \;=\; Y_s(N_t - N_s) + \zeta_i \left(N_s(M_t - M_s) + (N_t - N_s)(M_t - M_s) + \langle M, N\rangle_s - \langle M, N\rangle_t\right).$$

(3.4.7) pour $Z$ découle alors des propriétés de martingale de $M$ et $N$, et de

$$\mathbb{E}\left((N_t - N_s)(M_t - M_s) + \langle M, N\rangle_s - \langle M, N\rangle_t \mid \mathcal{F}_s\right) = 0.$$

Cette dernière propriété est montrée ainsi: soit les martingales $U = M - M^s$ et $V = N - N^s$ (notation de processus arrêtés, au temps $s$). Alors $(N_t - N_s)(M_t - M_s) = U_t V_t - U_s V_s$, tandis que par le théorème 3.2.7-(b,e) on a aussi $\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_t = \langle U, V\rangle_t - \langle U, V\rangle_s$. Comme $UV - \langle U, V\rangle$ est une martingale, on obtient donc le résultat cherché. $\square$

On peut étendre, de manière presque immédiate, la définition de l'intégrale stochastique dans deux directions: en affaiblissant l'hypothèse d'intégrabilité (3.4.4), en étendant la classe des processeurs intégrateurs $M$ à la classe $\mathcal{M}_{loc}^c$. Ces deux extensions seront faites simultanément.

Si $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$, on note $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$ l'ensemble des processus $H$ *progressivement mesurables* qui vérifient

$$H^2 \bullet \langle M, M\rangle_t \;<\; \infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4.8}$$

On note aussi $\mathbb{L}_{loc}^2(M)$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$ pour la relation d'équivalence $H \sim K$ si $|H - K|^2 \bullet \langle M, M\rangle$ est indistinguable de 0.

**Théorème 3.4.3.** *Soit $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$.*

*a) Pour tout processus $H \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ il existe un unique processus dans $\mathcal{M}_{loc}^c$, noté $H \bullet M$, qui vérifie $H \bullet M_0 = 0$ et (3.4.5) pour tout $N \in \mathcal{H}_0^{2,c}$. Il vérifie aussi (3.4.5) pour tout $N \in \mathcal{M}_{loc}^c$.*

*b) Si $H$ est un processus "élémentaire" de la forme (3.4.2), borné et progressivement mesurable, on a $H \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$ et $H \bullet M$ est donnée par (3.4.3).*

*c) On a $H \bullet M = H \bullet (M - M_0)$.*

**Preuve.** Comme $\langle Y, N\rangle^T = \langle Y, (N - N_0)^T\rangle$ pour tout temps d'arrêt, on voit par localisation que si on a (3.4.5) pour tout $N \in \mathcal{H}_0^{2,c}$, on l'a aussi pour tout $N \in \mathcal{M}^c_{loc}$. Donc (c) et l'unicité dans (a) se montrent comme pour le théorème 3.4.1.

Pour l'existence, on peut supposer $M_0 = 0$. La suite de temps d'arrêt $T_n = \inf(t : |M_t| \geq n$ ou $H^2 \bullet \langle M, M\rangle_t \geq n)$ croît vers l'infini. On a $M^{T_n} \in \mathcal{H}_0^{2,c}$ (cf. (3.3.3)) et $H^2 \bullet \langle M, M\rangle_{T_n} \leq n$, donc $H \in \mathbb{L}^2(M^{T_n})$. Par suite $Y(n) = H \bullet M^{T_n}$ existe pour chaque $n$, et comme dans la situation du théorème 3.4.1 la caractérisation (a) implique que $(H \bullet M)^T = H \bullet M^T$ pour tout temps d'arrêt, on voit ici que $Y(n) = Y(n+1)^{T_n}$.

Comme on l'a déjà fait plusieurs fois on construit, en "recollant" les morceaux des $Y(n)$, un processus $Y$ satisfaisant $Y^{T_n} = Y(n)$ pour tout $n$. On a $Y \in \mathcal{M}^c_{loc}$ et $Y_0 = 0$, et aussi $\langle Y^{T_n}, N\rangle = H \bullet \langle M^{T_n}, N\rangle$ pour tout $n$, donc $\langle Y, N\rangle = H \bullet \langle M, N\rangle$. Ainsi, $H \bullet M = Y$ vérifie les conditions requises. Enfin dans la situation de (b) et avec $T_n$ comme ci-dessus, $H \bullet M^{T_n}$ est donné par (3.4.3) pour chaque $n$, et en "recollant" de nouveau les morceaux on obtient (3.4.3) pour $M$. □

Compte tenu de la caractérisation (a) ci-dessus de l'intégrale stochastique, la proposition suivante est évidente:

**Proposition 3.4.4.** *Soit $M, N \in \mathcal{M}^c_{loc}$.*

*a) Si $H \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$, pour tout temps d'arrêt $T$ on a $H 1_{[0,T]} \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$ et $H \bullet M^T = (H 1_{[0,T]}) \bullet M = (H \bullet M)^T$. En particulier $1_{[0,T]} \bullet M = M^T - M_0$.*

*b) Si $H, K \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $aH + K \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$ et $(aH + K) \bullet M = a(H \bullet M) + K \bullet M$.*

*c) $HK \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$ si et seulement si $K \in \mathbb{L}^2_{loc}(H \bullet M)$, et alors $(HK) \bullet M = K \bullet (H \bullet M)$.*

*d) Si $H \in \mathbb{L}^2_{loc}(M) \cap \mathbb{L}^2_{loc}(N)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $H \in \mathbb{L}^2_{loc}(aM + N)$ et $H \bullet (aM + N) = a(H \bullet M) + H \bullet N$.*

*e) Si $H \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$, on a*

$$\langle H \bullet M, H \bullet M\rangle \;=\; H^2 \bullet \langle M, M\rangle. \tag{3.4.9}$$

### 3.4.2 Intégrale par rapport à $X \in \mathcal{S}^c$

.

Soit maintenant $X \in \mathcal{S}^c$. On a une décomposition unique de $X$ en $X = X_0 + M + A$, où $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ avec $\mu_0 = 0$ et $A \in \mathcal{A}^c$. On définit l'intégrale stochastique $H \bullet X$ ainsi:

$$H \bullet X \;=\; H \bullet M + H \bullet A, \tag{3.4.10}$$

dès que $H$ est un processus *progressivement mesurable* tel que

$$H^2 \bullet \langle M, M\rangle_t + |H| \bullet V(A)_t \;<\; \infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4.11}$$

On note $\mathbb{L}(X)$ la classe de tous les $H$ comme ci-dessus, ou plutôt des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $H \sim K$ si $|H-K|^2 \bullet \langle M,M\rangle + |H-K| \bullet V(A)$ est indistinguable de 0.

Au vu de la proposition 3.4.4, du théorème 3.4.3-(b) et des propriétés de l'intégrale par rapport à un processus à variation finie (donc, en définitive, de l'intégrale usuelle par rapport à une mesure), les résultats suivants sont tous immédiats:

**Proposition 3.4.5.** *Soit $X, Y \in \mathcal{S}^c$.*

*a) Si $H \in \mathbb{L}(X)$, alors $H \bullet X \in \mathcal{S}^c$.*

*b) Si $H \in \mathbb{L}(X)$, pour tout temps d'arrêt $T$ on a $H1_{[0,T]} \in \mathbb{L}(X)$ et $H \bullet X^T = (H1_{[0,T]}) \bullet X = (H \bullet X)^T$. En particulier $1_{[0,T]} \bullet X = X^T - X_0$.*

*c) Si $H, K \in \mathbb{L}(X)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $aH+K \in \mathbb{L}(X)$ et $(aH+K)\bullet X = a(H\bullet X)+K\bullet X$.*

*d) $HK \in \mathbb{L}(X)$ si et seulement si $K \in \mathbb{L}(H \bullet X)$, et alors $(HK) \bullet X = K \bullet (H \bullet X)$.*

*e) Si $H \in \mathbb{L}(X)\cap\mathbb{L}(Y)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $H \in \mathbb{L}(aX+Y)$ et $H \bullet (aX+Y) = a(H \bullet X) + H \bullet Y$.*

*f) Si $H \in \mathbb{L}(X)$ et si $X \in \mathcal{M}_{loc}$ (resp. $X \in \mathcal{A}$), alors $H \bullet X \in \mathcal{M}_{loc}$ (resp. $X \in \mathcal{A}$).*

*g) $\mathbb{L}(X)$ contient tous les processus progressivement mesurables qui sont "localement bornés" au sens où il existe une suite $(T_n)$ de temps d'arrêt croissant vers l'infini, telle que chaque processus $H^{T_n}$ soit un processus borné.*

*h) Si $H$ est de la forme (3.4.2), alors $H \bullet X$ est donné par (3.4.3) (avec $X$ à la place de $M$) dès que $H$ est dans $\mathbb{L}(X)$.*

On a de plus un analogue du théorème de convergence dominée de Lebesgue:

**Théorème 3.4.6.** *Soit $X \in \mathcal{S}^c$ et $H(n)$ une suite de processus progressivement mesurables convergeant simplement vers un processus limite $H$. Si de plus il existe $K \in \mathbb{L}(X)$ tel que $|H(n)| \le K$ identiquement, pour tout $n$, alors $H(n)$ et $H$ appartiennent à $\mathbb{L}(X)$, et on a pour tout $t$:*

$$\sup_{s\le t} \ |H(n) \bullet X_s - H \bullet X_s| \ \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} \ 0. \tag{3.4.12}$$

**Preuve.** Il est évident que $H$ est progressivement mesurable. Vu (3.4.11), il est également évident que $H_n$ et $H$ appartiennent à $\mathbb{L}(X)$.

Etant donné (3.4.10), il suffit de montrer (3.4.11) séparément lorsque $X = M$ et lorsque $X = A$. Dans le second cas, (3.4.11) est le théorème de Lebesgue usuel (et la convergence a lieu p.s.). Supposons alors $X = M$. On considère une suite localisante $(T_p)$ telle que $X^{T_p} \in \mathcal{H}_0^{2,c}$ et $K \in \mathbb{L}^2(X^{T_p})$ pour tout $p$. Supposons qu'on ait (3.4.12) pour chaque $X^{T_p}$ au lieu de $X$. On a alors

$$\sup_{s\le \min(t,T_p)} \ |H(n) \bullet X_s - H \bullet X_s| \ \stackrel{\mathbb{P}}{\longrightarrow} \ 0$$

pour chaque $p$, en vertu de la proposition 3.4.4-(a). Comme $T_p \uparrow \infty$, on en déduit immédiatement (3.4.12) pour $X$.

Il nous reste donc à montrer (3.4.12) quand $X \in \mathcal{H}_0^{2,c}$ et $K \in \mathbb{L}^2(X)$. D'après l'inégalité de Doob (2.4.3), puis (3.4.9) et le théorème 3.3.8, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\sup_{s\le t}|H(n)\bullet X_s - H\bullet X_s|^2\Big) &\le 4\,\mathbb{E}\Big(|H(n)\bullet X_t - H\bullet X_t|^2\Big) \\ &= 4\,\mathbb{E}\Big((H(n)-H)^2\bullet\langle M,M\rangle_t\Big). \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Comme $|H(n)-H| \le 2K$ et que $\mathbb{E}(K^2\bullet\langle M,M\rangle_t) < \infty$, le théorème de convergence dominée usuel entraîne que (3.4.13) converge vers 0, et (3.4.12) s'ensuit. □

Terminons par le fait que l'intégrale stochastique peut, dans certains cas, être approchée par des "sommes de Riemann" à la manière des intégrales ordinaires. On considère une suite de subdivisions $(t(n,i))$ de pas tendant vers 0 (voir avant le théorème 3.2.4). Si $X$ est une semimartingale continue et $H$ un intégrand quelconque, on considère alors pour chaque $t$ les sommes de Riemann associées à des subdivisions:

$$I(H,X,n)_t \;=\; \sum_{i:\,t(n,i)\le t} H_{t(n,i-1)}(X_{t(n,i)} - X_{t(n,i-1)}). \tag{3.4.14}$$

Même lorsque $X_t = t$ (ce qui revient à dire qu'on calcule des intégrales ordinaires, par rapport à la mesure de Lebesgue), ces sommes ne convergent vers l'intégrale $\int_0^t H_s\,ds$ que sous certaines de conditions de régularité sur $H$. Dans le cas présent, outre cette régularité il faut aussi supposer le processus adapté.

**Proposition 3.4.7.** *Si $X \in \mathcal{S}^c$ et si $H$ est un processus localement borné, adapté, continu à gauche, alors $H \in \mathbb{L}(X)$ et on a pour tout $t$:*

$$\sup_{s\le t}\; |I(H,X,n)_s - H\bullet X_s| \;\xrightarrow{\mathbb{P}}\; 0. \tag{3.4.15}$$

**Preuve.** Les hypothèses impliquent que $H$ est progressivement mesurable, donc $H \in \mathbb{L}(X)$ par la proposition 3.4.5-(g). Exactement comme dans la preuve précédente, par localisation il suffit de montrer le résultat lorsque $H$ est borné, ce que nous supposerons dans la suite.

Soit alors $H(n)$ le processus défini par

$$H(n)_t \;=\; H_0\;1_{\{0\}}(t) + \sum_{i\ge 1} H_{t(n,i-1)}\;1_{]t(n,i-1),t(n,i)]}(t).$$

En vertu de la proposition 3.4.5-(h), on a $I(H,X,n) = H(n)\bullet X$. Par ailleurs $H(n) \to H$ simplement puisque $H$ est càg. Le résultat découle alors immédiatement du théorème précédent. □

**Remarque 3.4.8.** 1) Contrairement au cas des intégrales ordinaires, si $H$ est continu (borné adapté) et si on écrit $H_{t(n,i+1)}$ au lieu de $H_{t(n,i)}$ ci-dessus les sommes $I(H,X,n)_t$ ne convergent plus vers l'intégrale stochastique, et en général ne convergent vers rien du tout.

2) Pour *tous* processus $X$ et $H$, on peut évidemment définir $I(H,X,n)$ par (3.4.14. Supposons toujours $H$ adapté, càg, et disons borné. Il se trouve que les $I(H,X,n)_t$ convergent vers une limite quand $X \in \mathcal{S}^c$ comme on l'a vu, mais aussi quand $X \in \mathcal{S}$ est discontinue. La limite est encore appelée l'intégrale stochastique $H \bullet X_t$. On peut ensuite prolonger l'intégrale stochastique à la plus grande classe possible d'intégrands bornés, qui est l'ensemble des processus *prévisibles* en général (noter que $H$ est prévisible, s'il est adapté càg). Dans le cas où $X$ est discontinue, il n'est pas possible en général de définir l'intégrale stochastique pour les processus bornés progressivement mesurables, ou même optionnels, si on veut préserver les propriétés essentielles de linéarité et de convergence dominée (théorème 3.4.6).

3) Si maintenant $X$ n'est pas une semimartingale (mais est toujours càdlàg, bien-sûr), la situation est pire: il *n'existe pas* d'intégrale stochastique, linéaire et vérifiant le théorème de convergence dominée, qui permette d'intégrer la classe des processus prévisibles bornés et qui soit la limite des $I(H,X,n)$ quand en plus $H$ est càg. La possibilité de définir l'intégrale stochastique prévisible est donc une *caractérisation* des semimartingales (théorème de Bicheteler-Dellacherie-Mokobodski).

Terminons par un résultat sur la variation quadratique des semimartingales. Ce qui suit est une extension du théorème 3.2.7-(f), et nous utilisons la notation $S(M,N,n)$ de (3.2.9).

**Théorème 3.4.9.** *Soit $X$ et $Y$ deux semimartingales continues de décompositions canoniques $X = X_0+M+A$ et $Y = Y_0+N+B$. Pour toute suite de subdivisions de pas tendant vers 0, on a*

$$S(X,Y,n)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M,N\rangle_t \tag{3.4.16}$$

*et cette convergence a même lieu, en probabilité, uniformément en $t$ sur tout compact.*

**Preuve.** Comme dans le théorème 3.2.4 la dernière assertion découle de (3.4.16). Vu (3.2.11) il suffit donc de montrer que, pour chaque $t$,

$$S(X,Y,n)_t - S(M,N,n)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Le membre de gauche ci-dessus s'écrit $S(A,N,n)_t + S(B,M,n)_t + S(A,B,n)_t$. Soit $\varepsilon_{n,t} = \sup(|N_r - N_s| : r,s \leq t, |r-s| \leq m_n(t))$ (où $m_n(t)$ est le pas en $t$ de la subdivision $(t(n,i))$). Vu le lemme 3.1.1, on a $S(A,N,n)_t \leq \varepsilon_{n,t}V(A)_t$, et comme $\varepsilon_{n,t} \to 0$ quand $n \to \infty$ parce que $N$ est continu et $m_n(t) \to 0$, on a $S(A,N,n)_t(\omega) \to 0$ pour tout $\omega$. Les convergences $S(B,M,n)_t(\omega) \to 0$ et $S(A,B,n)_t(\omega) \to 0$ sont montrées de la même manière, d'où le résultat. $\square$

Ainsi $\langle M,N\rangle$ est la "covariation quadratique" de $X$ et $Y$, et $\langle M,M\rangle$ la variation quadratique de $X$. Pour des raisons d'homogénéité de notations, on posera

$$\langle X,Y\rangle \ = \langle M,N\rangle\ . \tag{3.4.17}$$

En particulier si $X \in \mathcal{S}^c$ et $A \in \mathcal{A}^c$, on a

$$\langle X,A\rangle \ = \ 0. \tag{3.4.18}$$

### 3.4.3 Projection d'une martingale locale sur une autre

Considérons deux éléments $M$ et $N$ de $\mathcal{H}_0^{2,c}$. Ces deux martingales sont "orthogonales" au sens de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_0^{2,c}$ si et seulement si $\mathbb{E}(M_\infty N_\infty) = 0$. Mais il y a une autre notion d'orthogonalité, liée à la covariation quadratique $\langle M, N\rangle$, qui a les mêmes propriétés qu'un produit scalaire (sauf que c'est un processus stochastique !).

Ainsi, on dira que $M$ et $N$ (éléments de $\mathcal{H}_0^{2,c}$, ou plus généralement de $\mathcal{M}_{loc}^c$ et nulles en 0) sont *des martingales locales orthogonales* si le produit $MN$ est une martingale locale, ou de manière équivalente (vu le théorème 3.3.8) si on a

$$\langle M, N\rangle \;=\; 0. \tag{3.4.19}$$

On a alors le résultat suivant, un peu analogue à la possibilité de "projeter" orthogonalement un vecteur sur un autre dans un espace de Hilbert. Nous commençons par la version "de carré intégrable". Le fait de prendre des martingales nulles en 0 n'est aucunement essentiel.

**Théorème 3.4.10.** *Soit $M \in \mathcal{H}_0^{2,c}$.*

*a) L'ensemble $\{H \bullet M : \; H \in \mathbb{L}^2(M)\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}^2$.*

*b) Pour tout $N \in \mathcal{H}_0^{2,c}$ il existe $H \in \mathbb{L}^2(M)$ tel que*

$$N \;=\; H \bullet M + N', \tag{3.4.20}$$

*où $N'$ est un élément de $\mathcal{H}_0^{2,c}$ tel que $MN'$ soit une martingale uniformément intégrable, et la décomposition (3.4.20) est unique à l'indistinguabilité près. Enfin on a*

$$\langle N, M\rangle \;=\; H \bullet \langle M, M\rangle. \tag{3.4.21}$$

**Preuve.** a) L'ensemble $\mathcal{H}$ des $H \bullet M$ avec $H \in \mathbb{L}^2(M)$ est évidemment un espace vectoriel, et il reste à montrer qu'il est fermé. Soit $M(n) = H(n) \bullet M$ une suite dans $\mathcal{H}$, qui converge au sens de $\mathcal{H}^2$ vers une limite $N$. Vu (3.4.4) et le théorème 3.3.8 on a aussi

$$\begin{aligned}
\|H(n) - H(m)\|^2_{\mathbb{L}^2(M)} &= \mathbb{E}\left((H(n) - H(m))^2 \bullet \langle M, M\rangle_\infty\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\langle M(n) - M(m), M(n) - M(m)\rangle_\infty\right) \\
&= \mathbb{E}\left((M(n)_\infty - M(m)_\infty)^2\right),
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n, m \to \infty$. Donc $H(n)$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(M)$ (qui est, comme on l'a vu, l'espace $\mathbb{L}^2$ d'une mesure finie sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ muni de la tribu progressive). Par suite $H(n)$ converge vers une limite $H$ dans cet espace, et les $M(n)$ convergent vers $H \bullet M$ dans $\mathcal{H}^2$. Il en découle que $N = H \bullet M$, et on a le résultat.

b) Si $N \in \mathcal{H}_0^{2,c}$, on peut la projeter orthogonalement au sens de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2$ sur $\mathcal{H}$, donc $N$ s'écrit $N = H \bullet M + N'$ avec $N'$ orthogonale à $\mathcal{H}$, et cette décomposition est unique. Pour obtenir l'unique décomposition (3.4.20) il reste à montrer que les deux propriétés

(1) $N'$ est orthogonale à $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}^2$,

(2) $MN'$ est une martingale uniformément intégrable,

sont équivalentes. Si on a (1) alors $\mathbb{E}(N'_\infty(H \bullet M)_\infty) = 0$ pour tout $H \in \mathbb{L}^2(M)$. Prenons $H = 1_{]0,T]}$ pour un temps d'arrêt $T$ (clairement dans $\mathbb{L}^2(M)$), donc $H \bullet M_\infty = M_T$, donc par le théorème d'arrêt

$$\mathbb{E}(N'_\infty\, M_T) \;=\; \mathbb{E}(N'_T M_T) \;=\; 0.$$

Donc $MN'$ est une martingale par le lemme 3.4.2, et l'uniforme intégrabilité vient de ce que $M, N' \in \mathcal{H}^2$. A l'inverse, supposons (2). Soit $H \in \mathbb{L}^2(M)$; on a $\langle M, N'\rangle = 0$, donc $\langle H \bullet M, N'\rangle = H \bullet \langle M, N'\rangle = 0$, donc $(H \bullet M)N'$ est encore une martingale uniformément intégrable, donc $\mathbb{E}((H \bullet M)_\infty N'_\infty) = 0$ et on a (1).

Enfin, comme $\langle M, N'\rangle = 0$, (3.4.21) est immédiat. □

**Théorème 3.4.11.** *Soit $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. Toute $N \in \mathcal{M}^c_{loc}$ nulle en 0 se met de manière unique (à l'indistinguabilité près) sous la forme (3.4.20), avec $H \in \mathbb{L}^2_{loc}(M)$ et $N'$ orthogonale à $M$ au sens des martingales locales. De plus, on a encore (3.4.21).*

**Preuve.** Cela découle de manière immédiate, par localisation (on rappelle (3.3.3)), du théorème précédent. □

## 3.5 La formule d'Itô

Si $A$ et $B$ sont deux fonctions continues à variation finie, et si $f$ est une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'$, on a les deux formules suivantes:

$$f(A_t) \;=\; f(0) + \int_0^t f'(A_s)\, dA_s, \tag{3.5.1}$$

$$A_t B_t \;=\; \int_0^t A_s\, dB_s + \int_0^t B_s\, dA_s. \tag{3.5.2}$$

La première est la "formule du changement de variable", la seconde la "formule d'intégration par parties". Ces deux formules sont bien connues, et aussi très facile à montrer (en suivant par exemple le schéma de ce qui va suivre, mais en bien plus simple).

Notre objectif est de généraliser ces deux formules quand on remplace $A$ et $B$ par des semimartingales continues. La plus facile à généraliser est (3.5.2):

**Théorème 3.5.1.** *Si $X$ et $Y$ sont dans $\mathcal{S}^c$, on a*

$$X_t Y_t \;=\; X_0 Y_0 + X \bullet Y_t + Y \bullet X_t + \langle X, Y\rangle_t, \tag{3.5.3}$$

$$X_t^2 \;=\; X_0^2 + 2X \bullet X_t + \langle X, X\rangle_t. \tag{3.5.4}$$

**Preuve.** (3.5.4) est un cas particulier de (3.5.3), et à l'inverse (3.5.3) se déduit de (3.5.4) par polarisation (en écrivant $XY = \frac{1}{4}\left((X+Y)^2 - (X-Y)^2\right)$ et de même pour les variations quadratiques, et en appliquant la seconde formule à $X+Y$ et $X-Y$).

On prend une suite de subdivisions $(t(n,i))$ de pas tendant vers 0. D'après (3.4.15),

$$\begin{aligned}
2X \bullet X_t &= \mathbb{P} - \lim_n \; 2 \sum_{i\geq 1:\, t(n,i)\leq t} X_{t(n,i-1)}(X_{t(n,i)} - X_{t(n,i-1)}) \\
&= \mathbb{P} - \lim_n \left( \sum_{i\geq 1:\, t(n,i)\leq t} (X^2_{t(n,i)} - X^2_{t(n,i-1)}) - \sum_{i\geq 1:\, t(n,i)\leq t} (X_{t(n,i)} - X_{t(n,i-1)})^2 \right) \\
&= X_t^2 - X_0^2 - \langle X, X\rangle_t,
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé la continuité de $X$ pour la première somme, et (3.4.16) pour la seconde. □

Si on applique (3.5.4) au MB $W$, on obtient en particulier

$$W_t^2 \;=\; 2\int_0^t W_s\, dW_s + t. \tag{3.5.5}$$

**Théorème 3.5.2. (Formule d'Itô)** *Soit $X = X^1, \cdots, X^d)$ un processus d-dimensionnel dont les composantes $X^i$ sont dans $\mathcal{S}^c$. Soit $f$ une fonction réelle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^d$, dont les dérivées partielles premières et secondes sont notées $f_i'$ et $f_{ij}''$. Le processus $f(X_t)$ est une semimartingale p.s. continue, donnée par la formule*

$$f(X_t) \;=\; f(X_0) + \sum_{i=1}^d f_i'(X) \bullet X_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(X) \bullet \langle X^i, X^j\rangle_t. \tag{3.5.6}$$

**Preuve.** Comme $f$ est de classe $C^2$, les fonctions $f_i'$ et $f_{ij}''$ sont continues, donc les processus $f_i'(X)$ et $f_{ij}''(X)$ sont localement bornés. Toutes les intégrales dans (3.5.6) ont donc un sens. Par ailleurs chacun des processus du membre de droite est une semimartingale continue (proposition 3.4.5-(a)), donc il en est de même de $f(X)$ si la formule est vraie.

Il nous reste à montrer (3.5.6), ce qu'on va faire pour des fonctions $f$ de plus en plus générales, jusqu'à atteindre $C^2$. Les coordonnées d'un point $x$ de $\mathbb{R}^d$ seront notées $x_i$.

1) Lorsque $f$ est une constante (3.5.6) est triviale. Si $f(x) = x_i$, (3.5.6) se réduit à $X_t^i = X_0^i + 1 \bullet X_t^i$, et elle est donc vraie. Si $f(x) = x_i x_j$ (3.5.6) est exactement (3.5.3) pour $X^i$ et $X^j$, donc elle est encore vraie.

2) Supposons (3.5.6) vraie pour une certaine fonction $g$, de sorte que $Y = g(X)$ est une semimartingale. En appliquant (3.5.3) à $X^i$ et à $Y$, on obtient facilement (3.5.6) pour la fonction produit $f(x) = g(x)x_i$. Par ailleurs si (3.5.6) est vraie pour $f$ et $g$, elle est aussi trivialement vraie pour $af + g$, où $a \in \mathbb{R}$. Par suite la formule est vraie lorsque $f$ est un polynôme quelconque.

3) Par localisation, il suffit de montrer la formule pour chaque processus $X^{T_n}$, où $T_n = \inf(t : |X_t| \geq n)$, ce qui revient à supposer que $X$ ne sort pas d'un compact $K$ de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, les valeurs de $f$ en dehors de $K$ ne jouent aucun rôle, de sorte qu'on peut aussi supposer $f$ à support compact, disons $[a, b]^d$ (d'intérieur contenant $K$). On va montrer (3.5.6) dans ce cas, lorsqu'en plus on suppose $f$ de classe $C^\infty$.

Sous ces hypothèses, on voit facilement (par récurrence sur la dimension) que si $x \in [a,b]^d$,

$$f(x) \;=\; \int_a^{x_1} dy_1 \cdots \int_a^{x_d} dy_d \int_a^{y_1} dz_1 \cdots \int_a^{y_d} g(z_1, \cdots, z_d) dz_d.$$

où $g = \frac{\partial^{2d} f}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_d^2}$. D'après le théorème de Stone -Weierstrass on peut approcher $g$ uniformément sur $[a,b]^d$ par une suite $g_n$ de polynômes. Chaque fonction

$$f_n(x) \;=\; \int_a^{x_1} dy_1 \cdots \int_a^{x_d} dy_d \int_a^{y_1} dz_1 \cdots \int_a^{y_d} g_n(z_1, \cdots, z_d) dz_d$$

est la restriction à $[a,b]^d$ d'un polynôme et comme $X$ ne sort pas de $[a,b]^d$ on a (3.5.6) pour chaque $f_n$. Par ailleurs, $f_n$ et ses dérivées partielles d'ordres 1 et 2 converge vers $f$ et ses dérivées partielles, uniformément sur $[a,b]^d$. Donc grâce au théorème 3.4.6 on peut passer terme-à-terme à la limite dans l'équation (3.5.6) écrite pour $f_n$, et on obtient la même équation pour $f$.

4) Il reste à montrer (3.5.6) quend $f$ est $C^2$ à support compact. On choisit une fonction $\phi$, $C^\infty$ à support dans $[0,1]^d$ et d'intégrale 1, on pose $\phi_n(x) = n\phi(nx)$, et enfin $f_n = f * \phi_n$ (produit de convolution). Les $f_n$ sont $C^\infty$ à support compact, donc vérifient (3.5.6). Enfin $f_n$ et ses dérivées partielles d'ordres 1 et 2 converge vers $f$ et ses dérivées partielles, uniformément sur $\mathbb{R}^d$ (c'est ici qu'intervient le fait que les dérivées secondes de $f$ sont continues), et on conclut comme dans l'étape précédente. $\square$

# Chapitre 4

# Applications au mouvement brownien

## 4.1 Caractérisation de Lévy et changements de temps

On suppose donné un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{F}$ càd.

**Théorème 4.1.1.** *Soit $X = (X^1, \cdots, X^d)$ un processus $d$-dimensionnel adapté p.s. continu et nul en 0. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

*(a) $X$ est un $\mathbb{F}$-MB.*

*(b) Les $X^i$ sont des martingales locales, ainsi que les $X^i X^j$ si $i \neq j$ et les $(X^i_t)^2 - t$* **(caractérisation de P. Lévy du MB).**

*(c) Les $X^i$ sont des martingales locales, et $\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t$.*

*(d) Pour toute fonction $f$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^d$, le processus*

$$M^f_t \;=\; f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(X_s)\, ds \tag{4.1.1}$$

*($\Delta f$ désigne le laplacien de $f$) est une martingale locale.*

*(e) Pour toute fonction $f$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^d$, bornée et à dérivées premières et secondes bornées, le processus $M^f$ ci-desus est une martingale.*

*(f) Pour toute fonction de la forme $f(x) = \exp i \sum_{j=1}^d u_j x_j$ le processus $M^f$ ci-dessus est une martingale (à valeurs complexes, ce qui veut dire que les parties réelle et imaginaire sont des martingales).*

**Preuve.** (a) $\Rightarrow$ (b) (voir l'exemple 2.3.2), et (b) $\Leftrightarrow$ (c) est évident. (c) $\Rightarrow$ (d) est une application immédiate de la formule d'Itô, (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f) dont évidents. Il reste à montrer (f) $\Rightarrow$ (a).

Sous (f), on a $M^{f_u} \in \mathcal{M}^c$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, où $f_u(x) = \exp i \sum_{j=1}^d u_j x_j$. On a $\Delta f_u = -\|u\|^2 f_u$. On a aussi $f_u(X_{s+t}) = f_u(X_s) f_u(X_{s+t} - X_s)$ si $s, t \geq 0$, donc l'égalité des martingales pour $M^{f_u}$ nous donne pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, et avec la notation $Y_t = X_{s+t} - X_s$:

$$\mathbb{E}\left(1_A \ f_u(X_s) \left(f_u(Y_t) - 1 + \frac{\|u\|^2}{2} \int_0^t f_u(Y_r)\, dr\right)\right) \ = \ 0.$$

En appliquant Fubini, on voit que la fonction continue $h(t) = \mathbb{E}\Big(1_A \ f_u(X_s) f_u(Y_t)\Big)$ vérifie $h(t) = h(0) - \frac{\|u\|^2}{2} \int_0^t h(r)\, dr$, donc vaut $h(0) \exp -t\|u\|^2/2$, ce qui s'écrit

$$\mathbb{E}\left(1_A \ f_u(X_s) \ f_u(Y_t)\right) \ = \ \mathbb{E}\left(1_A \ f_u(X_s)\right) \ e^{-t\|u\|^2/2}.$$

Comme $A$ est arbitraire dans $\mathcal{F}_s$ et $f_u$ ne s'annule pas, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(f_u(Y_t) \mid \mathcal{F}_s\right) \ = \ e^{-t\|u\|^2/2}.$$

Si $Q(\omega, dx)$ désigne une version régulière de la loi conditionnelle de $Y_t$ sachant $\mathcal{F}_s$, et $\widehat{Q}(\omega, u)$ est sa fonction caractéristique, on en déduit que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ on a $\widehat{Q}(., u) = e^{-t\|u\|^2/2}$ p.s. A cause de la continuité en $u$, on a en fait $\widehat{Q}(\omega, u) = e^{-t\|u\|^2/2}$ pour tout $u$, et tout $\omega$ en dehors d'un négligeable $N$. Mais cela veut dire que la loi conditionnelle de $X_{s+t} - X_t$ sachant $\mathcal{F}_s$ est $\mathcal{N}(0, tI_d)$ (non aléatoire), de sorte que $X_{s+t} - X_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et de loi $\mathcal{N}(0, tI_d)$: On a donc (a). $\square$

En particulier, le MB est "l'unique martingale continue de variation quadratique $t$". On peut aussi traduire ce résultat ainsi: considérons l'espace $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni du processus canonique $X_t(x) = x(t)$, et de la filtration $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$ engendrée par $X$, et enfin $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. On a alors:

**Corollaire 4.1.2.** *Sur l'espace canonique décrit ci-dessus, la mesure de Wiener est l'unique probabilité sous laquelle les deux processus $X$ et $X_t^2 - t$ sont des martingales (ou, des martingales locales).*

Trouver toutes les probabilités faisant d'un certain nombre de processus spécifiés des martingales (locales) s'appelle résoudre un *problème de martingales*. Nous en verrons d'autres exemples plus tard.

Passons maintenant aux changements de temps.

**Théorème 4.1.3.** *Soit $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$, nulle en 0, telle que $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$ p.s. Soit aussi*

$$\tau_t \ = \ \inf(s : \langle M, M\rangle_s > t). \tag{4.1.2}$$

*a) Chaque variable $\tau_t$ est un temps d'arrêt, elles sont p.s. toutes finies, et le processus $\widehat{M}_t = M_{\tau_t}$ (défini en dehors d'un négligeable) est un MB relativement à la filtration $\widehat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$.*

*b) En dehors d'un ensemble négligeable, on a pour tout $t$:*

$$M_t \ = \ \widehat{M}_{\langle M, M\rangle_t}. \tag{4.1.3}$$

L'opération qui fait passer de $M$ à $\widehat{M}$ s'appelle un *changement de temps*. Le processus $\tau_t$ est càd et croissant, à valeurs finies (puisque $\langle M,M\rangle_\infty = \infty$), mais pas forcément continu, ni nul en 0. La formule (4.1.2) s'inverse, et on a (vérification triviale):

$$\langle M,M\rangle_t \;=\; \inf(s:\tau_s>t), \tag{4.1.4}$$

et (4.1.3) nous dit donc que $M$ est obtenu par changement de temps à partir de $\widehat{M}$; on dit souvent "la martingale $M$ est un brownien changé de temps". Remarquer toutefois l'hypothèse sur $\langle M,M\rangle$, qui sera levée dans un résultat ultérieur au prix d'un résultat un peu moins bon.

Commençons par un lemme, qui a son propre intérêt.

**Lemme 4.1.4.** *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $\omega$ en dehors d'un ensemble négligeable $N$ les deux fonctions $t\mapsto M_t(\omega)$ et $t\mapsto \langle M,M\rangle_t(\omega)$ ont les mêmes intervalles de constance.*

**Preuve.** Soit $N_0$ le négligeable en dehors duquel les trajectoires de $M$ et $\langle M,M\rangle$ sont continues. Pour tout $t$ on pose $T_t=\inf(s>t:M_s\neq M_t)$ et $S_t=\inf(s>t:\langle M,M\rangle_s\neq \langle M,M\rangle_t)$. Il est clair qu'on a la propriété de l'énoncé en dehors de l'ensemble $N_0\cup(\cup_{t\geq0}\{T_t\neq S_t\})$, et que cet ensemble est le même que $N=N_0\cup(\cup_{r\in\mathbb{Q}_+}\{T_r\neq S_r\})$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{P}(T_t=S_t)=1$ pour tout $t$.

Les variables $T_t$ et $S_t$ sont des temps d'arrêt supérieurs à $t$. Si $R$ est un temps d'arrêt avec $R\geq t$,

$$\langle M^R-M^t,M^R-M^t\rangle \;=\; \langle M,M\rangle^R-\langle M,M\rangle^t. \tag{4.1.5}$$

Appliquons ceci avec $R=T_t$, donc $M^R-M^t$ est indistinguable de 0 donc le membre de gauche de (4.1.5) est p.s. nul, donc aussi celui de droite, donc $T_t\leq S_t$ p.s. Appliquons (4.1.5) avec $R=S_t$, donc le membre de droite est nul, donc aussi celui de gauche, donc $M^{T_t}-N^t$ est indistinguable de 0 par la proposition 3.2.8, donc $T_t\geq S_t$ p.s., et le résultat est prouvé. $\square$

**Preuve du théorème.** Les résultats cherchés sont tous "à un ensemble négligeable près". Donc, quitte à les prouver sur $\Omega'=\Omega\backslash N$ muni des tribus et de la probabilité trace, où $N$ est un ensemble négligeable, puis à revenir à $\Omega$, on peut supposer que $M$ et $\langle M,M\rangle$ sont continus nuls en 0 et $T_t=S_t$ pour tout $t$ (notations de la preuve du lemme précédent) et $\langle M,M\rangle_\infty=\infty$, pour tout $\omega$.

Comme $\{\tau_t<s\}=\{\langle M,M\rangle_s>t\}$, $\tau_t$ est un temps d'arrêt fini. Le processus $M$ étant continu, la formule (4.1.3) définit une variable $\widehat{M}_t$ qui est $\widehat{\mathcal{F}}_t$-mesurable (proposition 2.2.4).

La fonction $t\mapsto\tau_t$ est croissante càd, donc $\widehat{M}$ est càdlàg. Si $\tau$ est continue en $t$ alors $\widehat{M}$ est aussi continue en $t$. Si elle est discontinue en $t$, on a $\tau_{t-}=s<s'=\tau_t$ et $T_s=S_s=s'$, donc $\widehat{M}_t=M_{s'}=M_s$, qui est aussi la limite de $\widehat{M}_r$ quand $r\uparrow\uparrow t$, donc $\widehat{M}$ est encore continue en $t$. Comme $\widehat{M}_0=M_{\tau_0}=M_{S_0}=M_{T_0}=M_0=0$, on a donc montré que $\widehat{M}$ est continue nulle en 0. Enfin $\tau_{\langle M,M\rangle_t}=S_t$, de sorte que on a $\widehat{M}_{\langle M,M\rangle_t}=M_{S_t}=M_{T_t}=M_t$ pour tout $t$, ce qui est (4.1.3).

Etant donné l'équivalence de (a) et (b) dans le théorème 4.1.1, il nous reste à montrer que $\widehat{M}$ et $\widehat{Y}_t=\widehat{M}_t^2-t$ sont des martingales locales pour la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$, qui est clairement càd puisque $\mathbb{F}$ l'est et que $\tau$ est aussi càd. Soit $Y = M^2 - \langle M, M\rangle$. Comme $\langle M, M\rangle_{\tau_t} = t$, on a $\widehat{Y}_t = Y_{\tau_t}$.

Soit alors $R_n = \inf(t : |M_t| \geq n \text{ ou } |Y_t| \geq n)$. Chaque $R'_n = \langle M, M\rangle_{R_n}$ est un $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt, car $\{R'_n \leq t\} = \{\langle M, M\rangle_{R_n} \leq t\} = \{\tau_t \geq R_n\} \in \mathcal{F}_{\tau_t}$, et on a aussi $\tau_{R'_n} = S_{R_n}$, qui est aussi égal à $T_{R_n}$. Par suite si $Z = M$ ou si $Z = Y$, on a $Z^{\tau_{R'_n}} = Z^{R_n}$. Comme $Z^{R_n}$ est une martingale bornée (pour $\mathbb{F}$), il vient d'après le théorème d'arrêt, avec $\widehat{Z}_t = Z_{\tau_t}$:

$$\widehat{Z}_t^{R'_n} \;=\; Z_{\min(\tau_t, \tau_{R'_n})} \;\stackrel{\text{p.s.}}{=}\; Z_{\tau_t}^{R_n} \;=\; \mathbb{E}(Z_\infty^{R_n} \mid \mathcal{F}_{\tau_t}).$$

Par suite dans les deux cas $\widehat{Z}^{R'_n}$ est une martingale pour $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$, et comme $R'_n \to \infty$ on en déduit que $\widehat{M}$ et $\widehat{Y}_t = \widehat{M}_t^2 - t$ sont des martingales locales pour $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$. □

Lorsqu'on abandonne l'hypothèse $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$, les choses deviennent (encore) un peu plus compliquées. C'est facile à comprendre: si l'espace $\Omega$ est "trop petit" on ne peut définir aucun MB dessus; à l'extrême, si $\Omega$ n'a qu'un seul point la seule martingale nulle en 0 est $M \equiv 0$, et bien-sûr $\langle M, M\rangle = 0$ aussi, et il n'y a aucun MB $\widehat{M}$ sur cet espace tel qu'on puisse avoir (4.1.3).

L'idée est donc "d'augmenter" l'espace. On considère donc un autre espace filtré $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}', \mathbb{P}')$ sur lequel existe un MB (par exemple l'espace de Wiener). Puis on pose

$$\overline{\Omega} = \Omega \times \Omega', \qquad \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \qquad \overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'. \tag{4.1.6}$$

cela définit un nouvel espace probabilisé, appelé *extension* de l'espace initial.

**Théorème 4.1.5.** *Soit $M$ une martingale locale continue nulle en 0 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Il existe alors une extension $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ au sens précédent et un MB $W$ sur cette extension, tels qu'en dehors d'un ensemble $\overline{\mathbb{P}}$-négligeable on ait pour tout $t$:*

$$M_t \;=\; W_{\langle M, M\rangle_t}. \tag{4.1.7}$$

Là encore on commence avec un lemme intéressant en lui-même.

**Lemme 4.1.6.** *Soit $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$ et $A = \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\}$. Il existe un négligeable $N$ tel que si $\omega \in A \cap N^c$, alors $M_t(\omega)$ converge vers une limite finie $M_\infty(\omega)$ quand $t \to \infty$.*

**Preuve.** Soit $R_n = \inf(t : \langle M, M\rangle_t \geq n)$. D'après le théorème 3.3.8, le processus arrêté $M^{R_n}$ est dans $\mathcal{H}^2$, donc est une martingale uniformément intégrable. Par suite la proposition 2.4.2 implique qu'en dehors d'un négligeable $N_n$, $X_{\min(t, R_n)}$ converge vers une limite $X(n)_\infty$ quand $t \to \infty$. Soit $N = \cup_n N_n$. Si $\omega \in A \cap N^c$, on a $R_n(\omega) = \infty$ pour $n$ assez grand, donc $X_t(\omega) = X_{\min(t, R_n)}(\omega) \to X(n)_\infty(\omega)$, et on a le résultat. □

**Preuve du théorème.** On définit $\tau_t$ comme dans le théorème précédent, et $A$ et $N$ comme dans le lemme. Comme $\tau_t < \infty$ sur $A^c$, on peut poser $\widehat{M}_t = M_{\tau_t}$ sur $\{\tau_t < \infty\} \cup N^c$, et de manière arbitraire $\widehat{M}_t = 0$ sur le complémentaire de cet ensemble.

On peut reproduire la preuve du théorème précédent: $\widehat{M}$ est p.s. continu nul en 0, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_t})$, par rapport à laquelle c'est une martingale. On a (4.1.3). La seule différence est que le processus $\widehat{Y}$ qui est une martingale locale n'est pas $\widehat{M}_t^2 - t$, mais le processus $\widehat{Y}_t = \widehat{M}_t^2 - \min(t, \langle M, M\rangle_\infty)$.

Par ailleurs on sait que $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P})$ supporte un MB $B$. Posons

$$W_t(\omega, \omega') \;=\; \begin{cases} \widehat{M}_t(\omega) & \text{si } \; t \leq \langle M, M\rangle_\infty(\omega) \\ \widehat{M}_{\langle M,M\rangle_\infty}(\omega) + B_{t - \langle M,M\rangle_\infty(\omega)}(\omega') & \text{si } \; t > \langle M, M\rangle_\infty(\omega) \end{cases}$$

En utilisant l'indépendance de $B$ avec $(\widehat{M}, \langle M, M\rangle)$, due à (4.1.6), et le fait que $B$ et $B_t^2 - t$ d'une part, $\widehat{M}$ et $\widehat{M}_t^2 - \min(t, \langle M, M\rangle_\infty)$ d'autre part, sont des martingales locales relativement aux filtrations qu'ils engendrent, un calcul, simple mais un peu fastidieux et laissé au lecteur, permet alors de vérifier que $W$ et $W_t^2 - t$ sont des martingales locales sur l'extension, relativement à la filtration $\mathbb{F}^W$. Donc $W$, qui est p.s. continu nul en 0, est un MB, et (4.1.7) découle de (4.1.3). $\square$

**Remarque 4.1.7.** Une conséquence immédiate de ces deux théorèmes est que le comportement "local" des trajectoires d'une martingale (locale) *continue* quelconque est similaire à celui du MB. Par exemple, non seulement nous avons que si $M \in \mathcal{M}_{loc}^c \cap \mathcal{A}$ alors $M_t = M_0$ (ce qui est un résultat "global"), mais si $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$ alors, en dehors d'un négligeable, les trajectoires de $M$ sont à variation infinie sur tout intervalle où elles ne sont pas constantes, et en particulier elles ne sont pas dérivables aux points qui ne sont pas à l'intérieur des intervalles de constance. $\square$

## 4.2 Le théorème de Girsanov

Dans ce paragraphe nous examinons ce que deviennent les semimartingales quand on change (de manière absolument continue) la probabilité. On se donne l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, et on considère une autre probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Si $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$ (= $\mathbb{P}'$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ = pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$ on a $\mathbb{P}'(A = 0)$) on sait qu'il existe une variable positive $\mathcal{F}$-mesurable $Y$ (la dérivée de Radon-Nikodym) telle que $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{E}(1_A\, Y)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. On écrit aussi $Y = \frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}$, et $\mathbb{P}' = Y \bullet \mathbb{P}$, et bien entendu $Y$ n'est unique qu'à un $\mathbb{P}$-négligeable près (on a déjà utilisé toutes ces notions au paragraphe 3.1).

La condition $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$ est trop forte pour la plupart des applications, pour lesquelles on a seulement que $\mathbb{P}'$ est *localement absolument continue* par rapport à $\mathbb{P}$. Cette notion, relative à la filtration, signifie que $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$ en restriction à chaque tribu $\mathcal{F}_t$. On l'écrit $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$. Bien entendu, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ on a une dérivée de Radon-Nikodym $Z_t = d\mathbb{P}'_{|\mathcal{F}_t} / d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$, c'est-à-dire une variable positive $\mathcal{F}_t$-mesurable telle que

$$\mathbb{P}'(A) \;=\; \mathbb{E}(1_A\, Z_t) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_t. \tag{4.2.1}$$

On a bien-sûr $\mathbb{E}(Z_t) = 1$.

Dans la suite, s'il y a un risque d'ambiguité, on écrira $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}$ pour les espérances par rapport à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ respectivement. De même, pour une martingale on précise $\mathbb{P}$-martingale ou $\mathbb{P}'$-martingale, etc...

**Théorème 4.2.1.** *Supposons* $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$.

*a) Il existe une* $\mathbb{P}$*-martingale* $Z$*, unique à l'indistinguabilité près, telle que (4.2.1) soit vrai pour chaque* $t$. [$Z$ est appelé le "processus densité"].

*b) Pour tout temps d'arrêt fini* $T$*, on a* $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$ *en restriction à la tribu* $\mathcal{F}_T$*, et* $Z_T$ *est une version de la dérivée de Radon-Nikodym* $d\mathbb{P}'_{|\mathcal{F}_T}/d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_T}$.

*c)* $Z$ *est uniformément intégrable si et seulement si on a* $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$ *en restriction à la tribu* $\mathcal{F}_\infty$*, et alors* $Z_\infty$ *est une version de la dérivée de Radon-Nikodym* $d\mathbb{P}'_{|\mathcal{F}_\infty}/d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_\infty}$.

*d) On a* $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} Z_t > 0 \quad \mathbb{P}'$*-p.s.*

*e) Si* $Z_t > 0$ $\mathbb{P}$*-p.s. pour tout* $t$*, on a aussi* $\mathbb{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}'$ *et le processus densité de* $\mathbb{P}$ *par rapport à* $\mathbb{P}'$ *est* $1/Z$.

Noter que $Z$ est aussi une $\mathbb{P}$-surmartingale positive, donc $Z_t$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers une limite $Z_\infty \geq 0$ quand $t \to \infty$, et $\mathbb{E}_\mathbb{P}(Z_\infty) \leq 1$. On a alors la situation de (c) si et seulement si $\mathbb{E}_\mathbb{P}(Z_\infty) = 1$.

**Preuve.** a) Soit $Z'_t$ une version de la variable caractérisée par (4.2.1), pour chaque $t$. Si $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$ on a aussi $A \in \mathcal{F}_t$, donc $\mathbb{E}_\mathbb{P}(1_A\ Z'_t) = \mathbb{P}'(A)$ et aussi $\mathbb{E}_\mathbb{P}(1_A\ Z'_s) = \mathbb{P}'(A)$. Donc $\mathbb{E}_\mathbb{P}(Z'_t \mid \mathcal{F}_s) = Z'_s$, et chaque $Z'_t$ est $\mathbb{P}$-intégrable. Ainsi $(Z'_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathbb{P}$-martingale au sens de la définition 2.3.1, et en vertu du théorème 2.3.5 admet une modification $Z$ qui est une $\mathbb{P}$-martingale au sens du reste de ce cours, i.e. presque sûrement càdlàg.

b) Soit $A \in \mathcal{F}_T$. Comme $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, on a

$$\mathbb{P}'(A \cap \{T \leq t\}) \;=\; \mathbb{E}_\mathbb{P}\Big(1_A\ 1_{\{T \leq t\}}\ Z_t\Big) \;=\; \mathbb{E}_\mathbb{P}\Big(1_A\ 1_{\{T \leq t\}}\ Z_T\Big)$$

en vertu du théorème d'arrêt 2.4.3 appliqué au temps d'arrêt $\min(T, t)$. Comme $T$ est fini, en faisant $t \to \infty$ ci-dessus on obtient $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(1_A\ Z_T)$ par le théorème de limite monotone, d'où les résultats.

c) La proposition 3.3.4 implique que $Z$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une variable $Z_\infty$ telle que $Z_t \to Z_\infty$ dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{P})$, et alors $Z_t = \mathbb{E}_\mathbb{P}(Z_\infty \mid \mathcal{F}_t)$. Le résultat est alors immédiat (le fait que $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(1_A\ Z_\infty)$ pour tout $A \in \mathcal{F}_t$ et $t \in \mathbb{R}_+$ implique la même égalité pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$, par un argument de classe monotone).

d) Soit $T_n = \inf(t : Z_t \leq 1/n)$. On a $\mathbb{P}'(T_n \leq n) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(1_{\{T_n \leq n\}}\ Z_n)$, qui par le théorème d'arrêt appliqué à $\min(n, T_n)$ égale $\mathbb{E}_\mathbb{P}(1_{\{T_n \leq n\}}\ Z_{T_n})$, qui est évidemment $\leq 1/n$. Comme $\{\inf_{t \in \mathbb{R}_+} Z_t = 0\} \subset \limsup_n \{T_n \leq n\}$, on a le résultat.

e) Vu (d) le processus $1/Z$ est $\mathbb{P}'$-p.s. càdlàg, et le reste est évident. □

**Lemme 4.2.2. (Formule de Bayes)** *Supposons* $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$*, et soit* $Z$ *le processus densité. Pour tous* $s < t$ *et toute variable* $\mathcal{F}_t$*-mesurable, bornée ou positive, on a*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}(U \mid \mathcal{F}_s) \;=\; \frac{1}{Z_s}\ \mathbb{E}_\mathbb{P}(UZ_t \mid \mathcal{F}_s). \tag{4.2.2}$$

L'égalité ci-dessus est évidemment $\mathbb{P}'$-p.s., et on sait que $Z_t > 0$ $\mathbb{P}'$-p.s.

**Preuve.** Soit $V$ le membre de droite de (4.2.2). Si $A \in \mathcal{F}_s$ on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}(1_A\, V) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(1_A\, VZ_s) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big(1_A\, 1_{\{Z_s>0\}}\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(UZ_t \mid \mathcal{F}_s)\Big) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(1_A\, 1_{\{Z_s>0\}}\, UZ_t),$$

et comme $Z_s > 0$ $\mathbb{P}$-p.s. sur $\{Z_t > 0\}$ (théorème 2.4.5) cette dernière expression égale $\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}(1_A\, U)$. Puisque $V$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, on en déduit (4.2.2). □

**Proposition 4.2.3.** *Supposons $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$, et soit $Z$ le processus densité. Soit $M$ un processus adapté, $\mathbb{P}$-p.s. càdlàg. Pour que $M$ soit une $\mathbb{P}'$-martingale il faut et il suffit que $ZM$ soit une $\mathbb{P}$-martingale.*

**Preuve.** Il suffit clairement de montrer que si $s \leq t$, alors $\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ si et seulement si $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t M_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s M_s$, ce qui est conséquence triviale du lemme précédent. □

**Théorème 4.2.4. (Girsanov)** *Supposons $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$, et supposons que le processus densité $Z$ soit p.s. continu. Alors*

*a) Toute $\mathbb{P}$-semimartingale $\mathbb{P}$-p.s. continue est une $\mathbb{P}'$-semimartingale.*

*b) Si $X$ et $Y$ sont deux $\mathbb{P}$-semimartingales p.s. continues, la covariation quadratique $\langle X, Y\rangle$ est la même pour $\mathbb{P}$ et pour $\mathbb{P}'$.*

*c) Si $M$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale $\mathbb{P}$-p.s. continue nulle en $0$, alors le processus*

$$M' \;=\; M - \frac{1}{Z} \bullet \langle M, Z\rangle \tag{4.2.3}$$

*est $\mathbb{P}'$-p.s. bien défini et à trajectoires continues et est une $\mathbb{P}'$-martingale locale. Pour toute $\mathbb{P}$-semimartingale p.s. continue $X$ le processus covariation $\langle M, X\rangle$ pour $\mathbb{P}$ est $\mathbb{P}'$-indistinguable du processus covariation $\langle M', X\rangle$ pour $\mathbb{P}'$, et $\langle M', M'\rangle$ pour $\mathbb{P}'$ est aussi égal à $\langle M, M\rangle$.*

Dans (c), $\langle M, X\rangle$ est le processus covariation pour $\mathbb{P}'$, mais en revanche $\langle M', X\rangle$ n'est pas forcément un processus covariation pour $\mathbb{P}$, puisque le processus $M'$ peut ne pas être défini sur un ensemble de $\mathbb{P}$-probabilité non nulle.

Ce théorème est satisfaisant, **sauf** pour l'hypothèse $Z$ continu. Cette hypothèse est difficile à vérifier, et souvent violée même quand on s'intéresse à des processus continus. Les mêmes résultats restent vrais sans cette hypothèse, par exemple toute $\mathbb{P}$-semimartingale est une $\mathbb{P}'$-semimartingale, mais cela dépasse le cadre de ce cours (par exemple, nous n'avons pas défini $\langle M, Z\rangle$ quand $Z$ est discontinue).

**Preuve.** Soit $M$ une $\mathbb{P}$-martingale locale p.s. continue nulle en 0. On note $\langle M, Z\rangle$ le processus covariation sous $\mathbb{P}$. Posons $T_n = \inf(t : \; |M_t| \geq n$ ou $Z_t \leq 1/n$ ou $V(\langle M, Z\rangle)_t \geq n)$, et $T = \lim_n T_n$. Vu le théorème 4.2.1-(d), on a $\mathbb{P}'(T = \infty) = 1$ (on peut avoir $\mathbb{P}(T = \infty) < 1$). On pose

$$A_t \;=\; \begin{cases} \frac{1}{Z} \bullet \langle M, Z\rangle_t & \text{si } \; t < T \\ 0 & \text{si } \; t \geq T \end{cases}$$

Le processus $A$ est adapté, et aussi continu (et à variation finie) sur $[0,T[$, donc $M' = M-A$ est adapté, et continu sur $[0,T[$. De plus $A^{T_n}$, $M^{T_n}$ et $M'^{T_n}$ sont bornés, et d'après (3.5.3) et le fait (dû à (3.4.17)) que $\langle A^{T_n}, Z\rangle = 0$, on a

$$\begin{aligned} M'^{T_n}Z &= M^{T_n}Z - A^{T_n}Z \;=\; M^{T_n}\bullet Z + Z\bullet M^{T_n} + \langle M^{T_n}, Z\rangle - A^{T_n}\bullet Z - Z\bullet A^{T_n} \\ &= M^{T_n}\bullet Z + Z\bullet M^{T_n} - A^{T_n}\bullet Z. \end{aligned}$$

Ce processus est une $\mathbb{P}$-martingale locale bornée, donc une $\mathbb{P}$-martingale. La proposition précédente implique alors que $M'^{T_n}$ est une $\mathbb{P}'$-martingale, et comme $\mathbb{P}'(T=\infty)=1$ on en déduit que $M'$ est une $\mathbb{P}'$-martingale locale.

On a donc montré la première partie de (c). Comme $M = M' + A$ et comme $A$ est adapté et $\mathbb{P}'$-p.s. à variation finie et donc une $\mathbb{P}'$-semimartingale, on voit que $M$ est aussi une $\mathbb{P}'$-semimartingale. Par ailleurs tout processus de $\mathcal{A}$ est une semimartingale pour toute probabilité, donc (a) est vrai.

Montrons (b). D'après le théorème 3.4.9 les variables $S(X,Y,n)_t$, qui ne dépendent pas de la probabilité et sont $\mathcal{F}_t$-mesurables, convergent vers la limite $\langle X,Y\rangle_t$ en $\mathbb{P}$-probabilité. Cette convergence a aussi lieu en $\mathbb{P}'$-probabilité puisque $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$, et on en déduit le résultat. Enfin, les deux dernières assertions de (c) découlent de (b), puisque sous $\mathbb{P}'$ on a $\langle M', X\rangle = \langle M, X\rangle$ (car $\langle A, X\rangle = 0$) et $\langle M', M'\rangle = \langle M', M'+A\rangle$. $\square$

**Théorème 4.2.5.** *Supposons $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$, et supposons que le processus densité $Z$ soit p.s. continu. Si $X$ est une $\mathbb{P}$-semimartingale continue et si $H$ est un processus progressivement mesurable et localement borné, alors $H\bullet X$ (intégrale stochastique relativement à $\mathbb{P}$) est aussi une version de l'intégrale stochastique relativement à $\mathbb{P}'$.*

**Preuve.** Les résultats étant évidents si $X \in \mathcal{A}^c$, il suffit de considérer le cas où $X = M$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale p.s. continue nulle en 0.

Soit $Y = H\bullet M$ l'intégrale stochastique relativement à $\mathbb{P}$, qui est encore une $\mathbb{P}$-martingale locale p.s. continue nulle en 0. Soit $A = \frac{1}{Z}\bullet\langle M, Z\rangle$ et $M' = M - A$, et aussi $B = \frac{1}{Z}\bullet\langle Y, Z\rangle$ et $Y' = Y - B$. D'après la preuve précédente, $M'$ et $Y'$ sont des $\mathbb{P}'$-martingales locales p.s. continues nulles en 0, et $A$ et $B$ des processus $\mathbb{P}'$-p.s. à variation finie nuls en 0. Comme $\langle Y, Z\rangle = H\bullet\langle M, Z\rangle$, on a $B = H\bullet A$ $\mathbb{P}'$-p.s. (intégrale de Stieltjes). Il suffit donc de montrer que $Y'$ est l'intégrale stochastique de $H$ par rapport à $M'$ pour $\mathbb{P}'$, ce qui revient à montrer que $\langle Y', N'\rangle^{\mathbb{P}'} = H\bullet\langle M', N'\rangle^{\mathbb{P}'}$ (où l'exposant ${}^{\mathbb{P}'}$ signifie qu'on prend les covariations par rapport à $\mathbb{P}'$), pour toute $\mathbb{P}'$-martingale locale continue.

Comme $T_n = \inf(t : Z_t \leq 1/n)$ croît $\mathbb{P}'$-p.s. vers $+\infty$, par localisation il suffit de montrer ce résultat lorsqu'on arrête tous les processus en $T_n$, et lorsqu'en plus $N'$ est borné. Mais alors $N'Z$ est une $\mathbb{P}$-martingale continue par la proposition 4.2.3, et bien-sûr $N'^{T_n} = (N'Z)^{T_n}/Z^{T_n}$. Si alors $f$ est une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, qui vérifie $f(x,y) = x/y$ lorsque $y \geq 1/n$, on a $N'^{T_n} = f((N'Z)^{T_n}, Z^{T_n})$ et le théorème 3.5.2 implique que $N'^{T_n}$ est une $\mathbb{P}$-semimartingale.

D'après le théorème précédent on a donc $\langle Y, N'^{T_n}\rangle^{\mathbb{P}} = \langle Y', N'^{T_n}\rangle^{\mathbb{P}'}$. Comme $Y = H\bullet M$, d'après la proposition 3.4.5 on a $\langle Y, N'^{T_n}\rangle^{\mathbb{P}} = H\bullet\langle M, N'^{T_n}\rangle^{\mathbb{P}}$ qui, d'après le théorème précédent à nouveau égale $H\bullet\langle M', N'^{T_n}\rangle^{\mathbb{P}}$. Par suite $\langle Y', N'^{T_n}\rangle^{\mathbb{P}'} = H\bullet\langle M', N'^{T_n}\rangle^{\mathbb{P}}$, et comme ceci est vrai pour tout $n$ on obtient le résultat cherché. $\square$

Nous allons maintenant appliquer ces résultats au MB.

**Théorème 4.2.6.** *Supposons* $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$*, et supposons que le processus densité* $Z$ *soit p.s. continu. Soit* $W$ *un* $\mathbb{F}$*-MB sous* $\mathbb{P}$*. Il existe alors un* $\mathbb{F}$*-MB* $W'$ *sous* $\mathbb{P}'$ *et un processus progressivement mesurable* $H$ *tels que*

$$\int_0^t H_s^2\,ds \;<\; \infty \qquad \mathbb{P}' - \text{p.s.} \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.2.4}$$

*et*

$$W_t \;=\; W'_t + \int_0^t H_s\,ds \qquad \mathbb{P}' - \text{p.s.} \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.2.5}$$

Là encore, on a fait l'hypothèse que $Z$ est continu, mais le résultat reste vrai sans cette hypothèse.

**Preuve.** D'après le théorème 3.4.11 appliqué à $M = W$ et $N = Z - Z_0$, il existe $K \in \mathbb{L}^2_{loc}(W)$ tel que $\langle W, Z\rangle = K \bullet \langle W, W\rangle$. Comme $\langle W, W\rangle_t = t$ cela revient à

$$\int_0^t K_s^2\,ds \;<\; \infty, \qquad \langle W, Z\rangle_t \;=\; \int_0^t K_s\,ds \tag{4.2.6}$$

pour tout $t$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Girsanov 4.2.4 à $M = W$. On prend bien entendu $W' = M'$, qui est une $\mathbb{P}'$-martingale locale continue nulle en 0, de variation quadratique $t$ (celle de $W$ sous $\mathbb{P}$), donc $W'$ est un $\mathbb{F}$-MB relativement à $\mathbb{P}'$. Enfin, on a $W_t = W'_t + A_t$ $\mathbb{P}'$-p.s., où $A = \frac{1}{Z} \bullet \langle W, Z\rangle$. Au vu de (4.2.6) on a donc (4.2.5) avec $H = K/Z$, et (4.2.4) découle aussi de (4.2.6) puisque $\inf_t Z_s > 0$ $\mathbb{P}'$-p.s. $\square$

## 4.3 Représentation des martingales

On appelle "propriété de représentation des martingales" par rapport à une martingale locale $M$ le fait que toute martingale (locale) soit une intégrale stochastique par rapport à $M$. Ici, comme nous ne disposons des intégrales stochastiques que relativement à des semimartingales continues, nous devons bien-sûr nous restreindre à $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. Vu le théorème 3.4.11, cela revient aussi à dire que toutes les martingales sont p.s. continues, et que toute martingale nulle en 0 et orthogonale à $M$ au sens des martingales locales est nulle.

Cette propriété, qui peut paraître très stricte, se rencontre en fait assez souvent. Nous allons ici la vérifier pour le MB.

**Théorème 4.3.1.** *Soit* $W$ *un MB sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, et* $\mathbb{F}^W$ *la filtration (càd) qu'il engendre. Toute martingale locale* $M$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$ *se met sous la forme*

$$M \;=\; a + H \bullet W, \tag{4.3.1}$$

*avec* $a \in \mathbb{R}$ *et un processus* $H$ *progressivement mesurable vérifiant*

$$\int_0^t H_s^2\,ds \;<\; \infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.3.2}$$

*En particulier toute martingale locale est p.s. continue.*

Commençons par un lemme.

**Lemme 4.3.2.** *Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des variables de la forme $\sum_{i=1}^p a_i W_{t_i}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $t_i \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble $\mathcal{V} = \{e^U : U \in \mathcal{U}\}$ est total dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty^W, \mathbb{P})$.*

**Preuve.** Il est évident que $\mathcal{V} \subset \mathbb{L}^2 = \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty^W, \mathbb{P})$, et il s'agit de montrer que toute variable $Y$ appartenant à $\mathbb{L}^2$ et orthogonale dans cet espace à $\mathcal{V}$ est nulle. Soit $Y$ une telle variable, qu'on suppose non égale p.s. à 0. Comme la fonction égale à 1 appartient à $\mathcal{V}$, on a $\mathbb{E}(Y) = 0$. Quitte à multiplier $Y$ par une constante, on peut supposer que $\mathbb{E}(|Y|) = 2$, de sorte que $\mathbb{E}(Y^+) = \mathbb{E}(Y^-) = 1$ et les mesures $Q_+ = Y^+ \bullet \mathbb{P}$ et $Q_- = Y^- \bullet \mathbb{P}$ sont des probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Si $U \in \mathcal{U}$ on a $\mathbb{E}(Ye^U) = 0$, donc $\mathbb{E}(Y^+e^U) = \mathbb{E}(Y^-e^U)$, ce qui revient à dire que $\mathbb{E}_{Q_+}(e^U) = \mathbb{E}_{Q_-}(e^U)$. Vu la forme des $e^U$, on en déduit que pour tout choix des $t_i$, les variables $p$-dimensionnelles $(W_{t_1}, \cdots, W_{t_p})$ admettent la même transformée de Laplace sous $Q_+$ et sous $Q_-$, donc ont même loi. Par suite $Q_+$ et $Q_-$ sont égales en restriction à la tribu $\mathcal{F}_\infty^W$ engendrée par toutes ces variables. Comme $Y$ est $\mathcal{F}_\infty^W$-mesurable, et vu la définition de $Q_+$ et $Q_-$, cela veut dire que $Y^+ = Y^-$ p.s., ce qui n'est possible que si $Y = 0$ p.s. □

**Preuve du théorème.** 1) Vu le résultat qu'on cherche à prouver, on peut supposer que $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$. Le théorème 2.2.10 implique alors que pour toute martingale locale $M_0 = \mathbb{E}(M_0)$ p.s., de sorte que dans (4.3.1) on prend $a = \mathbb{E}(M_0)$, et qu'il suffit de montrer le résultat lorsque $M_0 = 0$.

2) On va montrer que le lemme précédent a pour conséquence que toute martingale de $\mathcal{H}^2$ (continue ou non) est de la forme (4.3.1). Noter que (4.3.2) est la condition pour qu'un processus progressivement mesurable $H$ soit dans $\mathbb{L}^2_{loc}(W)$.

Pour voir ceci, soit $U = \sum_{i=1}^p a_i W_{t_i}$, avec $0 \leq t_1 < \cdots < t_p$. D'après (3.4.3), on a $U = N_\infty$, où $N$ est l'intégrale stochastique du processus (déterministe) $K_t = \sum_{i=1}^p a_i 1_{]0,t_i]}(t)$ par rapport à $W$. Posons aussi $A_t = \frac{1}{2}\int_0^t K_s^2\, ds$, qui est un processus (déterministe aussi) dans $\mathcal{A}^c$. Comme $\langle N, N\rangle = 2A$ et $\langle N, A\rangle = \langle A, A\rangle = 0$ (cf. (3.4.18)), la formule d'Itô appliquée au couple $(N, A)$ et à la fonction $f(x, y) = e^{x-y}$ donne immédiatement $e^{N-A} = 1 + H \bullet W$ avec $H = Ke^{N-A}$, qui est clairement dans $\mathbb{L}^2(W)$. On a aussi

$$\mathbb{E}(e^U) \;=\; \mathbb{E}(e^{N_\infty}) \;=\; \mathbb{E}(e^{A_\infty}\,(1 + H \bullet W_\infty)) \;=\; e^{A_\infty},$$

de sorte que $e^U - \mathbb{E}(e^U) = (H' \bullet W)_\infty$ avec $H' = e^{A_\infty} H$. Donc l'ensemble $\{H \bullet W_\infty : H \in \mathbb{L}^2(W)\}$, qui est un sous-espace fermé de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty^W, \mathbb{P})$ par le théorème 3.4.10, contient les variables $e^U - \mathbb{E}(e^U)$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, et le lemme implique alors qu'il coïncide avec avec l'ensemble $\mathbb{L}^2_0$ des variables $\mathcal{F}_\infty^W$-mesurables, de carré intégrable et d'espérance nulle.

Soit alors $M \in \mathcal{H}^2$ nulle en 0. On a $M_t = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_t)$ et $\mathbb{E}(M_\infty) = 0$, donc on vient de montrer que $M_\infty = H \bullet W_\infty$ pour un certain $H \in \mathbb{L}^2(W)$: par suite $M$ est de la forme (4.3.1), et c'est aussi vrai si $M_0$ n'est pas nul. Noter aussi que, par localisation, ce résultat reste vrai pour toute $M \in \mathcal{H}^2_{loc}$ (donc ces $M$ sont p.s. continues).

3) Soit maintenant $M \in \mathcal{M}$. Là encore on ne sait pas a priori que $M$ est continue. Toutefois $M_t = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_t)$, et on peut trouver une suite $U_n$ de variables tendant vers

$M_\infty$ dans $\mathbb{L}^1(P)$, et qui sont de carré intégrable. Les martingales $M(n) = \mathbb{E}(U_n \mid \mathcal{F}_t)$ sont dans $\mathcal{H}^2$, donc p.s. à trajectoires continues. Par ailleurs la seconde inégalité (2.4.2) donne

$$\mathbb{P}(\sup_t |M(n)_t - M_t| \geq a) \;\leq\; \frac{1}{a}\,\sup_t \mathbb{E}(|M(n)_t - M_t|) \;=\; \frac{1}{a}\,\mathbb{E}(|M(n)_\infty - M_\infty|),$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc $\sup_t |M(n)_t - M_t| \to 0$ en probabilité. Les $M(n)$ étant continues cela implique, comme on l'a déjà vu (prendre une sous-suite convergeant p.s.) que $M$ est continue.

On a donc finalement $\mathcal{M} = \mathcal{M}^c$, donc $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{M}^c_{loc}$, et en particulier toute martingale locale nulle en 0 est dans $\mathcal{H}^2_{loc}$ (cf. (3.3.3)). Le résultat est donc prouvé. □

Le résultat suivant mêle les deux derniers théorèmes. Il existe une version (plus compliquée) dans le cas absolument continu, mais nous ne considérons que le cas “équivalent”, de loin le plus utile. Ci-dessous on écrit $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\sim} \mathbb{P}$ si on a à la fois $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbb{P}'$.

**Corollaire 4.3.3.** *Considérons la situation du théorème précédent, et soit $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\sim} \mathbb{P}$. Le processus densité (relativement à la filtration $\mathbb{F}^W$) se met sous la forme*

$$Z_t \;=\; \exp\left(\int_0^t H_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\, ds\right) \tag{4.3.3}$$

*pour un processus $H$ progressivement mesurable vérifiant (4.3.2), et qui de plus est le processus intervenant dans (4.2.5).*

**Preuve.** Le processus densité $Z$ étant une martingale, il s'écrit sous la forme $Z = a + K\bullet W$ pour un $K \in \mathbb{L}^2_{loc}(W)$ et $a = \mathbb{E}(Z_0) = 1$. Comme $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ sont localement équivalentes, $Z$ ne s'annule pas et $1/Z$ est en fait localement (relativement à $\mathbb{P}$) borné. Donc $H = K/Z$ est aussi dans $\mathbb{L}^2_{loc}(W)$ et on peut définir la martingale locale $N = H \bullet W$ et le processus $A_t = \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\, ds$, qui est dans $\mathcal{A}^c$.

On va appliquer la formule d'Itô au triplet $(Z, N, A)$ et à la fonction $f(x, y, z) = xe^{-y+z}$. Comme $\langle Z, N\rangle = 2Z\bullet A$ et $\langle N, N\rangle = 2A$, et aussi $\langle A, Z\rangle = \langle A, N\rangle = \langle A, A\rangle = 0$, on obtient par un calcul facile que

$$\begin{aligned} Ze^{-N+A} \;&=\; 1 + e^{-N+A} \bullet Z - (Ze^{-N+A}) \bullet N + (Ze^{-N+A}) \bullet A \\ &\qquad + \frac{1}{2}\,(Ze^{-N+A}) \bullet \langle N, N\rangle - e^{-N+A} \bullet \langle N, Z\rangle \\ &=\; 1 + (ZHe^{-N+A}) \bullet W - (ZHe^{-N+A}) \bullet W \\ &\qquad + \left(Ze^{-N+A} + Ze^{-N+A} - 2Ze^{-N+A}\right) \bullet A, \end{aligned}$$

donc $Ze^{-N+A} = 1$, et (4.3.3) en découle. Enfin $\langle Z, W\rangle = K \bullet \langle W, W\rangle$ et $H = K/Z$, donc, d'après la preuve du théorème 4.2.6, $H$ est le processus intervenant dans (4.2.5). □

# Chapitre 5

# Equations différentielles stochastiques

## 5.1 Introduction

Rappelons d'abord qu'une équation différentielle ordinaire, sur $\mathbb{R}_+$ et de donnée initiale $x_0$, est une équation de la forme $F(x, x', t) = 0$; cela signifie qu'une solution est une fonction réelle dérivable $x = x(t)$ sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$, et telle que pour tout $t$ on ait $F(x(t), x'(t), t) = 0$. Dans les bons cas, $F$ "s'inverse" en fonction de sa seconde variable, de sorte qu'on peut écrire l'équation sous la forme $x' = a(x, t)$ pour une fonction $a$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On l'écrit aussi sous la "forme différentielle" suivante:

$$dx(t) \;=\; a(x(t), t)dt, \qquad x(0) = x_0. \tag{5.1.1}$$

On a aussi la version multi-dimensionnelle, où $a$ est une fonction de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, où la solution $x$ est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, et où la condition initiale est un vecteur de $\mathbb{R}^d$. L'équation s'écrit "composante par composante" comme $dx_i(t) = a_i(x(t), t)dt$ pour chaque $i$, et on parle souvent dans ce cas d'un "système" d'équations différentielles.

Il existe de multiples conditions sur la fonction $a$ (appelée le "coefficient" de l'équation) assurant l'existence et/ou l'unicité de la solution. Rappelons simplement la plus connue (théorème de Cauchy). Soit les deux conditions suivantes ($\|.\|$ désigne la norme euclidienne):

*Condition de Lipschitz locale:* la fonction $a$ est "localement lipschitzienne" en $x$, au sens où pour chaque $T > 0$ et chaque compact $K \subset \mathbb{R}^d$ il existe une constante $C_{K,T}$ telle que

$$x, y \in K,\ t \leq T \qquad \Rightarrow \qquad \|a(x,t) - a(y,t)\| \leq C_{K,T}\|x - y\|. \tag{5.1.2}$$

*Condition de croissance linéaire:* Pour chaque $T > 0$ il existe une constante $C_T$ telle que

$$x, \in \mathbb{R}^d,\ t \leq T \qquad \Rightarrow \qquad \|a(x,t)\| \leq C_T(1 + \|x\|). \tag{5.1.3}$$

Si ces deux conditions sont satisfaites, l'équation (5.1.1) admet une solution et seule, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Dans ce chapitre nous nous intéressons essentiellement à la généralisation suivante:

$$dX_t \;=\; a(X_t,t)dt + b(X_t,t)dW_t, \qquad X_0 = x_0. \tag{5.1.4}$$

Les "coefficients" de cette équation sont

• une fonction $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \;\to\; \mathbb{R}^d$, de composantes $a_i$, appelée "drift" ou "coefficient de tendance",

• une fonction $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \;\to\; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$ (c'est-à-dire à valeurs dans les matrices $d\times m$), de composantes $b_{ij}$, appelée "coefficient de diffusion".

La condition initiale $x_0$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$. La solution $X = (X_t)$ est un processus $d$-dimensionnel de composantes $X^i_t$. Et enfin, $W = (W^i)_{1\leq i\leq m}$ désigne un MB $m$-dimensionnel. Bien entendu, (5.1.4) est "multi-dimensionnelle", et surtout l'élément différentiel $dW_t$ n'a pas de sens, puisque $W$ n'est pas à variation finie. Ainsi, (5.1.4) est une manière rapide et symbolique d'écrire le système d'équations différentielles suivant (on devrait plutôt dire, d'ailleurs, d'équations intégrales):

$$X^i_t \;=\; x^i_0 + \int_0^t a_i(X_s,s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(X_s,s)dW^j_s, \qquad i = 1,\cdots,d. \tag{5.1.5}$$

Il faut évidemment préciser ce qu'on entend par "solution" de cette équation, puis trouver des conditions assurant l'existence et l'unicité de la solution.

## 5.2 Le cas lipschitzien

Nous allons commencer par considérer en fait une équation bien plus générale que (5.1.4), ce qui est fort utile dans beaucoup d'applications, et pas plus difficile pour les résultats de ce paragraphe.

On se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ avec $\mathbb{F}$ càd. On suppose aussi donné un processus $m$-dimensionnel $Y$ dont les composantes $Y^i$ sont dans $\mathcal{S}^c$ (semimartingales p.s. continues). On se donne aussi une application

$$a:\; \mathbb{R}^d \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \;\to\; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$$

dont les composantes sont notées $a_{ij}$. Soit aussi une variable $d$-dimensionnelle $U = (U^i)$. On considère l'équation symbolisée par

$$dX_t \;=\; a(X_t,t)dY_t, \qquad X_0 = U. \tag{5.2.1}$$

Exactement comme plus haut, et en écrivant $a(X_t,t)(\omega) = a(X_t(\omega),\omega,t)$, cela veut dire que

$$X^i_t \;=\; U^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t a_{ij}(X_s,s)dY^j_s, \qquad i = 1,\cdots,d. \tag{5.2.2}$$

Pour que les intégrales stochastiques ci-dessus aient un sens, il faut que chaque processus $H(i,j)_t(\omega) = a_{ij}(X_t(\omega),\omega,t)$ soit dans $\mathbb{L}(S^j)$, ce qui implique notamment qu'il soit progressivement mesurable; pour cela il faut (si du moins $a_{ij}(x,\omega,t)$ dépend effectivement de $x$) que le processus $X$ soit adapté, donc en particulier que $U$ soit $\mathcal{F}_0$-mesurable. Les conditions minimales sont donc les suivantes ($\mathcal{G}$ désignant la tribu progressive sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$):

$$U \quad \text{est mesurable relativement à} \quad \mathcal{F}_0, \tag{5.2.3}$$

$$a \quad \text{est mesurable relativement à} \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{G}. \tag{5.2.4}$$

Sous (5.2.4), si $X$ est un processus progressivement mesurable, alors $H(i,j)$ défini comme ci-dessus est aussi progressivement mesurable.

Quant aux conditions de Lipschitz locale et de croissance linéaire, elles s'expriment dans ce cadre sous la forme suivante:

*Condition de Lipschitz locale:* Il existe une suite $(T_n)$ de temps d'arrêt croissant p.s. vers l'infini, et pour chaque $n$ et chaque compact $K\subset\mathbb{R}^d$ une constante $C_{K,n}$, tels que

$$x,y\in K,\ \omega\in\Omega,\ t\leq T_n(\omega) \qquad\Rightarrow\qquad \|a(x,\omega,t)-a(y,\omega,t)\|\leq C_{K,n}\|x-y\|. \tag{5.2.5}$$

*Condition de croissance linéaire:* Il existe une suite $(T_n)$ de temps d'arrêt croissant p.s. vers l'infini, et pour chaque $n$ une constante $C_n$, tels que

$$x\in\mathbb{R}^d,\ \omega\in\Omega,\ \ t\leq T_n(\omega) \qquad\Rightarrow\qquad \|a(x,\omega,t)\|\leq C_n(1+\|x\|). \tag{5.2.6}$$

On appelle *solution de (5.2.1)* ou parfois *solution forte* ou *solution-processus,* tout processus $d$-dimensionnel adapté qui vérifie (5.2.2). Le second membre de (5.2.2) est, s'il est bien défini, nécessairement p.s. continu en $t$, donc toute solution est p.s. continue. Noter aussi que ce second membre est défini (comme toute intégrale stochastique) à un ensemble négligeable près, donc tout processus indistinguable d'une solution est aussi solution. Ainsi “l'unicité” signifie toujours l'unicité à l'indistinguabilité près.

**Théorème 5.2.1.** *a) Si le coefficient a vérifie (5.2.4), (5.2.5) et (5.2.6), l'équation (5.2.1) admet une solution et une seule pour toute condition initiale $\mathcal{F}_0$-mesurable $U$.*

*b) De plus si $X$ et $X'$ sont les solutions de conditions initiales $U$ et $U'$, pour presque tout $\omega$ dans l'ensemble $\{U=U'\}$ on a $X_t(\omega)=X'_t(\omega)$ pour tout $t$.*

**Preuve.** La preuve se fait en une série d'étapes, mais nous commençons par quelques notations. Chaque composante $Y^i$ admet une décomposition canonique $Y^i=Y^i_0+M^i+A^i$ avec $A^i\in\mathcal{A}^c$ et $M^i\in\mathcal{M}^c_{loc}$ et $M^i_0=0$. On considère le processus suivant:

$$B \;=\; \sum_{i=1}^m \left(\langle M^i,M^i\rangle + V(A^i)^2\right),$$

qui est dans $\mathcal{A}^{+,c}$. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des processus $d$-dimensionnels adaptés p.s. continus, tels que $\|Z\|^2_{\mathcal{Z}}:=\mathbb{E}(\sup_{t>0}\|Z_t\|^2)<\infty$.

**Etape 1)** Supposons l'existence et l'unicité prouvée pour toute condition initiale bornée. On va alors prouver (a) et (b).

Commençons par un résultat auxiliaire. Supposons que $X$ soit solution avec une condition initiale $U$ (quelconque). Soit $C\in\mathcal{F}_0$ avec $c=\mathbb{P}(C)>0$. Considérons la probabilité

$Q_C = \frac{1}{c}\, 1_C \bullet \mathbb{P}$, qui est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ (de processus densité $Z_t = \frac{1}{c}\, 1_C$ pour tout $t$). Il découle alors immédiatement des théorèmes 4.2.4 et 4.2.5 que

$$X \text{ est solution de (5.2.1), de condition initiale } U, \text{ sur l'espace } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, Q_C). \tag{5.2.7}$$

Montrons alors (a). Soit $U$ quelconque $\mathcal{F}_0$-mesurable et $C_n = \{\|U\| \leq n\}$ et $U_n = U 1_{C_n}$. Notre hypothèse implique l'existence et l'unicité d'une solution $X(n)$ pour chaque condition initiale $U_n$, et $X(n)$ est aussi solution sous $Q_{C_n}$. De plus $X(n+1)$ est solution (avec $U_{n+1}$) sous $Q_{C_n}$. Mais $U_n = U_{n+1}$ $Q_{C_n}$-p.s., donc par unicité $X(n+1)$ et $X(n)$ sont $Q_{C_n}$-indistinguables. Par suite les processus $X(n+1)1_{C_n}$ et $X(n)1_{C_n}$ sont $\mathbb{P}$-indistingables. Il existe donc un processus $X$ tel que $X = X(n)$ sur chaque $C_n$, de sorte que $X$ satisfait (5.2.2) pour tout $t$ en restriction à $C_n$, donc aussi sur $\Omega = \cup C_n$. On a donc l'existence, et l'unicité provient de ce que si $X'$ est une autre solution, elle est aussi solution sous $Q_{C_n}$ par (5.2.7) avec la condition initiale $U$, qui égale $U_n$ $Q_{C_n}$-p.s. Donc en fait $X' = X(n)$ sous $Q_{C_n}$, donc $X' = X(n)$ sur $C_n$, $\mathbb{P}$-p.s., donc finalement $X'$ est indistinguable de $X$.

Enfin (b) découle immédiatement de (5.2.7) appliqué à $C = \{U = U'\}$ et de l'unicité de la solution sous $Q_C$.

**Etape 2)** On peut donc supposer dans la suite que $\|U\| \leq \gamma$ pour une certaine constante $\gamma$. Dans cette étape, nous supposons de plus que

$$C_{K,n} \ \leq \ C, \qquad C_n \ \leq \ C \tag{5.2.8}$$

pour une constante $C$ ($a$ est alors globalement lipschitzien, uniformément en $\omega$, et dans ce cas (5.2.6) est impliqué par la seule condition $\sup_{\omega,t} \|a(0,\omega,t)\| < \infty$). On suppose aussi

$$B_\infty \ \leq \ \varepsilon, \qquad \text{pour un } \varepsilon > 0 \text{ tel que } \ \alpha := 5md2^{md}C^2\varepsilon < 1. \tag{5.2.9}$$

Si $Z \in \mathcal{Z}$, les hypothèses sur $a$ impliquent que, si $H^{ij}(Z)_t(\omega) = a_{ij}(Z_s(\omega), \omega, s)$, le processus $H^{ij}(Z)$ est progressivement mesurable, et comme $|H^{ij}(Z)_t| \leq C(1 + \|Z_t\|)$ on a $\mathbb{E}(\sup_{t>0} |H^{ij}(Z)_t|^2) < \infty$, donc $H^{ij}(Z) \in \mathbb{L}(Y^i)$. On peut donc définir le processus $d$-dimensionnel $F(Z)$ de composantes

$$F(Z)^i \ = \ U^i + \sum_{j=1}^m H^{ij}(Z) \bullet Y^i.$$

Comme $|H^{ij}(Z)_t| \leq C(1+\|Z_t\|)$, il vient (utiliser l'inégalité de Doob (2.4.3) et le théorème 3.3.8 pour la seconde inégalité, et (5.2.9) pour la troisième):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{t>0} \|F(Z)_t - U\|^2\right) \\
&\quad \leq 2^{md} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \left(\mathbb{E}\Big(\sup_{t>0} |H^{ij}(Z) \bullet A_t^j|^2\Big) + \mathbb{E}\Big(\sup_{t>0} |H^{ij}(Z) \bullet M_t^j|^2\Big)\right) \\
&\quad \leq 2^{md} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \left(\mathbb{E}\Big((|H^{ij}(Z)| \bullet V(A^j)_\infty)^2\Big) + 4\mathbb{E}\Big(|H^{ij}(Z)|^2 \bullet \langle M^j, M^j\rangle_\infty\Big)\right) \\
&\quad \leq \alpha(1 + \|Z\|_{\mathcal{Z}}^2).
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

En particulier, $F(Z) \in \mathcal{Z}$. Si maintenant $Z, Z' \in \mathcal{Z}$ on a $|H^{ij}(Z)_t - H^{ij}(Z')_t| \leq C\|Z_t - Z'_t\|$, donc la même chaîne d'inégalités conduit à

$$\|F(Z) - F(Z')\|^2_{\mathcal{Z}} \ \leq \ \alpha \|Z - Z'\|^2_{\mathcal{Z}}. \tag{5.2.11}$$

**Etape 3)** On suppose encore (5.2.8) et (5.2.9). On va résoudre l'équation par la méthode de Picard (itérations successives). On pose $X(0)_t = U$ pour tout $t$ (donc $X(0) \in \mathcal{Z}$), puis par récurrence $X(n+1) = F(X(n))$. D'après (5.2.10) et (5.2.11) ces processus sont dans $\mathcal{Z}$ et vérifient

$$\|X(n+1)_t - X(n)_t\|^2_{\mathcal{Z}} \ \leq \ \mathbb{E}((1 + \|U\|)^2) \ \alpha^{n+1}.$$

Comme $\alpha < 1$, on en déduit que $X(n) = X(0) + \sum_{p=1}^n (X(p) - X(p-1))$ converge au sens de la norme $\|.\|_{\mathcal{Z}}$ vers une limite $X \in \mathcal{Z}$. Comme de plus $F$ est une application continue de $\mathcal{Z}$ dans lui-même pour cette norme, on a aussi $F(X) = X$ puisque $F(X(n)) = X(n+1)$.

Le processus $X$ est p.s. continu, et vu la définition de $F$ dire que $F(X) = X$ revient à dire que $X$ est solution de (5.2.1). Si $X'$ est une autre solution, alors

$$\|X - X'\|^2_{\mathcal{Z}} \ = \ \|F(X) - F(X')\|^2_{\mathcal{Z}} \ \leq \ \alpha \|X - X'\|^2_{\mathcal{Z}}$$

d'après (5.2.11). Comme $\alpha < 1$ cela entraîne $\|X - X'\|_{\mathcal{Z}} = 0$, donc $X$ et $X'$ sont indistinguables. Ainsi, on a l'existence et l'unicité sous les hypothèses (5.2.8) et (5.2.9).

**Etape 4)** Dans cette étape on suppose toujours (5.2.8), mais on relaxe (5.2.9). On prend $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus, et on définit par récurrence les temps d'arrêt finis

$$T_0 = 0, \qquad T_{n+1} = \min\Big(n, \inf(t : B_t - B_{T_n} \geq \varepsilon)\Big) \tag{5.2.12}$$

(avec la convention $T_{n+1} = \infty$ si $T_n = \infty$), qui croît vers l'infini. De plus chaque semimartingale $Y(n) = Y^{T_n} - Y^{T_{n-1}}$ vérifie l'hypothèse (5.2.9) avec le même $\varepsilon$ choisi ci-dessus.

Soit $n \geq 1$ et $U_n$ une variable $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$-mesurable, de carré intégrable. Le processus $Y'(n)_t = Y(n)_{T_{n-1}+t}$ est une semimartingale relativement à la filtration $\mathcal{F}'^n_t = \mathcal{F}_{T_{n-1}+t}$, et l'étape 3 implique l'existence et l'unicité de la solution (pour cette filtration) de

$$dX(n)_t \ = \ a(X(n)_t, T_{n-1} + t) \ dY'(n)_t, \qquad X'(n)_0 = U_n. \tag{5.2.13}$$

On construit alors un processus $X$ successivement sur les intervalles $]T_{n-1}, T_n]$ par récurrence: d'abord $X_t = X(1)_t$ si $t \leq T_1$, avec $U_1 = U$; puis si on connaît $X_t$ pour $t \leq T_{n-1}$, on pose

$$T_{n-1} < t \leq T_n \quad \Rightarrow \quad X_t \ = \ X(n)_{t - T_{n-1}}, \quad \text{avec} \quad U(n) = X_{T_{n-1}}.$$

Ainsi, $X$ est p.s. continu, adapté, et en "additionnant" les équations (5.2.13) on obtient immédiatement que $X$ vérifie (5.2.1). Si $X'$ est une autre solution de (5.2.1), chaque processus $X'(n)_t = X)(n)_{\min(T_n, T_{n-1}+t)}$ est clairement solution de (5.2.13) avec $U_n = X'_{T_{n-1}}$. A cause de l'unicité, on voit aussi par récurrence sur $n$ que $X'$ est indistinguable de $X$.

**Etape 5)** Ci-dessus nous avons prouvé l'existence et l'unicité sous (5.2.8). Nous allons maintenant remplacer cette condition par

$$C_{K,n} = C_K \ \text{ et } \ C_n = C \ \text{ ne dépendent pas de } n. \tag{5.2.14}$$

Pour tout $n \geq 1$ on considère une fonction $\phi_n$ de $\mathbb{R}^d$ dans $[0,1]$, avec $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq \|x-y\|$, et $\phi_n(x) = 1$ si $\|x\| \leq n$, et $\phi_n(x) = 0$ si $\|x\| \geq n+1$. On considère aussi le coefficient $a_n(x,\omega,t) = a(x,\omega,t)\phi_n(x)$.

Chaque $a_n$ vérifiant (5.2.8) (avec une constante $C = C_n$ dépendant de $n$), il existe une solution et une seule $X(n)$ à l'équation

$$dX(n)_t \;=\; a_n(X(n)_t,.,t)\; dY_t, \qquad X(n)_0 \;=\; U. \tag{5.2.15}$$

On note aussi $R_n = \inf(t : \|X(n)_t\| \geq n)$, $R'_n = \inf(t : \|X(n+1)_t\| \geq n)$ et $R''_n = \min(R_n, R'_n)$. Les processus arrêtés $Z = X(n)^{R''_n}$ et $Z' = X(n+1)^{R''_n}$ vérifient les équations

$$\left.\begin{array}{rclr} dZ_t &=& a_n(Z_t,t)\; dY^{R''_n}, & Z_0 = U \\ dZ'_t &=& a_{n+1}(Z'_t,t)\; dY^{R''_n}, & Z'_0 = U. \end{array}\right\}$$

Comme $\|Z'_t\| \leq n$, on a $a_{n+1}(Z'_t,t) = a_n(Z'_t,t)$, de sorte que $Z$ et $Z'$ vérifient la même équation de coefficient $a_n$, et l'unicité prouvée dans l'étape 4 implique $Z' = Z$. Mais ceci n'est possible que si $R''_n = R_n = R'_n$, et comme $R'_n \leq R_{n+1}$ on a montré que la suite $R_n$ est croissante, et aussi que $X(n)^{R_n} = X(n+1)^{R_n}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha$ comme dans (5.2.9), tel en plus que $\alpha < 1/2$, et $T_n$ la suite de temps d'arrêt associée à $\varepsilon$ par (5.2.12). Soit aussi $\delta(n,p) = \mathbb{E}(\sup_{t \leq \min(R_n,T_p)} \|X(n)_t\|^2)$. Comme chaque $a_n$ vérifie (5.2.6) avec la même constante $C$, comme

$$X(n)^i_t = \quad X(n)^i_{\min(R_n,T_p)} + \sum_j \int_{\min(R_n,T_p)}^t a_{n,ij}(X(n)_s, s)dY^j_s$$

quand $\min(R_n,T_p) \leq t \leq \min(R_n,T_{p+1})$, et comme $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$, on obtient exactement comme pour (5.2.10):

$$\delta(n,p+1) \;\leq\; 2\delta(n,p) + 2\alpha(1 + \delta(n,p+1)).$$

Par suite $\delta(n,p+1) \leq 2(\alpha + \delta(n,p))/(1-2\alpha)$. On a aussi trivialement $\delta(n,0) = \mathbb{E}(\|U\|^2) \leq \gamma^2$. Donc la suite $(\delta(n,p) : p \geq 0)$ vérifie une inéquation linéaire à coefficients positifs (car $\alpha < 1/2$) et valeur initiale positive, indépendants de $n$, et par suite $K_p = \sup_n \delta(n,p) < \infty$. Sur l'ensemble $\{R_n < T_p\}$ on a $\sup_{t \leq \min(R_n,T_p)} \|X(n)_t\|^2 \geq n^2$, de sorte que l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff entraine

$$\mathbb{P}(R_n < T_p) \;\leq\; \frac{K_p}{n^2} \;\to\; 0 \qquad \text{quand} \;\; n \to \infty.$$

Comme $T_p \to \infty$ quand $p \to \infty$, on en déduit que la suite $R_n$ croît vers $+\infty$.

On a vu que $X(n)^{R_n} = X(n+1)^{R_n}$, donc comme $R_n \uparrow \infty$ il existe une processus $X$ tel que $X^{R_n} = X(n)^{R_n}$ pour tout $n$, et $\|X^R_n\| \leq n$. Par suite

$$dX^{R_n}_t \;=\; a_n(X^{R_n}_t,t)\; dY^{R_n}_t \;=\; a(X^{R_n}_t,t)\; dY^{R_n}_t, \qquad X_0 = U.$$

Il en découle de manière immédiate que $X$ est solution de (5.2.1). Si $X'$ est une autre solution, soit $T_n = \inf(t : \|X_t\| \geq n$ ou $\|X'_t\| \geq n)$. Les processus arrêtés $X^{T_n}$ et $X'^{T_n}$

sont solutions de (5.2.1) avec $Y^{T_n}$, donc aussi de (5.2.15) et l'unicité pour cette dernière équation implique $X^{T_n} = X'^{T_n}$, donc $X' = X$ puisque $T_n \to \infty$.

**Etape 6)** Il reste à considérer le cas où $C_{K,n}$ et $C_n$ dans (5.2.5) et (5.2.6) dépendent effectivement de $n$. Dans ces deux conditions on peut évidemment choisir la même suite $(T_n)$ de temps d'arrêt, donc on peut appliquer l'étape 5 aux coefficients $a'_n(x,\omega,t) = a(x,\omega,t)1_{\{t\leq T_n(\omega)\}}$ pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution $X(n)$ de (5.2.1) avec la semimartingale arrêtée $Y^{T_n}$, et par recollement (comme ci-dessus) on a le résultat pour (5.2.1) avec $Y$. Cela achève, enfin, la démonstration. □

Revenons à l'équation (5.1.4) (ou (5.1.5)). On considère les conditions:

*Condition de Lipschitz locale:* Pour tout $n \geq 1$ et tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$ il existe une constante $C_{K,n}$, telle que

$$x, y \in K,\ t \leq T_n \quad \Rightarrow \quad \|a(x,t) - a(y,t)\| + \|b(x,t) - b(y,t)\| \leq C_{K,n}\|x - y\|. \tag{5.2.16}$$

*Condition de croissance linéaire:* Pour tout $n \geq 1$ il existe une constante $C_n$ telle que

$$x \in \mathbb{R}^d,\ t \leq T_n \qquad \Rightarrow \qquad \|a(x,t)\| + \|b(x,t)\| \leq C_n(1 + \|x\|). \tag{5.2.17}$$

**Théorème 5.2.2.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré supportant un $\mathbb{F}$-MB $m$-dimensionnel $W$. Si les coefficients $a$ et $b$ sont des fonctions mesurables vérifiant (5.2.16) et (5.2.17), l'équation (5.1.4) admet une solution et une seule $X$, qui est de plus adaptée à la filtration $\mathbb{F}^W$.*

Là encore, $X$ s'appelle une solution-processus, ou également une *solution forte* par référence au fait qu'elle est $\mathbb{F}^W$-adaptée.

**Preuve.** Tout se ramène au fait que (5.1.4) est un cas particulier de (5.2.1): il suffit de considérer la semimartingale $(m+1)$-dimensionnelle $Y$ de composante $Y^i = W^i$ si $i \leq m$ et $Y_t^{m+1} = t$, et le coefficient $A$ défini par:

$$A_{ij}(x,\omega,t) \;=\; \begin{cases} b_{ij}(x,t) & \text{si } \ j = 1,\cdots,m \\ a_i(x,t) & \text{si } \ j = m+1. \end{cases}$$

Ce coefficient vérifie clairement (5.2.4), (5.2.5) et (5.2.6), donc on a existence et unicité de $X$. Enfin, si on reprend les différentes étapes de la construction de la solution dans la preuve précédente, on voit que montrer l'adaptation de $X$ à $\mathbb{F}^W$ se ramène à montrer que si $Z \in \mathcal{Z}$ est adapté à $\mathbb{F}^W$, il en est de même de $F(Z)$, ce qui est évident. □

## 5.3 Solutions faibles et problèmes de martingales

Dans ce paragraphe on considère exclusivement l'équation (5.1.4). On suppose bien-sûr que les coefficients $a$ et $b$ sont boréliens, mais on ne fait pas nécessairement les hypothèses (5.2.16) et (5.2.6).

L'idée de la définition suivante vient de ce que, quand on parle de (5.1.4) on veut que $W$ soit un MB, mais on s'intéresse essentiellement à la solution $X$ elle-même, sans référence à un MB $W$ particulier.

**Définition 5.3.1.** On appelle *solution faible de (5.1.4),* ou parfois "solution-mesure", la loi du processus $X$, pour n'importe quel processus $d$-dimensionnel $X$ qui satisfait (5.1.5) sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ quelconque, relativement à un $\mathbb{F}$-MB quelconque $W$ sur cet espace. □

Ainsi, une solution faible est une mesure de probabilité $\mu$ sur l'espace $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$. La solution faible est *unique* si, pour toute solution-processus $X$ sur un espace quelconque (comme dans la définition précédente), la loi de $X$ est la même.

**Définition 5.3.2.** On dit qu'on a *unicité trajectorielle pour (5.1.4)* si, sur tout espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ supportant un $\mathbb{F}$-MB $W$, deux solutions $X$ et $X'$ relativement à $W$ sur cet espace sont $\mathbb{P}$-indistinguables. □

Le théorème 5.2.2 nous dit que les conditions (5.2.16) et (5.2.17) impliquent l'unicité trajectorielle.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer qu'une probabilité sur l'espace $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (muni de la tribu trace de la tribu de Kolmogorov) est solution faible de (5.1.4) si et seulement si c'est la solution d'un "problème de martingales" adéquat. Commençons par quelques notations. On écrit $\Omega' = \mathbb{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, qu'on munit du processus canonique $X'_t(\omega') = \omega'(t)$ (un point de $\omega'$ de $\Omega'$ est en fait une fonction), de la filtration càd $\mathbb{F}' = (\mathcal{F}'_t)$ engendrée par $X'$ et de la tribu $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_\infty$. Noter que $\mathcal{F}'_\infty$ est la tribu trace sur $\Omega'$ de la tribu de Kolmogorov sur $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+}$.

Considérons l'équation (5.1.4) avec $m = d = 1$ et $a = 0$ et $b(x,t) = 1$ et la condition initiale $s_0 = 0$. Si $W$ est un MB sur un espace filtré, la seule solution de cette équation est évidemment $X = W$, et la seule solution faible est la mesure de Wiener. Par ailleurs le corollaire 4.1.2 nous dit que cette mesure de Wiener est la seule probabilité sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}')$ sous laquelle les processus $X'$ et $X'^2_t - t$ sont des martingales locales. C'est ce résultat qui se généralise, de manière un peu inattendue, à (presque) toutes les équations de type (5.1.4).

Plus précisément nous faisons l'hypothèse suivante sur les coefficients:

$$a \text{ et } b \text{ sont des fonctions boréliennes localement bornées.} \tag{5.3.1}$$

On note aussi $c$ la fonction de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ dans l'espace des matrices $d \times d$ symétriques non-négatives, définie par $c = bb^\star$ ou, composante par composante, par $c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} b_{jk}$. C'est aussi une fonction borélienne localement bornée. On peut alors poser

$$A'^i_t = \int_0^t a_i(X'_s, s)ds, \qquad C'^{ij}_t = \int_0^t c_{ij}(X'_s, s)ds, \tag{5.3.2}$$

les intégrales ci-dessus étant convergentes sous (5.3.1), ce qui définit des processus sur $\Omega'$, continus et adaptés à $\mathbb{F}'$. Définissons aussi les processus continus adaptés suivants:

$$\left.\begin{array}{rcll} M'^i &=& X'^i - x^i_0 - A'^i, & i = 1, \cdots, d \\ N'^{ij} &=& M'^i M'^j - C^{ij} & i,j = 1, \cdots, d \end{array}\right\} \tag{5.3.3}$$

**Théorème 5.3.3.** *Supposons (5.3.1).*

*a) Une probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ est une solution faible de (5.1.4) si et seulement si les processus $M'^i$ et $N'^{ij}$ ci-dessus sont des martingales locales sous $\mathbb{P}'$ et $M'^i_0 = 0$ $\mathbb{P}'$-p.s. pour tout $i$ (donc $\mathbb{P}'(X'_0 = x_0) = 1$).*

*b) Si $m = d$ et si la fonction $b$ est inversible et son inverse $b^{-1}$ est localement bornée, une probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ est une solution faible de (5.1.4) si et seulement s'il existe un $\mathbb{F}'$-MB $d$-dimensionnel $W'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ tel que $X'$ soit solution-processus de (5.1.4), relativement à $W'$.*

**Preuve.** La condition suffisante de (b) est évidente. Pour le reste nous opérons en plusieurs étapes.

**Etape 1)** Montrons la condition nécessaire de (a). On suppose que $\mathbb{P}'$ est solution faible. Il existe donc une solution (forte) $X$ sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, relativement à un $\mathbb{F}$-MB $W$, et $\mathbb{P}'$ est la loi de $X$, c'est-à-dire l'image de $\mathbb{P}$ par l'application $\phi : \Omega \to \Omega'$ définie par $\phi(\omega)(t) = X_t(\omega)$ si la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue, et $\phi(\omega)(t) = 0$ (par exemple) si $\omega$ est dans l'ensemble $\mathbb{P}$ négligeable $N$ où cette trajectoire n'est pas continue.

De manière analogue à (5.3.3), on définit les processus suivants sur $\Omega$:

$$M^i_t = X^i_t - x^i_0 - \int_0^t a_i(X_s, s)\, ds, \quad N^{ij}_t = M^i_t M^j_t - \int_0^t c_{ij}(X_s, s)\, ds.$$

Comme $X$ satisfait (5.1.5), chaque $M^i$ est une martingale locale et les covariations quadratiques sont $\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t c_{ij}(X_s, s)\, ds$ car chaque $N^{ij}$ est une martingale locale. Si de plus $T_n = \inf(t : \|X_t\| \geq n)$, les processus arrêtés $(M^i)^{T_n}$ et $(N^{ij})^{T_n}$ sont bornés sur chaque intervalle de temps borné par (5.3.1), donc ce sont des martingales. Si enfin $T'_n = \inf(t : \|X'_t\| \geq n)$, compte tenu de la définition de $\phi$ et des processus $M^i$ et $N^{ij}$ d'une part, $M'^i$ et $N'^{ij}$ d'autre part, il est clair que, en dehors de $N$,

$$(M^i)^{T_n} \;=\; (M'^i)^{T'_n} \circ \phi, \qquad (N^{ij})^{T_n} \;=\; (N'^{ij})^{T'_n} \circ \phi. \tag{5.3.4}$$

Considérons alors une martingale $M$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, et supposons que le processus continu $M'$ sur $\Omega'$ vérifie $M = M' \circ \phi$ en dehors de $N$. Si $s < t$ et $A' \in \mathcal{F}'_s$, on a $A = \phi^{-1}(A') \in \mathcal{F}_s$ et

$$\mathbb{E}'((M'_t - M'_s)1_{A'}) \;=\; \mathbb{E}((M_t - M_s)1_A) \;=\; 0.$$

Par suite $M'$ est une martingale sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}', \mathbb{P}')$. Il suffit d'appliquer ceci à (5.3.4) et d'utiliser le fait que $T'_n$ tend vers $+\infty$ pour obtenir que $M'^i$ et $N'^{ij}$ sont des $\mathbb{P}'$-martingales locales, $\mathbb{P}'$-p.s. nulles en 0, d'où le résultat.

**Etape 2)** Avant de montrer la condition suffisante de (a), démontrons quelques préliminaires. Soit $\mathbb{P}'$ une solution faible. On considère un espace auxiliaire $(\Omega'', \mathcal{F}'', \mathbb{F}'', \mathbb{P}'')$ sur lequel est défini un MB $m$-dimensionnel $W''$ (par exemple l'espace de Wiener $m$-dimensionnel). On pose alors

$$\Omega = \Omega' \times \Omega'', \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}'', \quad \mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}'_s \otimes \mathcal{F}''_s, \quad \mathbb{P} = \mathbb{P}' \otimes \mathbb{P}''.$$

Toutes les fonctions sur $\Omega'$ ou $\Omega''$ sont étendues de la manière usuelle à $\Omega$, en gardant le même symbole, par exemple $W''_t(\omega',\omega'') = W''_t(\omega'')$ ou $X'_t(\omega',\omega'') = X'_t(\omega')$, etc...

Soit $U'$ et $U''$ des martingales locales sur $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{F}',\mathbb{P}')$ et $(\Omega'',\mathcal{F}'',\mathbb{F}'',\mathbb{P}'')$, avec des suites localisantes $(T'_n)$ et $(T''_n)$. Pour tous $s \leq t$ et $A' \in \mathcal{F}'_s$, $A'' \in \mathcal{F}''_s$. On a

$$\mathbb{E}(U'^{T'_n}_t 1_{A'\times A''}) \;=\; \mathbb{E}'(U'^{T'_n}_t 1_{A'})\,\mathbb{P}''(A'') \;=\; \mathbb{E}'(U'^{T'_n}_s 1_{A'})\,\mathbb{P}''(A'') \;=\; \mathbb{E}(U'^{T'_n}_s 1_{A'\times A''}),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U'^{T'_n}_t U''^{T''_n}_t 1_{A'\times A''}) \;&=\; \mathbb{E}'(U'^{T'_n}_t 1_{A'})\,\mathbb{E}''(U''^{T''_n}_t 1_{A''}) = \\ &=\; \mathbb{E}'(U'^{T'_n}_s 1_{A'})\,\mathbb{E}''(U''^{T''_n}_s 1_{A''}) \;=\; \mathbb{E}(U'^{T'_n}_s U''^{T''_n}_s 1_{A'\times A''}).\end{aligned}$$

Donc $U'$ et $U'U''$ sont des martingales locales sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$, et il en est évidemment de même de $U''$. Il s'ensuit que sur cet espace, $W''$ est un MB, les $M'^i$ et $N'^{ij}$ des martingales locales, et $\langle M'^i, W''^j\rangle = 0$.

Rappelons maintenant quelques résultats d'algèbre linéaire. Rappelons que $c = bb^\star$ et notons $\zeta$ le rang (inférieur à $d$ et à $m$) de la matrice $c$, donc aussi de la matrice $b$. Soit $c' = b^\star b$ (une $m\times m$ matrice symétrique nonnegative), qui s'écrit $c' = \Pi\Lambda\Pi^\star$ avec $\Pi$ orthogonale $m\times m$ et $\Lambda$ diagonale avec $\Lambda_{ii} > 0$ si $i \leq \zeta$ et $\Lambda_{ii} = 0$ si $i > \zeta$. Soit $\Lambda'$ la matrice diagonale avec $\Lambda'_{ii} = 1/\Lambda_{ii}$ si $i \leq \zeta$ et $\Lambda'_{ii} = 0$ si $i > \zeta$. Soit enfin $b' = \Lambda'\Pi^\star b^\star$, qui est $m\times d$. On a alors

$$b'cb'^\star \;=\; \Lambda'\Pi^\star b^\star bb^\star b\Pi\Lambda' \;=\; \Lambda'\Pi^\star\Pi\Lambda\Pi^\star\Pi\Lambda\Pi^\star\Pi\Lambda' \;=\; \Lambda'\Lambda\Lambda\Lambda' \;=\; I_{m,\zeta}, \tag{5.3.5}$$

où $I_{m,\zeta}$ est la matrice diagonale $m\times m$ ayant 1 pour les $\zeta$ premiers éléments diagonaux et 0 ailleurs. Enfin comme $\Lambda = \Pi^\star b^\star b\Pi$ on a $\sum_{j=1}^d (b\Pi)^2_{jk} = 0$ si $k > \zeta$, de sorte que $(b\Pi)_{jk} = 0$ pour tout $j$ si $k > \zeta$ et donc $b\Pi = b\Pi I_{m,\zeta}$. Par suite

$$b\Pi b'c \;=\; b\Pi\Lambda'\Pi^\star b^\star bb^\star \;=\; b\Pi\Lambda'\Pi^\star\Pi\Lambda\Pi^\star b^\star \;=\; b\Pi I_{m,\zeta}\Pi^\star b^\star \;=\; bb^\star \;=\; c. \tag{5.3.6}$$

**Etape 3)** Revenons à la condition suffisante de (a). $b$ étant une fonction (matricielle) borélienne sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$, il en est de même de $\zeta$, et il est facile de vérifier qu'on peut choisir pour $\Pi$ et $\Lambda$ des fonctions également boréliennes, ce qui est donc aussi le cas de $\Lambda'$ et $b'$. Soit aussi $\alpha = \sup_{i\leq m, j\leq d}|b'_{ij}|$ (encore une fonction borélienne). La fonction $b'/\alpha$ (avec $0/0 = 0$) étant bornée, pour $i = 1,\cdots,m$ on peut définir les intégrales stochastiques

$$U^i_t \;=\; \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{b'_{ij}}{\alpha}\,(X'_s,s)\,dM'^j_s.$$

Comme $N'^{ij}$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale on a $\langle M'^i, M'^j\rangle = C'^{ij}$, donc en utilisant (5.3.5):

$$\langle U^i, U^j\rangle_t \;=\; \int_0^t \frac{(b'cb'^\star)_{ij}}{\alpha^2}\,(X'_s,s)ds \;=\; \delta_{ij}\int_0^t \frac{1}{\alpha(X'_s,s)^2}\,1_{\{\zeta(X'_s,s)\geq i\}}\,ds.$$

Donc les intégrales stochastiques $V^i_t = \int_0^t \alpha(X'_s,s)^2\,dU^i_s$ sont aussi bien définies, et

$$\langle V^i, V^j\rangle_t \;=\; \delta_{ij}\int_0^t 1_{\{\zeta(X'_s,s)\geq i)\}}\,ds. \tag{5.3.7}$$

Pour $i \leq m$, définissons enfin les $\mathbb{P}$-martingales locales continues:

$$Z_t^i \;=\; V_t^i + \int_0^t 1_{\{\zeta(X'_s,s)<i\}}\, dW''^i_s, \qquad W_t^i \;=\; \sum_{j=1}^m \int_0^t \Pi_{ij}(X'_s,s)\, dZ_s^j.$$

D'après (5.3.7) et $\langle W''^i, W''^j\rangle_t = \delta_{ij}\, t$ et $\langle M'^i, W''^j\rangle = 0$ (qui implique $\langle U^i, W''^j\rangle = 0$, donc aussi $\langle V^i, W''^j\rangle = 0$), on obtient

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle Z^i, Z^j\rangle_t &=& \langle V^i, V^j\rangle_t + \delta_{ij} \int_0^t 1_{\{\zeta(X'_s,s)<i\}}\, ds \;=\; \delta_{ij}\, t \\ \langle W^i, W^j\rangle_t &=& \sum_{k,l=1}^m \int_0^t (\Pi_{ik}\Pi_{jl})(X'_s,s)\, d\langle Z^k, Z^l\rangle_s \;=\; \delta_{ij}\, t \end{array}\right\}$$

(puisque $\Pi\Pi^\star = I_m$). Par conséquent $Z$ et $W$ sont des $\mathbb{F}$-MB $m$-dimensionnels, et les processus suivants

$$Y_t^i \;=\; X'^i_t - x_0^i - \int_0^t a_i(X'_s,s)\, ds - \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(X'_s,s)\, dW_s^j \;=\; M'^i_t - \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(X'_s,s)\, dW_s^j$$

sont des martingales nulles en 0. Comme $\langle M'^i, W''^k\rangle = 0$, de manière évidente on a

$$\langle M'^i, W^j\rangle_t \;=\; \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{jk}(X'_s,s)\, d\langle M'^i, V^k\rangle_s \;=\; \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^d \int_0^t (\Pi_{jk} b'_{kl})(X'_s,s) d\langle M'^i, M'^l\rangle_s,$$

il vient

$$\begin{aligned} \langle Y^i, Y^i\rangle_t \;&=\; \langle M'^i, M'^i\rangle_t + \sum_{j,k=1}^m \int_0^t (b_{ij}b_{ik})(X'_s,s)\, ds - 2\sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(X'_s,s)\, d\langle M'^i, W^j\rangle_s \\ &=\; 2\int_0^t c_{ii}(X'_s,s)\, ds - 2\int_0^t (b\Pi b'c)_{ii}(X'_s,s)\, ds. \end{aligned}$$

Il nous reste à appliquer (5.3.6) pour obtenir $\langle Y^i, Y^i\rangle = 0$. Comme en plus $Y_0^i = 0$ $\mathbb{P}$-p.s., on déduit que $Y^i$ est $\mathbb{P}$-indistinguable de 0: cela signifie que $X'$ (considéré comme processus sur $\Omega$) est solution de (5.1.4) relativement au MB $W$. Comme la loi de $X'$ sous $\mathbb{P}$ est évidemment $\mathbb{P}'$, cette probabilité est une solution faible et on a le résultat.

**Etape 4)** Il nous reste à montrer la condition nécessaire de (b). On suppose donc que $\mathbb{P}'$ est une solution faible, et aussi que $d = m$ et que la fonction $b^{-1}$ existe (elle est donc borélienne) et est localement bornée. Par (a) les processus $M'^i$ et $N'^{ij}$ sont des $\mathbb{P}'$-martingales locales p.s. nulles en 0.

On reprend alors l'étape 3: on a $\zeta(x,t) = m$ identiquement, et $\Lambda' = \Lambda^{-1}$, et bien évidemment $Z^i = V^i$, de sorte que $W$ ne dépend pas de $W''$ et est donc un MB sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}', \mathbb{P}')$. En d'autres termes on n'a pas besoin d'introduire l'espace auxiliaire $\Omega''$ et les processus $Y^i$ sont définis sur $\Omega'$ également. Cela donne le résultat, avec $W' = W$. $\square$

## 5.4 Unicité trajectorielle et unicité faible

On a vu des conditions pour obtenir l'unicité trajectorielle de (5.1.4). Quant à l'unicité faible, ou "en loi", cela semble a priori bien difficile à obtenir puisque s'il existe une solution, il en existe en général une infinité, chacune étant définie sur une espace arbitraire supportant un MB. Il existe toutefois plusieurs critères d'unicité faible. Le plus utile est sans doute le suivant, puisqu'il entraîne que les conditions (5.2.16) et (5.2.17) impliquent l'unicité faible.

**Théorème 5.4.1. (Yamada - Watanabe)** *Supposons les coefficients $a$ et $b$ boréliens localement bornés. L'unicité trajectorielle implique l'unicité faible, et aussi que toute solution $X$ sur un espace quelconque $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ relativement à un $\mathbb{F}$-MB $W$ est en fait adaptée à la filtration $\mathbb{F}^W$ engendrée par ce MB (solution "forte").*

Commençons par deux résultats auxiliaires. On note $(\Omega'',\mathcal{F}'',\mathbb{F}'',\mathbb{P}'')$ l'espace de Wiener $m$-dimensionnel avec le processus canonique $W''$ (défini comme $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{F}')$ avec $m$ au lieu de $d$ et $W''$ au lieu de $X'$, et $\mathbb{P}''$ est l'unique probabilité faisant de $W''$ un MB). On pose alors

$$\overline{\Omega}=\Omega'\times\Omega'',\quad \overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}'\otimes\mathcal{F}'',\quad \overline{\mathcal{F}}_t=\cap_{s>t}\mathcal{F}'_s\otimes\mathcal{F}''_s.$$

Comme auparavant, toute fonction sur $\Omega'$ ou $\Omega''$ est étendue, avec le même symbole, en une fonction sur $\overline{\Omega}$. Soit $\overline{\mathbb{P}}$ une probabilité sur $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}})$ dont la seconde marginale égale $\mathbb{P}''$ (i.e. $\overline{\mathbb{P}}(\Omega'\times A'')=\mathbb{P}''(A'')$). Il existe alors une "désintégration" de $\overline{\mathbb{P}}$ selon $\mathbb{P}'$:

$$\overline{\mathbb{P}}(d\omega',d\omega'') \;=\; \mathbb{P}''(d\omega'')Q(\omega'',d\omega'), \tag{5.4.1}$$

où $Q$ est une probabilité de transition de $(\Omega'',\mathcal{F}'')$ dans $(\Omega',\mathcal{F}')$, qui est unique "aux $\mathbb{P}''$-négligeables près".

Dans le lemme suivant, on suppose donnée une solution $X$ de (5.1.4) sur un espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$, relativement à un $\mathbb{F}$-MB $W$. On note $\overline{\mathbb{P}}$ la loi du couple $(X,W)$, c'est-à-dire l'image de $\mathbb{P}$ sur $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}})$ par l'application $\psi:\Omega\to\overline{\Omega}$ définie par $\psi(\omega)(t)=(X_t(\omega),W_t(\omega))$ si les trajectoires $t\mapsto X_t(\omega)$ et $t\mapsto W_t(\omega)$ sont continues, et par $\psi(\omega)(t)=(0,0)$ sur l'ensemble $\mathbb{P}$-négligeable $N$ où ce n'est pas vrai. Comme $W$ est un MB, la seconde marginale de $\overline{\mathbb{P}}$ est évidemment $\mathbb{P}''$.

**Lemme 5.4.2.** *Sous les hypothèses précédentes, les processus $M'^i$ et $N'^{ij}$ de (5.3.3) et*

$$U'^{ij}_t \;=\; M'^i_tW''^j_t-\int_0^t b_{ij}(X'_s,s)\,ds \tag{5.4.2}$$

*pour $i=1,\cdots,d$ et $j=1,\cdots,m$ sont des $\overline{\mathbb{P}}$-martingales locales. De plus, pour tout $A\in\overline{\mathcal{F}}_t$ la variable*

$$Q1_A(\omega'') \;=\; \int_{\Omega'}1_A(\omega',\omega'')\;Q(\omega'',d\omega') \tag{5.4.3}$$

*est $\overline{\mathbb{P}}$-p.s. égale à une variable $\mathcal{F}''_t$-mesurable.*

**Preuve.** L'assertion concernant les processus $M'^i$ et $N'^{ij}$ se montre exactement comme dans l'étape 1 de la preuve du théorème 5.3.3, et la démonstration pour $U'^{ij}$ est analogue, une fois remarqué que les processus

$$U_t^{ij} \;=\; M_t^i W_t^j - \int_0^t b_{ij}(X_s,s)\,ds$$

sont des $\mathbb{P}$-martingales locales avec $U^{ij} = U'^{ij} \circ \Psi$. Quant à la dernière assertion, puisque $\mathbb{F}''$ est càd il suffit par un argument de classe monotone de la montrer pour $A = A' \times A''$ avec $A' \in \mathcal{F}'_t$ et $A'' \in \mathcal{F}''_t$. Dans ce cas on a $Q1_A(\omega'') = 1_{A''}(\omega'')Q(\omega'', A')$, donc en fait il suffit de montrer que $Q(.,A')$ est $\mathcal{F}''_t$-mesurable si $A' \in \mathcal{F}'_t$. Cela revient à montrer que

$$\mathbb{E}''(1_B Q(.,A')) \;=\; \mathbb{E}''\Big(Q(.,A')\;\mathbb{P}''(B \mid \mathcal{F}''_t)\Big) \tag{5.4.4}$$

pour tout $B \in \mathcal{F}''$, ou même (par un autre argument de classe monotone) pour $B$ de la forme $B = C \cap D$, où $C \in \mathcal{F}''_t$ et $D$ appartient à la tribu $\mathcal{F}''^t = \sigma(W''_r - W''_t : r \geq t)$. Vu (5.4.1), et comme les deux tribus $\mathcal{F}''_t$ et $\mathcal{F}''^t$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}''$ (donc $\mathbb{P}''(B \mid \mathcal{F}''_t) = \mathbb{P}''(D)1_C$), (5.4.4) est la même chose que

$$\overline{\mathbb{P}}(A' \times (C \cap D)) \;=\; \overline{\mathbb{P}}(A' \times C)\;\mathbb{P}''(D). \tag{5.4.5}$$

Le membre de gauche ci-dessus est $\mathbb{P}(\psi^{-1}(A\times(C\cap D)))$. Mais, à l'ensemble négligeable $N$ près, $\psi^{-1}(A \times (C \cap D))$ est $A_0 \cap A_1$, où $A_0$ est l'ensemble $\mathcal{F}_t$-mesurable où le couple de trajectoires $(X_.(\omega), W_.(\omega))$ est dans $A\times C$, et $A_1$ est l'ensemble des $\omega$ tels que la trajectoire de $W_.(\omega)$ appartient à $D$. Ainsi $A_1$ est dans la tribu engendrée par $\sigma(W_r - W_t : r \geq t)$ et est donc indépendant de $\mathcal{F}_t$. Par suite le membre de gauche de (5.4.5) vaut $\mathbb{P}(A_0)\;\mathbb{P}(A_1)$, qui par le même raisonnement égale le membre de droite de (5.4.5). $\square$

Soit maintenant deux solutions faibles $\mathbb{P}'_1$ et $\mathbb{P}'_2$. Pour $i = 1$ et $i = 2$, $\mathbb{P}'_i$ est la loi d'une solution-processus, donc est asociée comme ci-dessus à une probabilité $\overline{\mathbb{P}}_i$ de seconde marginale $\mathbb{P}''$, et se désintègre selon (5.4.1) avec une probabilité de transition $Q_i$. On considère alors le produit

$$\Omega = \Omega' \times \Omega' \times \Omega'', \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}'', \quad \mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}'_s \otimes \mathcal{F}'_s \otimes \mathcal{F}''_s.$$

On munit $(\Omega, \mathcal{F})$ de la probabilité

$$\overline{\mathbb{P}}(d\omega'_1, d\omega'_2, d\omega'') \;=\; \mathbb{P}''(d\omega'')Q_1(\omega'', d\omega'_1)Q_2(\omega'', d\omega'_2). \tag{5.4.6}$$

Enfin une fonction sur $\Omega''$ admet une extension sur $\Omega$ notée avec le même symbole, tandis qu'une fonction $U$ sur $\overline{\Omega}$ admet deux extensions, notées $U(1)(\omega'_1, \omega'_2, \omega'') = U(\omega'_1, \omega'')$ et $U(2)(\omega'_1, \omega'_2, \omega'') = U(\omega'_2, \omega'')$.

**Lemme 5.4.3.** *Si $M$ est une martingale locale continue sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{P}_i})$, son extension $M(i)$ est une martingale locale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.*

**Preuve.** On montre le résultat pour $i = 1$. Par localisation il suffit de considérer le cas où $M$ est bornée. Il s'agit alors de montrer que si $s \leq t$, on a $\mathbb{E}(M(1)_t 1_A) = \mathbb{E}(M(1)_s 1_A)$

pour tout $A \in \mathcal{F}_s$. Par un argument de classe monotone et continuité à droite il suffit même de considérer $A = A_1 \times A_2 \times A''$, avec $A_i \in \mathcal{F}'_s$ et $A'' \in \mathcal{F}''_s$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M(1)_t 1_A) &= \int \mathbb{P}''(d\omega'')1_{A''}(\omega'')\ Q_2(\omega'', A_2) \int Q_1(\omega'', d\omega'_1)\ 1_{A_1}(\omega'_1) M_t(\omega'_1, \omega'') \\ &= \overline{\mathbb{E}}_1\left(1_{A''}\ Q_2(.,A_2)\ 1_{A_1}\ M_t\right) \ = \ \overline{\mathbb{E}}_1\left(1_{A''}\ Q_2(.,A_2)\ 1_{A_1}\ M_s\right),\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de ce que $Q_2(., A_2)$ est $\mathcal{F}''_s$-mesurable, par le lemme 5.4.2. Le même calcul montre alors que le dernier membre ci-dessus égale $\mathbb{E}(M(1)_s 1_A)$. $\square$

**Preuve du théorème.** Exactement comme ci-dessus, on suppose qu'on a les deux solutions faibles $\mathbb{P}'_1$ et $\mathbb{P}'_2$, et on reprend les mêmes notations. Par applications des deux lemmes précédents, on voit que les processus $M'^i(k)$, $N'^{ij}(k)$ et $U'^{ij}(k)$ sont des martingales locales continues nulles en 0 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, pour $k = 1, 2$, et il en est de même des processus $W''^i$ et $W''^i_t W''^j_t - \delta_{ij}\, t$. En particulier on a $\langle M'^i(k), M'^j(k)\rangle_t = \int_0^t c_{ij}(X'(k)_s, s)\, ds$ et $\langle M'^i(k), W''^j(k)\rangle_t = \int_0^t b_{ij}(X'(k)_s, s)\, ds$. Par suite $W''$ est un $\mathbb{F}$-MB pour $\mathbb{P}$, et si on pose

$$\begin{aligned}Y^i(k)_t &= X'^i(k)_t - x_0^i - \int_0^t a_i(X'(k)_s, s)\, ds - \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(X'(k)_s, s)\, dW''^j_s \\ &= M'^i(k)_t - \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(X'(k)_s, s)\, dW''^j_s,\end{aligned}$$

on vérifie immédiatement que $\langle Y^i(k), Y^i(k)\rangle = 0$. Il s'ensuit que $Y^i(k) = 0$, donc $X'(k)$ est solution de l'équation sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, relativement au MB $W''$.

Appliquons alors l'hypothèse d'unicité trajectorielle: les deux processus $X'(1)$ et $X'(2)$ sont $\mathbb{P}$-indistinguables. En d'autres termes, $\mathbb{P}(\{\omega'_1 \neq \omega'_2\}) = 0$. Par suite, vu (5.4.6), pour $\mathbb{P}'$-presque tout $\omega''$ en dehors d'un négligeable $N$ on a

$$\int Q_1(\omega'', d\omega'_1) Q_2(\omega'', d\omega'_2) 1_{\{\omega'_1 \neq \omega'_2\}} \ = \ \int Q_1(\omega'', d\omega_1) Q_2(\omega'', \{\omega'_1\}^c) \ = \ 0.$$

On a donc $Q_2(\omega'', \{\omega'_1\}^c) = 0$ pour $Q_1(\omega'', .)$-presque tout $\omega'_1$. Comme $Q_2$ est une probabilité, pour $\omega'' \notin N$ c'est donc une masse de Dirac, disons $\varepsilon_{f(\omega'')}(d\omega')$, pour une certaine application $f$ de $\Omega''$ dans $\Omega'$, et il en est de même de $Q_1$, avec évidemment la même application $f$.

Par suite $Q_1(\omega'', .) = Q_2(\omega'', .)$ si $\omega'' \notin N$, donc $\mathbb{P}'_1 = \mathbb{P}'_2$ et on a l'unicité cherchée. On a de plus $X' = f(W'')$ $\overline{\mathbb{P}}_1$-p.s., et d'après le lemme 5.4.2 il est clair que $\omega'' \mapsto f(\omega'')_t$ est $\mathcal{F}''_t$-mesurable: par suite sous $\mathbb{P}'_1$ le processus $X'$ solution est en fait adapté à la filtration engendrée par $W''$. Si maintenant on considère une solution $X$ relative à un MB $W$ sur un espace quelconque, la loi du couple $(X, W)$ est $\overline{\mathbb{P}}_1$ et comme $X' = f(W'')$ $\mathbb{P}'_1$-p.s., il en découle que $X = f(W)$ p.s. sur l'espace sur lequel ces processus sont définis. Ainsi, $X$ est adapté à $\mathbb{F}^W$, c'est-à-dire que la solution est forte. $\square$

La réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre l'exemple suivant. On prend $d = m = 1$, et $a \equiv 0$ et $b(x,t) = b(x) = \text{signe}(x)$ (qui vaut $+1$, 0 et $-1$ selon que $x > 0$,

$x = 0$, $x < 0$). L'équation s'écrit

$$dX_t \;=\; \text{signe}(X_t)dW_t, \qquad X_0 = 0. \tag{5.4.7}$$

On peut alors montrer le résultat suivant (nous ne le ferons pas ici):

**Proposition 5.4.4.** *L'équation (5.4.7) admet une unique solution faible, qui est la loi du MB, mais elle n'admet aucune solution forte (= mesurable par rapport à $\mathcal{F}^W$) et il n'y a donc pas d'unicité trajectorielle.*

## 5.5 La propriété de Markov

Dans ce paragraphe nous supposons connues les bases de la théorie des processus de Markov, et nous considérons l'équation (5.1.4) avec des coefficients $a(x,t) = a(x)$ et $b(x,t) = b(x)$ *indépendants du temps*, ce qu'on appelle le cadre "homogène", et boréliens. On considère donc les équations

$$dX_t \;=\; a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \qquad X_0 = U. \tag{5.5.1}$$

Supposons que cette équation admette, pour chaque condition initiale déterministe $U = x \in \mathbb{R}^d$, une solution faible et une seule qu'on note $\mathbb{P}'_x$ (on garde les notations des paragraphes précédents, en particulier l'espace canonique $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}')$ avec le processus canonique $X'$). Supposons enfin la condition suivante vérifiée:

$$x \;\mapsto\; \mathbb{P}'_x(A) \;\text{ est borélienne, pour tout } A \in \mathcal{F}'. \tag{5.5.2}$$

**Théorème 5.5.1.** *Sous les conditions précédentes, le terme $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}', X', (\mathbb{P}'_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ est un processus fortement markovien, au sens où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout temps d'arrêt $T$, tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $t \geq 0$ on a*

$$\mathbb{P}'_x(X'_{T+t} \in A \mid \mathcal{F}'_T) \;=\; \mathbb{P}'_{X_T}(X'_t \in A) \quad \textit{sur l'ensemble } \{T < \infty\}. \tag{5.5.3}$$

Le processus ci-dessus s'appelle un *processus de diffusion.*

**Preuve.** Quitte à considérer les $\min(n, T)$ et à faire $n \to \infty$, il suffit de considérer le cas où $T$ ne prend que des valeurs finies. La mesure $\mathbb{P}'_x$ est la loi d'un processus $X$, solution de (5.5.1) avec $U = x$ sur un certain espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et relativement à un $\mathbb{F}$-MB $W$. En reprenant les notations de l'étape 1 de la preuve du théorème 5.3.3, on a donc $X = X' \circ \phi$ en dehors d'un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable $N$, où $\phi$ est une application de $\Omega$ dans $\Omega'$.

Il est facile de voir que si $A' \in \mathcal{F}'_t$ il existe $A \in \mathcal{F}_t$ avec $A \cap N^c = \phi^{-1}(A') \cap N^c$ (c'est évident quand $A'$ est de la forme $A' = \{X'_{t_1} \in B_1, \cdots, X_{t_n} \in B_n\}$ pour des $t_i \leq t$ et des $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et on passe au cas général par un argument de classe monotone, plus la continuité à droite des filtrations). En particulier il existe des $A_t \in \mathcal{F}_t$ tels que $A_t \cap N^c = \phi^{-1}(\{T < t\}) \cap N^c$, et si on pose $S(\omega) = \inf(t : \omega \in A_t)$ on obtient un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt qui vérifie $T \circ \phi = S$ en dehors de $N$, donc $\mathbb{P}$-p.s.

De manière évidente, on a

$$X^i_{S+t} \;=\; X^i_S + \int_0^t a_i(X_{S+s})\,ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(X_{S+s})\,d\widehat{W}^j_s,$$

où $\widehat{W}_t = W_{S+t} - W_S$ est un MB relativement à la filtration $\widehat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{S+t}$. En d'autres termes le processus $\widehat{X}_t = X_{S+t}$ est solution de (5.5.1) relativement à $\widehat{W}$, sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{F}}, \mathbb{P})$, et avec la "condition initiale" $U = X_S$. Comme $\widehat{W}$ est indépendant de $\mathcal{F}_S = \widehat{\mathcal{F}}_0$, cela revient à dire que, sous $\mathbb{P}$ et conditionellement à $\mathcal{F}_S$, et en dehors d'un $\mathbb{P}$-négligeable, le processus $\widehat{X}$ est solution de (5.5.1) avec la condition intiale $U = y$ et donc de loi $\mathbb{P}'_y$, sur l'ensemble $\{X_S = y\}$, et ceci pour tout $y \in \mathbb{R}^d$. Vu (5.5.2), on en déduit que si $B \in \mathcal{F}_S$ et $B' \in \mathcal{F}'$, on a

$$\mathbb{E}\left(1_B\; 1_{B'} \circ \widehat{\phi}\right) \;=\; \mathbb{E}\left(1_B\; \mathbb{P}_{X_S}(B')\right),$$

où $\widehat{\phi}$ est associée à $\widehat{X}$ comme $\phi$ est associée à $X$. En particulier si $B' = \{\omega' : \omega'(t) \in A\}$ et si $B = \phi^{-1}(A')$ pour $A' \in \mathcal{F}'_T$, il vient

$$\mathbb{P}'_x(A' \cap \{X'_{T+t} \in A\}) \;=\; \mathbb{E}'_x\left(1_{A'}\; \mathbb{P}'_{X'_T}(X'_t \in A)\right),$$

d'où (5.5.3). □

La condition (5.5.2) n'est pas aisée à démontrer en général. Elle est satisfaite (modulo bien-sûr l'existence et l'unicité des solutions faibles $\mathbb{P}'_x$) lorsque $a$ et $b$ sont continues, et même dans des cas plus généraux. Elle est en revanche assez facile à vérifier lorsque $a$ et $b$ sont localement lipschitziennes, à croissance au plus linéaire. En effet dans ce cas on peut démontrer non seulement l'existence d'une solution et d'une seule, sur tout espace supportant un MB $W$ et pour chaque condition initiale $\mathcal{F}_0$-mesurable $U$, mais en plus que si on considère les conditions initales $U = x$ alors il existe une famille $X(x)$ de processus solutions, qui en plus est continue dans le couple $(x,t)$ (en utilisant, après localisation, le critère de continuité de Kolmogorov du théorème 1.3.2 pour l'indice $(d+1)$-dimensionnel $(x,t)$). Si $A' \in \mathcal{F}'$, il est alors évident que $1_{A'}(X(x)(\omega))$ est mesurable en $(x,\omega)$, donc $\mathbb{P}'_x(A') = \mathbb{P}(X(x) \in A')$ est mesurable en $x$.

Passons maintenant au "générateur" du processus de Markov du théorème précédent. Soit $X$ une solution de (5.5.1) sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, relativement à un MB $W$, et de condition initiale $X_0 = U$. Si $f$ est une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^d$, et avec les notations de la formule d'Itô, on écrit cette formule pour $f(X)$ et on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} f(X_t) \;&=\; f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t f'_i(X_s) a_i(X_s)\,ds + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^t f'_i(X_s) b_{ij}(X_s)\,dW^j_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^m \int_0^t f''_{ij}(X_s) b_{ik}(X_s) b_{jk}(X_s)\,ds. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Avec la notation $c = bb^\star$ (déjà utilisée), on introduit l'opérateur différentiel du second ordre suivant:

$$Lf(x) \;=\; \sum_{i=1}^d a_i(x) f'_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d c_{ij}(x) f''_{ij}(x). \tag{5.5.5}$$

On déduit alors immédiatement de (5.5.4) le résultat suivant:

**Théorème 5.5.2.** *Si $X$ est une solution de (5.5.1), pour toute fonction $f$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^d$ les processus*

$$M_t^f \;=\; f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)\,ds \tag{5.5.6}$$

*sont des martingales locales.*

Revenons à la situation du théorème 5.5.1. Exactement comme dans la preuve du théorème 5.3.3, on déduit de ce qui précède que les processus

$$M_t'^f \;=\; f(X_t') - f(X_0') - \int_0^t Lf(X_s')\,ds \tag{5.5.7}$$

sont des martingales locales sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}', \mathbb{P}_x')$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, lorsque $f$ est $C^2$. Ainsi, on a montré que l'opérateur $L$ est le *générateur au sens de Kunita* du processus de Markov $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{F}', X', (\mathbb{P}_x')_{x\in\mathbb{R}^d})$.

Si de plus $f$ est $C_b^2$ (de classe $C^2$, bornée ainsi que ses dérivées) et si $Lf$ est continue bornée, alors $f$ appartient au domaine du générateur faible $(A, \mathcal{D}_A)$ du semi-groupe de ce processus de Markov (au sens de Dynkin), et $Af = Lf$.

Par exemple si $m = d$ et $a \equiv 0$ et $b(x) = I_d$, ce qui revient à dire que (5.5.1) admet pour solution $X_t = U + W_t$, on voit que

$$L \;=\; \frac{1}{2}\,\Delta \qquad (\Delta = \text{le laplacien}).$$

Par suite le générateur faible du MB $d$-dimensionnel a un domaine qui contient toutes les fonctions $C_b^2$, et pour une telle fonction $f$ on a $Af = \frac{1}{2}\,\Delta f$: comparer avec le théorème 4.1.1.

Revenons enfin sur (5.5.7). Une solution faible $\mathbb{P}_x'$ de l'équation est une solution du "problème de martingales" suivant: chaque $M'^f$ pour $f$ de classe $C^2$ est une $\mathbb{P}_x'$-martingale locale, et $\mathbb{P}_x'(X_0' = x) = 1$. Cela est à comparer au théorème 5.3.3: il est facile de voir que le problème de martingales énoncé en (a) de ce théorème est équivalent au problème de martingales ci-dessus, en se restreignant aux fonctions $f$ de la forme $f_i(x) = x_i$ et $f_{ij}(x) = x_i x_j$. Il en découle que si $M'^f$ est une martingale locale pour $f = f_i$ et $f = f_{ij}$, alors c'est aussi une martingale locale pour toute $f$ de classe $C^2$. Cette assertion peut aussi bien-sûr se montrer directement par une application judicieuse de la formule d'Itô.