Université Pierre et Marie Curie

Maitrise de Mathématiques 2001-2002

Processus de Sauts et Files d'Attente

Philippe Bougerol

Chapitre 1

Processus de Bernoulli

Le but de ce chapitre est double. D'une part, faire quelques rappels et fixer les notations. D'autre part, introduire le processus de Bernoulli, caricature à temps discret du très important processus de Poisson.

1.1. Loi binomiale et Processus de Bernoulli

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Soit $p \in [0,1]$,

Définition 1.1.1 *Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - p$. Le processus $\{S_n, n \in \mathbf{N}\}$ défini par $S_0 = 0$ et*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

est appelé processus de Bernoulli de paramètre p. La loi de S_n s'appelle la loi binomiale de paramètres (p, n).

Par processus, on entend simplement une famille de variables aléatoires indexées par $\mathbf{N}, \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}^+$. On dit que deux processus (X_t) et (Y_t) ont la même loi si pour toute famille finie $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, les vecteurs $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ et $(Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_n})$ ont la même loi.

Interprétations du processus de Bernoulli:

- Interprétation du paramètre n comme un paramètre de temps: par exemple, S_n est le nombre de piles obtenus au temps n dans un jeu de pile ou face.

- Interprétation du paramètre n comme un paramètre d'espace: on remplit les boites $]k, k+1], k \in \mathbf{N}$, avec des boules. Dans chaque boite, on place une boule avec probabilité p, et rien avec probabilité $1 - p$, indépendamment de ce qui se passe dans les autres boites. On décrit ainsi un processus par des propriétés locales... Alors S_n= "nombre total de boules dans $[0, n]$" est un processus de Bernoulli.

Proposition 1.1.2 *Soit Z une variable aléatoire de loi binomiale (p, n). Alors,*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ 0 \leq k \leq n,\\ \mathbf{E}(Z) = np, &\quad Var(Z) = np(1-p),\\ \mathbf{E}(e^{-tZ}) &= (pe^{-t} + 1 - p)^n, t \geq 0.\end{aligned}$$

La transformée de Laplace d'une loi μ sur $\mathbf{R}^+$, ou d'une variable aléatoire de loi μ, est par définition la fonction

$$\mathcal{L}_\mu(t) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-tx}\, d\mu(x),\ t \geq 0.$$

Rappelons que la loi d'une variable aléatoire Z est la probabilité $\mathbf{P}_{(Z)}$ définie par, pour tout borélien A,

$$\mathbf{P}_{(Z)}(A) = \mathbf{P}(Z \in A).$$

Si cette loi est μ, on a $\mathcal{L}_\mu(t) = \mathbf{E}(e^{-tZ})$. Ceci résulte du lemme classique suivant qui sera d'un usage constant. Il se montre en passant par les fonctions étagées...

Lemme 1.1.3 *Pour toute v.a. Z, pour tout f mesurable positive ou bornée,*

$$\mathbf{E}(f(Z)) = \int f(x)\, d\mathbf{P}_{(Z)}(x).$$

Quelques propriétés de la transformée de Laplace que nous utiliserons sont rappelées dans l'appendice de ce chapitre.

1.2. Propriété de Markov forte des marches aléatoires

La proposition suivante est facile, son importance apparaitra plus tard:

Proposition 1.2.1 *Un processus $S_n, n \in \mathbf{N}$, est un processus de Bernoulli de paramètre p si et seulement si:*

Pour tout $m, n \geq 0$, $S_{m+n} - S_n$ est indépendante de $S_0, S_1, \cdots, S_n$, de loi binomiale de paramètre (m, p) et $S_0 = 0$.

Il est utile de savoir dans quelle mesure on peut remplacer n dans l'énoncé au dessus par un temps aléatoire. Ceci est lié à la propriété de Markov forte.

Définition 1.2.2 *On appelle filtration à temps discret une suite croissante $\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}$, de sous tribus de $\mathcal{F}$.*

Un temps d'arrêt de cette filtration est une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

La tribu $\mathcal{F}_\tau$ du passé avant τ est définie comme l'ensemble des $A \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Si τ est un temps d'arrêt, alors $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ et X_τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable. La plupart du temps, on se donne une suite de variables aléatoires $Z_n, n \in \mathbf{N}$, représentant ce que l'on connait à l'instant n, et on considère $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \cdots, Z_n)$. Dans ce cas $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est appelée filtration du processus $(Z_n)_{n\geq 0}$.

Définition 1.2.3 *Soit μ une probabilité sur $\mathbf{R}^d$. On appelle marche aléatoire de loi μ le processus $S_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$, où les variables aléatoires X_i sont indépendantes de loi μ.*

Théorème 1.2.4 (Propriété de Markov forte des m.a.) *Soit $S_n, n \geq 0$, une marche aléatoire sur $\mathbf{R}^d$ de loi μ et τ un temps d'arrêt de la filtration de ce processus, presque sûrement fini. Alors $\{S_{n+\tau} - S_\tau, n \geq 0\}$ est une marche aléatoire de loi μ, indépendante de $\mathcal{F}_\tau$.*

Preuve: Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$. Pour tous boréliens $B_1, \cdots, B_n$ de $\mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A \cap \{S_{\tau+1} - S_\tau \in B_1, S_{\tau+2} - S_{\tau+1} \in B_2, \cdots, S_{\tau+n} - S_{\tau+n-1} \in B_n\})\\
&\quad = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\tau = k\} \cap A \cap \{S_{\tau+1} - S_\tau \in B_1, \cdots, S_{\tau+n} - S_{\tau+n-1} \in B_n\})\\
&\quad = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\tau = k\} \cap A \cap \{X_{k+1} \in B_1, \cdots, X_{k+n} \in B_n\})\\
&\quad = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\tau = k\} \cap A)\mathbf{P}(X_{k+1} \in B_1, \cdots, X_{k+n} \in B_n)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\tau = k\} \cap A)\mu(B_1)\cdots\mu(B_n)\\
&\quad = \mathbf{P}(A)\mu(B_1)\cdots\mu(B_n)
\end{aligned}$$

puisque par définition $\{\tau = k\} \cap A$ est $\sigma(S_1, \cdots, S_k)$-mesurable, donc indépendant de $X_{k+1}, \cdots, X_n$.

Remarque: Pour un temps d'arrêt pouvant prendre la valeur $+\infty$ avec une probabilité non nulle, cette preuve montre que le théorème reste vrai avec la probabilité $\mathbf{P}$ remplacée par la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(\cdot/\tau < +\infty)$.

1.3. Loi géométrique

Considérons un processus de Bernoulli $S_n, n \geq 0$, de paramètre p et

$$T = \inf\{n > 0; S_n = 1\}.$$

La loi de T s'appelle la loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètre p (dans certains livres on considère aussi la loi géométrique sur $\mathbf{N}$ qui est la loi de $T - 1$). On a donc

Définition 1.3.1 *Soit $p \in [0,1]$. La loi géométrique de paramètre p est la probabilité μ sur $\mathbf{N}^*$ définie par $\mu(\{n\}) = p(1-p)^{n-1}$.*

Si X est une v.a. de loi géométrique, on peut écrire que

$$\mathbf{P}(X > n) = (1-p)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Une expérience aléatoire se répète dans les mêmes conditions: le nombre d'essais nécessaires avant le premier succès a une loi géométrique. Vous jouez au loto: vous attendrez un temps géométrique avant de gagner. Le premier jour où une machine tombe en panne est géométrique, etc... Cette loi modélise tous les phénomènes d'attente à temps discret "sans mémoire", au sens où le fait d'attendre beaucoup ne change pas la loi du temps qu'il reste à attendre. En effet, on a

Proposition 1.3.2 *Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ a une loi géométrique si et seulement si, pour tout $n, m > 0$,*

$$\mathbf{P}(X > m + n / X > n) = \mathbf{P}(X > m).$$

Preuve. Si la condition est réalisée, posons $\lambda = \mathbf{P}(X > 1)$. Alors,

$$\mathbf{P}(X > n+1) = \mathbf{P}(X > n)\mathbf{P}(X > 1) = \lambda \mathbf{P}(X > n),$$

pour tout $n > 0$. On a donc

$$\mathbf{P}(X > n) = \lambda^n$$

d'où le résultat. La réciproque est claire.

Corollaire 1.3.3 *Si T a une loi géométrique, la loi conditionnelle de $T - n$ sachant que $\{T > n\}$ est la même que celle de T.*

Le résultat suivant est au moins intuitif. Il est facile à montrer de façon élémentaire. Mais il est plus instructif de le montrer en utilisant la propriété de Markov forte et la relation

$$T_{k+1} - T_k = \inf\{n \in \mathbf{N}; S_{T_k+n} - S_{T_k} = 1\}.$$

Proposition 1.3.4 *Soit $S_n, n \geq 0$, un processus de Bernoulli de paramètre p et $T_k = \inf\{n \geq 0; S_n = k\}$. Alors les variables aléatoires $\{T_{k+1} - T_k, k \geq 0\}$ sont indépendantes, de loi géométrique de paramètre p.*

Soit $X_n, n \in \mathbf{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p. Considérons la répartition aléatoire de points entiers fabriquée ainsi: Je peins en bleu le point 0, puis en rouge les $X_1 - 1$ points suivants, puis en bleu le suivant (qui est donc l'entier X_1), puis en rouge les $X_2 - 1$ entiers suivants, puis en bleu le suivant, ... Alors, il résulte de la proposition précédente que la suite des entiers bleus forme un processus de Bernoulli. Ceci peut s'écrire mathématiquement de la façon suivante: soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, alors $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,n]}(T_k)$ est un processus de Bernoulli.

On arrive à deux façons en quelques sortes duales de décrire un processus de Bernoulli. Prenons un exemple: à chaque instant entier, un nouvel individu passe devant un bar. Il hésite, avec probabilité p il entre dans le bar, sinon il passe son chemin. Du point de vue du serveur, la suite des intervalles entre les entrées est une suite de v.a. géométrique.

1.4. Loi exponentielle

Les lois géométriques sont à valeurs entières. Nous allons considérer maintenant des lois ayant des propriétés analogues, mais à valeurs dans tout $\mathbf{R}^+$: les lois exponentielles. Ce sont, avec les lois de Gauss, les plus importantes du calcul des probabilités à temps continu.

Définition 1.4.1 *Soit $\lambda > 0$. On appelle loi exponentielle de paramètre λ, la loi de probabilité sur $\mathbf{R}^+$ de densité $\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$.*

Rappellons que de façon générale, si μ est une probabilité sur $\mathbf{R}^d$ de densité ϕ, alors pour toute fonction borélienne $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ à valeurs positives (ou telle que $f\phi$ soit Lebesgue intégrable), on a

$$\int f \, d\mu = \int f(x)\phi(x)\, dx,$$

où dx représente la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$. Si X est une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ, alors

$$\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t} \quad \text{, pour tout } t \geq 0.$$

Comme la loi géométrique, la loi exponentielle est caractérisée par l'absence de mémoire (ou de vieillissement):

Théorème 1.4.2 *Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ suit une loi exponentielle si et seulement si*

$$\mathbf{P}(X > t + s / X > t) = \mathbf{P}(X > s), \ \textit{pour tout}\ t, s \geq 0.$$

Preuve: Si cette propriété est vraie, la fonction $f(t) = \ln \mathbf{P}(X > t)$ est continue à droite, nulle en 0, et vérifie l'équation $f(s+t) = f(s) + f(t)$. On en déduit qu'elle est linéaire, ce qui permet de montrer l'affirmation 'si' de l'énoncé. L'autre est immédiate.

Corollaire 1.4.3 *Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ, la loi de $T - t$ sachant $\{T > t\}$ est encore exponentielle de paramètre λ.*

Insistons, car c'est important: imaginons que vous arrivez le matin et que vous devez attendre un temps exponentiel de paramètre 1. Si à midi vous attendez toujours, votre temps d'attente est encore exponentiel de paramètre 1. D'un point de vue conceptuel, on voit que sachant qu'à midi (instant présent) vous attendez, on peut oublier l'instant d'arrivée (passé) pour modéliser le futur. Il suffit de très peu d'information. C'est une forme de la propriété de Markov que nous verrons plus tard.

Proposition 1.4.4 *Si T a une loi exponentielle de paramètre λ,*

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda},\ Var(T) = \frac{1}{\lambda^2},\ \mathbf{E}(e^{-rT}) = \frac{\lambda}{\lambda + r}.$$

L'exemple typique de v.a. de loi exponentielle est le premier instant où un pécheur attrape un poisson, où une machine sans vieillissement tombe en panne, où un réveil sonne (en pleine nuit) ...

Lemme 1.4.5 (des 2 réveils) *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. Alors $T = \min(X, Y)$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$, indépendante de $\mathbf{1}_{(T=X)}$. De plus $\mathbf{P}(T = X) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.*

Preuve: Elle résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T > t, T = X) &= \mathbf{P}(X > t, X \leq Y) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x>t, x\leq y\}} \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\, dxdy \\
&= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x>t\}} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x}\, dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.
\end{aligned}$$

On peut généraliser ce lemme à une infinité de réveils :

Lemme 1.4.6 *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ_n telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k < +\infty$. Alors $T = \inf(X_n)$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$ et $\mathbf{P}(T = X_n) = \frac{\lambda_n}{\sum \lambda_k}$.*

Preuve: On remarque que $\mathbf{P}(x \leq X_k, \forall k \neq n) = \exp(-\sum_{k\neq n} \lambda_k x)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T > t, T = X_n) &= \mathbf{P}(X_n > t, X_n \leq X_k, \forall k \neq n) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{X_n>t\}} \exp(-\sum_{k\neq n} \lambda_k X_n)) \\
&= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x>t\}} \lambda_n e^{-x\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k}\, dx \\
&= \frac{\lambda_n}{\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k} e^{-(\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k)t}.
\end{aligned}$$

On voit donc en particulier que si $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k < +\infty$ l'infimum est atteint puisque $\sum \mathbf{P}(T = n) = 1$. Par contre si $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = +\infty$ la preuve montre que $T = 0$ presque sûrement (il n' y a pas de premier qui réveil qui sonne !).

Etudions la loi de la somme de v.a. exponentielles. Pour cela, rappelons que la fonction Γ est définie sur $\mathbf{R}^+$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt,\ x > 0.$$

Si $n \in \mathbf{N}^*$, on vérifie par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties, que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Définition 1.4.7 *On appelle loi d'Erlang ou loi Gamma de paramètres (λ, α) où $\lambda, \alpha \geq 0$, la probabilité sur $\mathbf{R}^+$ de densité*

$$f_{\lambda,\alpha}(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(x).$$

Pour $\alpha = 1$, on retrouve la loi exponentielle. Nous allons montrer la proposition suivante:

Proposition 1.4.8 *La somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi Gamma de paramètres (λ, α_1) et (λ, α_2) est une variable aléatoire de loi Gamma de paramètre $(\lambda, \alpha_1 + \alpha_2)$.*

après avoir indiqué l'important corollaire:

Corollaire 1.4.9 *Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ, alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ a une loi Gamma de paramètre (λ, n).*

qui s'en déduit facilement par récurrence. On peut établir la proposition par un calcul direct, mais il est plus instructif d'utiliser la méthode très puissante des transformées de Laplace (utile dans bien d'autres situations). Les résultas précédents s'obtiennent aisément avec:

Proposition 1.4.10 *La transformée de Laplace de la loi Gamma $\mu_{(\lambda,\alpha)}$ de paramètre (λ, α) est:*

$$\mathcal{L}_{\mu_{(\lambda,\alpha)}}(t) = (\frac{\lambda}{\lambda + t})^\alpha.$$

Preuve: En effet, avec le changement de variables $(t + \lambda)x = y$,

$$\mathcal{L}_{\mu_{(\lambda,\alpha)}}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(t+\lambda)x} \lambda^\alpha x^{\alpha-1}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-y} \frac{y^{\alpha-1}}{(t+\lambda)^{\alpha-1}} \frac{\lambda^\alpha}{(t+\lambda)}\, dy.$$

1.5. Appendice sur la transformée de Laplace

Les résultats des deux appendices peuvent être admis. Si μ est une probabilité sur $\mathbf{R}^+$, on appelle transformée de Laplace de μ la fonction

$$\mathcal{L}_\mu(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, d\mu(x),\ t \geq 0.$$

Proposition 1.5.1 *Soit μ une probabilité sur $\mathbf{R}^+$ de transformée de Laplace $\mathcal{L}_\mu$.*

1. *μ a un moment d'ordre 1 si et seulement si $\mathcal{L}_\mu$ est dérivable en 0 et alors*

$$\int x\ d\mu(x) = -\mathcal{L}'_\mu(0).$$

2. *μ a un moment d'ordre 2 si et seulement si $\mathcal{L}_\mu$ est deux fois dérivable en 0 et alors*

$$\int x^2\ d\mu(x) = \mathcal{L}''_\mu(0).$$

Preuve: On a

$$\frac{\mathcal{L}_\mu(t) - \mathcal{L}_\mu(0)}{t} = \int \frac{e^{-tx} - 1}{t}\ d\mu(x)$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}-1}{t}$ est positive décroissante. Il résulte donc du théorème de convergence monotone que

$$\int x\ d\mu(x) = \int \lim_{t\to 0}(\frac{1-e^{-tx}}{t})\ d\mu(x) = \lim_{t\to 0}\int(\frac{1-e^{-tx}}{t})\ d\mu(x) = -\mathcal{L}'_\mu(0)$$

Le deuxième point se traite de façon analogue.

Théorème 1.5.2 (Injectivité de la transformée de Laplace) *Deux probabilités sur $\mathbf{R}^+$ ayant la même transformée de Laplace sont égales.*

Preuve: Soient deux variables aléatoires $X, Y \geq 0$ ayant la même transformée de Laplace $\mathcal{L}$. Il suffit évidemment de montrer que $\tilde{X} = \exp(X)$ et $\tilde{Y} = \exp(Y)$ ont la même loi. pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}\tilde{X}^n = \mathcal{L}(n) = \mathbf{E}\tilde{Y}^n$. Il en résulte que pour tout polynôme P, $\mathbf{E}(P(\tilde{X})) = \mathbf{E}(P(\tilde{Y})))$. On sait (théorème de Stone Weierstrass) que toute fonction continue f sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de tels polynômes. On en déduit que $\mathbf{E}(f(\tilde{X})) = \mathbf{E}(f(\tilde{Y})))$.

1.6. Appendice sur l'indépendance

Commençons par préciser quelques notions sur les tribus. Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Définition 1.6.1 *Si $\{X_i, i \in I\}$ est une famille d'applications à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ définies sur Ω, on note $\sigma(X_i, i \in I)$ la tribu engendréee par cette famille. C'est à dire la plus petite tribu de Ω contenant tous les ensembles $\{X_i \in A\}$, où $i \in I$ et A est un borélien de $\mathbf{R}^d$.*

De même, la tribu engendrée par un ensemble de parties est la plus petite tribu les contenant. En particulier, pour une application $X : \Omega \to \mathbf{R}^d$, $\sigma(X)$ est exactement la classe des ensembles $\{X \in A\}$, où A est un borélien de $\mathbf{R}^d$. Nous aurons l'occasion d'utiliser:

Lemme 1.6.2 *Considérons une application $X : \Omega \to \mathbf{R}^d$. Alors une application $Z : \Omega \to \mathbf{R}$ est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si il existe une application borélienne $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ telle que $Z = f(X)$.*

Preuve: On écrit

$$Z = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}(Z).$$

Puisque Z est $\sigma(X) - mesurable$, il existe un borélien $A_{n,k}$ de $\mathbf{R}^d$ tel que

$$\{Z \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[\} = \{X \in A_{n,k}\}$$

c'est à dire tel que

$$\mathbf{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}(Z) = \mathbf{1}_{A_{n,k}}(X)$$

On a alors $Z = f(X)$ si

$$h(x) = \liminf_{n \to +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{A_{n,k}}(x)$$

Définition 1.6.3 *On dit que des tribus $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ contenues dans $\mathcal{F}$ sont indépendantes si, pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}_n$,*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n).$$

Des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont dites indépendantes si les tribus engendrées $\sigma(X_1), \cdots, \sigma(X_n)$ le sont. On dit qu'une famille infinie de sous tribus (ou de variables aléatoires) est formée de tribus indépendantes lorsque toute sous famille finie a cette propriété.

Le lemme suivant résulte du lemme de la classe monotone.

Lemme 1.6.4 (lemme d'unicité) *Dans $(\Omega, \mathcal{F})$ considérons une classe stable par intersections finies $\mathcal{C}$ de parties de $\mathcal{F}$ engendrant une tribu $\mathcal{A}$. Si $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont deux probabilités telles que*

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{Q}(C), \ \forall C \in \mathcal{C},$$

alors $\mathbf{P}(A) = \mathbf{Q}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

On peut en déduire que si deux processus $X_i, i \in I$ et $Y_i, i \in I$ ont la même loi, $\mathbf{E}(F(X)) = \mathbf{E}(F(Y))$ pour toute fonction mesurable F du processus... On peut aussi en déduire la proposition suivante.

Proposition 1.6.5 *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes stables par intersection finie, engendrant deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$. Alors, si*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$

pour tout $A \in \mathcal{C}_1$ et $B \in \mathcal{C}_2$, les deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont indépendantes.

Chapitre 2

Processus de Poisson

2.1. Processus à accroissements indépendants stationnaires

Nous voulons généraliser à $\mathbf{R}^+$ la construction de points aléatoires sur $\mathbf{N}$ obtenue par le processus de Bernoulli dans le chapitre précédent. Ceci nous conduit d'abord à la définition suivante, qui généralise au temps continu la notion de marche aléatoire.

Définition 2.1.1 *Un processus $\{X_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ est appelé un processus à accroissements indépendants stationnaires (P.A.I.S) si*

1. *Les applications $t \to X_t$ sont continues à droite sur $\mathbf{R}^+$.*
2. *Pour tout $s, t \geq 0$, $X_{t+s} - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_r, r \leq s)$.*
3. *Pour tout $s, t \geq 0$, $X_{t+s} - X_s$ a la même loi que $X_t - X_0$.*
4. *$X_0 = 0$.*

Nous allons généraliser la propriété de Markov forte des marches aléatoires. Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, une famille $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ de sous tribu de $\mathcal{F}$ est appelée une filtration si pour tout $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{F}_s$ est contenue dans $\mathcal{F}_t$. Un temps d'arrêt de cette filtration est une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathbf{R}^+.$$

La tribu $\mathcal{F}_\tau$ du passé avant τ est définie comme l'ensemble des $A \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$. La filtration naturelle associée à un processus $\{X_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ est $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. En absence de précision, on sous entend que l'on utilise cette filtration.

Remarquons par exemple que si τ et σ sont deux temps d'arrêts tels que $\tau(\omega) \leq \sigma(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$. En effet, si $A \in \mathcal{F}_\tau$, pour tout $t \geq 0$

$$A \cap \{\sigma \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

car $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Le lemme suivant est important.

Lemme 2.1.2 *Tout temps d'arrêt τ est la limite d'une suite décroissante de temps d'arrêt τ_n, où τ_n est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbf{N}\} \cup \{+\infty\}$.*

Preuve: Il suffit de prendre

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq \tau < \frac{k+1}{2^n}\}} + (+\infty)\mathbf{1}_{\{\tau=+\infty\}}.$$

Les questions de mesurabilité concernant les temps d'arrêt en temps continu peuvent être délicates. A titre d'exemple montrons le lemme suivant:

Lemme 2.1.3 *Si (X_t) est continu à droite, pour tout temps d'arrêt τ fini, X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.*

Preuve: Utilisons le lemme précédent pour écrire $\tau = \lim \tau_n$, où τ_n est une suite décroissante de temps d'arrêt à valeurs dans les dyadiques. La variable aléatoire $X_{t\wedge\tau_n}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable car

$$X_{t\wedge\tau_n} = \sum_{\{k;k2^{-n}\leq t\}} X_{k2^{-n}} \mathbf{1}_{\{\tau_n=k2^{-n}\}} + X_t \mathbf{1}_{\{\tau_n>t\}}.$$

On en déduit que $X_{\tau\wedge t}$ est aussi $\mathcal{F}_t$ mesurable puisque c'est la limite de la suite $X_{t\wedge\tau_n}$. Pour montrer que X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable, il faut vérifier que, pour tout borélien A, l'ensemble $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Ceci est clair car $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau\wedge t} \in A\} \cap \{\tau \leq t\}$.

Théorème 2.1.4 (Propriété de Markov forte des P.A.I.S.) *Considérons un P.A.I.S. $\{X_t, t \geq 0\}$. Pour tout temps d'arrêt τ presque sûrement fini, le processus $\{X_{t+\tau} - X_\tau, t \in \mathbf{R}^+\}$ est de même loi que le processus $\{X_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ et est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$, lorsque $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle de ce processus.*

Preuve: Utilisons le lemme 2.1.2 pour écrire $\tau = \lim \tau_n$ où chaque τ_n est à valeurs dans les dyadiques d'ordre n. Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable bornée, et $\phi_1, \cdots, \phi_k$ des fonctions continues bornées sur $\mathbf{R}$. En utilisant la continuité à droite des trajectoires, et le fait que Z est $\mathcal{F}_{\tau_n}$-mesurable car $\tau \leq \tau_n$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(Z\phi_1(X_{\tau+t_1} - X_\tau)\phi_2(X_{\tau+t_2} - X_\tau)\cdots\phi_k(X_{\tau+t_k} - X_{\tau))} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Z\phi_1(X_{\tau_n+t_1} - X_{\tau_n})\cdots\phi_k(X_{\tau_n+t_k} - X_{\tau_n})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(Z\mathbf{1}_{\{\tau_n=k2^{-n}\}}\phi_1(X_{\tau_n+t_1} - X_{\tau_n})\cdots\phi_k(X_{\tau_n+t_k} - X_{\tau_n})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(Z\mathbf{1}_{\{\tau_n=k2^{-n}\}}\phi_1(X_{k2^{-n}+t_1} - X_{k2^{-n}})\cdots\phi_k(X_{k2^{-n}+t_k} - X_{k2^{-n})}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(Z\mathbf{1}_{\{\tau_n=k2^{-n}\}})\mathbf{E}(\phi_1(X_{t_1}))\cdots\mathbf{E}(\phi_k(X_{t_k})) \\
&= \mathbf{E}(Z)\mathbf{E}(\phi_1(X_{t_1}))\cdots\mathbf{E}(\phi_k(X_{t_k}))
\end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème.

Remarque 2.1.5 Ce théorème se généralise immédiatement aux filtrations $(\mathcal{F}_t)$ telles que X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et telles que $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ pour tout $t, s \geq 0$.

2.2. Processus de Poisson

Considérons maintenant une répartition aléatoire (T_n) de points sur $\mathbf{R}^+$.

Définition 2.2.1 *On appelle processus ponctuel sur $\mathbf{R}^+$ la donnée d'une suite de variables aléatoires*

$$0 \leq T_1 < T_2 < \cdots$$

strictement croissante telle que $T_n \to +\infty$ presque sûrement. Le processus de comptage associé à ce processus ponctuel est le processus

$$N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_k), \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

Remarquons que $t \to N_t$ est continu à droite sur $\mathbf{R}^+$. D'autre part, la relation

$$\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$$

montre que chaque T_n est un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(N_r, r \leq t)$.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, rappellons qu'on appelle **loi de Poisson** de paramètre α la loi μ_α sur $\mathbf{N}$ définie par

$$\mu_\alpha(n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Théorème 2.2.2 *Soit $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ les points d'un processus ponctuel dont le processus de comptage associé est un P.A.I.S. Alors les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \cdots$ sont indépendantes et de loi exponentielle ayant un même paramètre λ. De plus, pour tout $t \geq 0$, la loi de N_t est une loi de Poisson de paramètre λt.*

Preuve: Pour tout $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_1 > t + s) &= \mathbf{P}(N_{t+s} = 0) = \mathbf{P}(N_{t+s} - N_t = 0, N_t = 0) \\ &= \mathbf{P}(N_s = 0)\mathbf{P}(N_t = 0) = \mathbf{P}(T_1 > t)\mathbf{P}(T_1 > s). \end{aligned}$$

Ceci est la propriété caractéristique de la loi exponentielle. Donc T_1 a une loi exponentielle. Fixons un entier n. Par la propriété de Markov forte du processus à accroissements stationnaires (N_t) on sait que $Z_t := N_{T_n+t} - N_{T_n}, t \geq 0$, a la même loi que $N_t, t \geq 0$ et est indépendant de $\mathcal{F}_{T_n}$. Puisque $T_{n+1} - T_n$ est le premier saut du processus Z_t, la variable aléatoire $T_{n+1} - T_n$ est indépendante de $\mathcal{F}_{T_n}$ et de même loi que T_1. Comme $T_1, T_2, \cdots, T_n$ sont $\mathcal{F}_{T_n}$-mesurables, on a bien l'indépendance de $T_{n+1} - T_n$ et des v.a. $T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_n - T_{n-1}$.

La relation $T_n = \sum_{i=0}^{n-1}(T_{i+1} - T_i)$ montre que T_n est la somme des n variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre λ, T_n a donc une loi Gamma de paramètre (λ, n). Nous pouvons donc écrire, en utilisant l'indépendance de T_n et de $T_{n+1} - T_n$, et en intégrant en y que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_t = n) &= \mathbf{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t) \\
&= \mathbf{P}(T_n \leq t, T_n + (T_{n+1} - T_n) > t) \\
&= \int \mathbf{1}_{[0,t]}(x)\mathbf{1}_{]t,+\infty[}(x+y)\frac{(\lambda x)^{n-1}\lambda e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda y}dxdy \\
&= \int_0^t \frac{(\lambda x)^{n-1}\lambda e^{-\lambda x}}{(n-1)!}e^{-\lambda(t-x)}dx \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Définition 2.2.3 *On dit qu'un processus $N_t, t \in \mathbf{R}^+$, est un processus de Poisson de paramètre λ si (N_t) est un P.A.I.S. tel que la loi de N_t est une loi de Poisson de paramètre λt, pour tout $t \geq 0$.*

On verra l'existence du processus de Poisson dans la section suivante. Du théorème 2.2.2 et du fait que les sauts d'un processus ponctuel déterminent le processus de comptage associé, il résulte le très important résultat suivant:

Théorème 2.2.4 *Soit (N_t) le processus de comptage d'un processus ponctuel $0 \leq T_1 < T_2 < \cdots$ sur $\mathbf{R}^+$. On suppose que $\mathbf{E}(N_1) = \lambda$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *(N_t) est un P.A.I.S.*
2. *Les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \cdots$ sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ.*
3. *(N_t) est un processus de Poisson de paramètre λ.*

Pour tout $a \geq 0$, le processus $M_t = N_{t+a} - N_a$ est un processus de Poisson (pourquoi ?) Puisque la suite de ses sauts successifs est $T_{N_a+1} - a, T_{N_a+2} - T_{N_a+1}, T_{N_a+3} - T_{N_a+2}, \cdots$ on en déduit que

Corollaire 2.2.5 *Pour tout $a \geq 0$ les variables aléatoires $T_{N_a+1} - a, T_{N_a+2} - T_{N_a+1}$, $T_{N_a+3} - T_{N_a+2}, \cdots$ sont indépendantes de loi exponentielle de paramêtre λ.*

Il résulte de la propriété de Markov forte que ceci reste vrai si a est un temps d'arrêt de la filtration $\sigma(N_s, s \leq t)$.

Posons nous alors la question suivante: j'arrive dans un atelier où des machines tombent en panne suivant un Poisson de paramètre 1, l'unité étant l'heure. Il s'écoule en moyenne une heure entre deux pannes. Au bout de combien de temps (moyen) vais je observer une panne ? Est-ce une demi heure car je suis arrivé entre deux pannes ? (paradoxe de l'inspection).

Montrons que le processus de Poisson tel que nous l'avons défini précédemment est toujours un processus de comptage:

Lemme 2.2.6 *Les sauts d'un processus de Poisson sont de taille* 1.

Preuve: Fixons un entier K et considérons l'évènement $D = \{\exists t \in [0, K]; N_t - N_{t^-} \geq 2\}$. Pour tout entier $n \geq 0$, posons $D_n = \bigcup_{i=0}^{K2^n-1}\{N_{\frac{i+1}{2^n}} - N_{\frac{i}{2^n}} \geq 2\}$. La suite D_n est décroissante et $D = \cap_n D_n$. En effet il est clair que D est contenu dans $\cap_n D_n$. Si $\omega \in \cap_n D_n$, on peut trouver une suite $t_n \in [0, K]$ telle que $N_{t_n+\frac{1}{2^n}}(\omega) - N_{t_n}(\omega) \geq 2$, si t est une valeur d'adhérence de cette suite, pour tout $\varepsilon > 0$, $N_{t-\varepsilon}(\omega) - N_{t+\varepsilon}(\omega) \geq 2$. En passant à la limite, nous voyons que $N_t - N_{t^-} \geq 2$, donc $\omega \in D$. Ceci montre que D est mesurable et que $\mathbf{P}(D) = \lim_{n\to\infty} P(D_n)$. Or,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D_n) &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{K2^n-1}\{N_{\frac{i+1}{2^n}} - N_{\frac{i}{2^n}} \leq 1\}\right) \\
&= 1 - \prod_{i=0}^{K2^n-1} e^{-\frac{\lambda}{2^n}}\left(1 + \frac{\lambda}{2^n}\right) \\
&= 1 - e^{-K\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{2^n}\right)^{K2^n},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc $\mathbf{P}(D) = 0$.

Sur un intervalle borné, une façon naturelle de placer des points est de les jeter de manière uniforme. Les points du processus de Poisson jouent le même rôle pour $\mathbf{R}^+$. Une façon de le voir est la proposition 2.3.2 qui s'interprète en disant que conditionnellement au nombre de points $N_t = n$ dans l'intervalle $[0, T]$, ces n points sont répartis comme n points indépendants de loi uniforme sur $[0, T]$. Les sauts successifs sont alors les réordonnés croissants de ces points. Une autre façon est la suivante:

Proposition 2.2.7 *Pour chaque entier k, considérons la répartition de points obtenus en placant n_k points $X_1^{(k)}, \cdots, X_{n_k}^{(k)}$ aléatoires, indépendants et uniformément distribués sur l'intervalle $[0, k]$. Quand $k \to +\infty$, cette répartition "converge en loi" vers un processus de Poisson de paramètre λ, si n_k/k tend vers λ.*

Preuve: Posons $N_t^{(k)} = \sum_{r=1}^{n_k} \mathbf{1}_{[0,t]}(X_r^{(k)})$. Il s'agit de montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m$, le vecteur aléatoire $(N_{t_1}^{(k)}, \cdots, N_{t_m}^{(k)})$ converge en loi vers $(N_{t_1}, \cdots, N_{t_m})$ où N_t est le processus de Poisson de paramètre λ. Pour cela, il suffit de considérer $\mathbf{P}(N_{t_1}^{(k)} = r_1, N_{t_2}^{(k)} - N_{t_1}^{(k)} = r_2, \cdots, N_{t_m}^{(k)} - N_{t_m-1}^{(k)} = r_m)$, pour tout $r_1, \cdots, r_m \in \mathbf{N}$. Or cette expression est égale, dès que $k \geq t_m$, à

$$C_{n_k}^{r_1} C_{n_k-r_1}^{r_2} \cdots C_{n_k-r_1-..-r_{m-1}}^{r_m} (\frac{t_1}{k})^{r_1} (\frac{t_2-t_1}{k})^{r_2} \cdots (\frac{t_m-t_{m-1}}{k})^{r_m} (\frac{k-t_m}{k})^{n_k-r_1-\cdots-r_m}$$

Puisque $C_{n_k-p}^r$ est équivalent à $\frac{n_k^r}{r!}$ et $(\frac{k-t_m}{k})^{n_k-r_1-\cdots-r_m}$ est équivalent à $e^{-t_m\lambda}$, l'expression précédente est équivalente à

$$\left(\frac{n_k}{k}\right)^{\sum_{i=1}^m r_i} \frac{t_1^{r_1}}{r_1!} \frac{(t_2-t_1)^{r_2}}{r_2!} \cdots \frac{(t_m-t_{m-1})^{r_m}}{r_m!} e^{-\lambda t_m},$$

ce qui entraîne le résultat.

Les propriétés suivantes s'établissent facilement:

Proposition 2.2.8 *L'espérance et la variance de la loi de Poisson μ_λ de paramètre λ sont égales à λ. Sa transformée de Laplace est $\mathcal{L}_{\mu_\lambda}(t) = e^{\lambda(e^{-t}-1)}$.*

2.3. Processus ponctuel de Poisson

Un processus ponctuel à valeurs dans un espace E muni d'une tribu $\mathcal{E}$ est un sous ensemble aléatoire fini ou dénombrable $X_k, k \in \mathbf{N}^*$, de points de E, où les X_k sont des variables aléatoires. A tout sous ensemble mesurable A de E on associe la v.a.

$$N_A(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_A(X_k(\omega))$$

$N_A, A \in \mathcal{E}$, est le processus de comptage associé. Puisque seul l'ensemble des points est important et non l'ordre de ces points, le processus de comptage détermine le processus ponctuel.

Définition 2.3.1 *Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré muni d'une mesure σ-finie μ. On appelle processus ponctuel de Poisson sur E d'intensité μ un processus ponctuel ayant la propriété suivante: pour tout $n \geq 1$, si $A_1, \cdots, A_n$ sont des sous ensembles de $\mathcal{E}$ disjoints, les variables aléatoires $N_{A_1}, \cdots, N_{A_n}$ sont indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\mu(A_1), \cdots, \mu(A_n)$.*

Par convention une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $+\infty$ est une variable aléatoire identiquement infinie. C'est cohérent: si A_n est une suite croissante d'ensembles de mesure finie, si $A = \cup_n A_n$ est de mesure infinie, alors $N_A = \lim N_{A_n}$ et $\mathbf{P}(N_A \leq k) = \lim \mathbf{P}(N_{A_n} \leq k) = 0$ donc $N_A = +\infty$, presque surement.

Notons que lorsque μ est bornée (i.e. $\mu(E) < +\infty$), le nombre total de points du processus est aléatoire mais fini presque sûrement (puisqu'il suit une loi de Poisson).

Notre premier but est de donner une construction explicite d'un processus ponctuel de Poisson. Cela prouvera en particulier leur existence. D'un autre coté, cela permettra de les simuler sur ordinateur.

Proposition 2.3.2 *Supposons que la mesure μ est bornée et considérons la probabilité $\nu(\cdot) = \mu(\cdot)/\mu(E)$. Donnons nous des variables aléatoires $U_1, U_2, \cdots$ indépendantes de loi ν sur E et une variable aléatoire N de loi de Poisson de paramètre $\mu(E)$ indépendante de la suite (U_n). Alors*

$$\{U_1, U_2, \cdots, U_N\}$$

est un processus ponctuel de Poisson sur E d'intensité μ.

Preuve: Soit $A_1, \cdots, A_n$ une partition de E en sous ensembles mesurables. Posons $N_A = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_A(U_k)$. Pour tout entier $k_1, \cdots, k_n$, si $r = \sum_{i=1}^{n} k_i$, en posant $\mu(E) = \lambda$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(N_{A_1} = k_1, N_{A_2} = k_2, \cdots, N_{A_n} = k_n) = \\
&= \mathbf{P}(\sum_{k=1}^{r} \mathbf{1}_{A_1}(U_k) = k_1, \cdots, \sum_{k=1}^{r} \mathbf{1}_{A_n}(U_k) = k_n, N = r) \\
&= \mathbf{P}(\sum_{k=1}^{r} \mathbf{1}_{A_1}(U_k) = k_1, \cdots, \sum_{k=1}^{r} \mathbf{1}_{A_n}(U_k) = k_n)\mathbf{P}(N = r) \\
&= C_r^{k_1} \nu(A_1)^{k_1} C_{r-k_1}^{k_2} \nu(A_2)^{k_2} \cdots C_{r-k_1-\cdots-k_{n-1}}^{k_n} \nu(A_n)^{k_n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} \\
&= \frac{r!}{k_1! \cdots k_n!} \nu(A_1)^{k_1} \nu(A_2)^{k_2} \cdots \nu(A_n)^{k_n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} \\
&= e^{-\lambda\nu(A_1)} \frac{[\lambda\nu(A_1)]^{k_1}}{k_1!} \cdots e^{-\lambda\nu(A_n)} \frac{[\lambda\nu(A_n)]^{k_n}}{k_n!}
\end{aligned}$$

ce qui montre que les variables aléatoires $N_{A_1}, N_{A_2}, \cdots$ sont indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\mu(A_1), \mu(A_2), \cdots$ comme on le voulait.

Proposition 2.3.3 (Superposition) *Soit $N_A^k, A \in \mathcal{E}, k \in \mathbf{N}$, les fonctions de comptage de processus ponctuels de Poisson sur E indépendants d'intensité $\mu_k, k \in \mathbf{N}$. Alors si $\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k$ est une mesure σ-finie, $N_A = \sum_{k=1}^{+\infty} N_A^k$ est la fonction de comptage d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité μ.*

Preuve: Ceci résulte facilement du fait que la somme de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_k suit une loi de Poisson de paramètre $\sum \lambda_k$. Ceci se vérifie par exemple en calculant les transformées de Laplace.

Une autre façon d'énoncer la proposition précédente est de dire que le processus ponctuel formé de la réunion des points de processus ponctuels de Poisson indépendants d'intensité $\mu_k, k \in \mathbf{N}$, est un P.P.P. d'intensité μ.

On déduit des deux résultats précédents l'existence de processus ponctuels de Poisson d'intensité μ arbitraire. En effet, puisque μ est une mesure σ-finie par hypothèse, on peut écrire que $\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k$, où les μ_k sont des mesures bornées.

Notons dans la suite de ce chapitre m_+ et m les mesures de Lebesgue sur $\mathbf{R}^+$ et sur $\mathbf{R}$. Considérons les points du processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^+$ d'intensité λm_+. Si on note $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ ces points, il est clair qu'on fabrique ainsi un processus de Poisson d'intensité λ. On a donc

Corollaire 2.3.4 *Les points d'un processus de Poisson sur* $\mathbf{R}^+$ *de paramètre* λ *forment un processus ponctuel de Poisson d'intensité* λm_+.

On déduit de la Proposition 2.3.2 le résultat suivant: Si $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ sont les points d'un processus de Poisson, conditionellement à l'évènement $\{N_t = k\}$, le vecteur aléatoire $(T_1, T_2, \cdots, T_k)$ a la loi du réordonné croissant d'un k-échantillon de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$.

On peut construire un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}$ d'intensité λm de la façon suivante: on juxtapose deux suites $\{T_n, n \geq 1\}$ et $\{-T'_n, n \geq 1\}$ où $\{T_n, n \geq 1\}$ et $\{T'_n, n \geq 1\}$ sont deux processus de Poisson indépendants sur $\mathbf{R}^+$ de paramètres λ. On notera que le point 0 semble jouer un rôle particulier, puisqu'il est au milieu d'un intervalle dont la longueur est la somme de deux exponentielles. ceci est lié au paradoxe de l'inspection. En fait tout point fixé a cette propriété. On calcule en effet la loi de la longueur de l'intervalle $[T_n, T_{n+1}]$ contenant un point réel fixé t, aussi bien pour le cas de $\mathbf{R}$ que pour le cas de $\mathbf{R}^+$.

Proposition 2.3.5 *Pour un processus de Poisson sur* $\mathbf{R}^+$ *d'intensité* λ, *et pour tout point* t *fixé la longueur de l'intervalle contenant* t *a la même loi que* $\min(U, t) + V$ *où* U *et* V *sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramêtre* λ. *Pour un processus de poisson sur* $\mathbf{R}$ *cet intervalle a la même loi que* $U + V$.

Le théorème suivant est important. Nous allons en donner d'abord une démonstration probabiliste s'appuyant sur la proposition 2.3.2. Nous le remontrerons ensuite dans un cadre plus général de façon plus calculatoire en s'appuyant sur la notion de fonctionnelle de Laplace

Théorème 2.3.6 (Processus de Poisson marqué) *Considérons une probabilité* μ *sur* E. *Soient* $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ *les points d'un processus de Poisson sur* $\mathbf{R}^+$ *de paramètre* λ *et soit* $Y_1, Y_2, \cdots$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble* F, *indépendantes de loi* ν, *et indépendante de la suite* $T_n, n \geq 1$. *Alors,* $X_n = (T_n, Y_n), n \geq 1$, *forme un processus ponctuel de Poisson sur* $\mathbf{R}^+ \times F$ *d'intensité* $\lambda m_+ \otimes \nu$.

Preuve: Il suffit de montrer que pour tout $t > 0$, la restriction à $[0, t] \times F$ du processus (X_n) est un P.P.P. d'intensité $\lambda m_t \otimes \nu$, où m_t est la restriction de la mesure de Lebesgue à $[0, t]$. Soient $\{U_1, U_2, \cdots\}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$ indépendantes des (Y_n) et d'une v.a. N de loi de Poisson de paramètre λt. Soit $A_1, A_2, \cdots, A_p$ des sous ensembles mesurables disjoints de $[0, t] \times F$. D'après la proposition 2.3.2, le vecteur aléatoire $(T_1, T_2, \cdots, T_{N_t})$ a la même loi que $(U_1, U_2, \cdots, U_N)$. Il en résulte que

$$(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_1}(T_i, Y_i), \cdots, \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_p}(T_i, Y_i))$$

a la même que la loi que le vecteur

$$(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{A_1}(U_i, Y_i), \cdots, \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{A_p}(U_i, Y_i)).$$

Le théorème s'en déduit en appliquant à nouveau la proposition 2.3.2.

Etudions ce qu'on appelle parfois les processus de Poisson effacés.

Corollaire 2.3.7 *Soit $T_1 < T_2 < \cdots$, les points d'un processus de Poisson sur $\mathbf{R}^+$ d'intensité λ. On peint tour à tour (et de façon indépendante des autres) chaque point, soit en rouge avec probabilité p, soit en noir avec probabilité $1-p$. Soit $T'_n, n \geq 1$, la suite des points peints en rouge, et $T''_n, n \geq 1$, la suite des points peints en noir. Alors, $T'_n, n \geq 1$ est un processus de Poisson de paramètre λp, $T''_n, n \geq 1$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$, et les deux processus sont indépendants.*

Preuve: Si Y_n est une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathbf{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(Y_n = 2) = 1-p$, alors le processus (T_n, Y_n) est un processus de Poisson sur $\mathbf{R}^+ \times \{1,2\}$. Ses traces sur $\mathbf{R}^+ \times \{1\}$ et $\mathbf{R}^+ \times \{2\}$ s'identifient aux processus (T'_n) et (T''_n). Le corollaire s'en déduit facilement.

Un outils souvent utile dans l'étude des processus ponctuels de Poisson est la fonctionnelle de Laplace.

Définition 2.3.8 *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ les points d'un processus ponctuel à valeurs dans l'espace mesuré $(E, \mathcal{E})$. On appelle fonctionnelle de Laplace de ce processus l'application $\mathcal{L}$ qui à une fonction mesurable positive $f : E \to \mathbf{R}^+$ associe*

$$\mathcal{L}(f) = \mathbf{E}(\exp(-\sum_{n=1}^{+\infty} f(X_n))).$$

Théorème 2.3.9 *La fonctionnelle de Laplace du processus ponctuel de Poisson sur $(E, \mathcal{E})$ d'intensité μ est donnée par*

$$\mathcal{L}(f) = \exp\left(\int_E (e^{-f(x)} - 1)\, d\mu(x)\right).$$

Réciproquement, le seul processus ponctuel dont la fonctionnelle de Laplace vérifie cette relation est le processus ponctuel de Poisson sur $(E, \mathcal{E})$ d'intensité μ. Il suffit d'ailleurs que cette relation ait lieu pour les fonctions f ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Preuve: Supposons d'abord que f ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$. Si $A_i = \{f = \alpha_i\}$ on a $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. Si le processus est un processus ponctuel de Poisson d'intensité μ, les variables aléatoires $N(A_i) = \sum_n \mathbf{1}_{A_i}(X_n)$ sont indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\mu(A_i)$. Donc, en utilisant l'expression de la transformée de Laplace de la loi de Poisson,

$$\mathbf{E}\left(\exp(-\alpha_i N(A_i))\right) = e^{\mu(A_i)(e^{-\alpha_i}-1)}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \mathbf{E}(\exp - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(X_n)) \\
&= \mathbf{E}(\exp(-\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(X_n))) \\
&= \mathbf{E}(\exp(-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i N(A_i))) \\
&= \prod_{i=1}^{k} e^{\mu(A_i)(e^{-\alpha_i}-1)} \\
&= \exp(\sum_i \mu(A_i)(e^{-\alpha_i}-1)) \\
&= \exp\left(\int_E (e^{-f(x)}-1)\, d\mu(x)\right).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si cette formule est vraie pour $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, où les A_i sont disjoints, on voit que

$$\mathbf{E}(\exp(-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i N(A_i))) = \prod_{i=1}^{k} e^{\mu(A_i)(e^{-\alpha_i}-1)}$$

ce qui prouve que les v.a. $N(A_i), i = 1, \cdots, k$ sont indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\mu(A_i)$, donc que le processus est un processus ponctuel de Poisson d'intensité μ.

Reste à établir la formule pour une fonction mesurable positive f arbitraire. On approche une telle fonction par une suite croissante f_n de fonctions mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. La formule est vraie pour chaque f_n, et reste vraie à la limite par application des théorèmes de convergence monotone et dominée.

Le théorème suivant généralise celui sur les processus de Poisson marqués. On aurait pu le prouver de la même façon.

Théorème 2.3.10 *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ un processus ponctuel de Poisson sur E, d'intensité μ et $\{Y_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes entre elles et de même loi ν, à valeurs dans un espace mesuré $(F, \mathcal{F})$, indépendante de (X_n). Alors $\{(X_n, Y_n), n \geq 1\}$ est un P.P.P. sur $E \times F$ d'intensité $\mu \otimes \nu$.*

Preuve: Calculons la fonctionnelle de Laplace du processus (X_n, Y_n). Soit $f : E \times F \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable positive. Posons

$$g(x) = \int_F \exp(-f(x,y))\, d\nu(y).$$

En utilisant l'indépendance des processus (X_n) et (Y_n) on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \mathbf{E}(\exp(-\sum_{n=1}^{+\infty} f(X_n, Y_n))) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}[\exp(-\sum_{n=1}^{+\infty} f(X_n, Y_n))/\sigma(X_k, k \in \mathbf{N})]) \\ &= \mathbf{E}(\prod_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}[\exp(-f(X_n, Y_n))/\sigma(X_k, k \in \mathbf{N})]) \\ &= \mathbf{E}(\prod_{n=1}^{+\infty} g(X_n)).\end{aligned}$$

Remarquons alors que, puisque (X_n) est un P.P.P. d'intensité μ,

$$\mathbf{E}(\prod_{n=1}^{+\infty} g(X_n)) = \mathbf{E}(\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\ln g(X_n)) = \exp(\int_E (g(x) - 1)\, d\mu(x)$$

On obtient donc que

$$\mathcal{L}(f) = \exp(\int_E (\int_F e^{-f(x,y)} d\nu(y) - 1)\, d\mu(x)) = \exp(\int_{E\times F} (e^{-f(x,y)} - 1)\, d(\mu \otimes \nu)(x, y)).$$

2.4. La file d'attente $M/G/\infty$

Des clients arrivent aux instants $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ formant un processus de Poisson de paramètre λ. Le temps de service du client n est une variable aléatoire Y_n de loi η. On suppose que les v.a. (Y_n) sont indépendantes entre elles et indépendantes des arrivées (T_n). On considère le cas où il n'a pas d'attente: tout client est immédiatement servi. Ceci revient à supposer qu'il y a une infinité de serveurs. On peut aussi utiliser ce modèle pour décrire une population qui évolue de la façon suivante: à chaque instant T_n naît un individu, qui reste vivant pendant un temps exponentiel de paramètre η, indépendant des autres.

On emploie la notation $M/G/\infty$ pour cette situation: le M indique que les arrivées sont poissoniennes (M est pour **M**arkov, nous verons plus tard pourquoi). Le G indique que la loi des services est arbitraire (G pour **G**énéral). Enfin $/\infty$ indique qu'il y a une infinité de serveurs.

Théorème 2.4.1 *Le nombre X_t de clients dans le système à l'instant t a une loi de Poisson de paramètre $\lambda \int (y \wedge t)\, d\eta(y)$.*

Preuve: On introduit le processus $(T_n, Y_n), n \geq 1$, à valeurs dans $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.

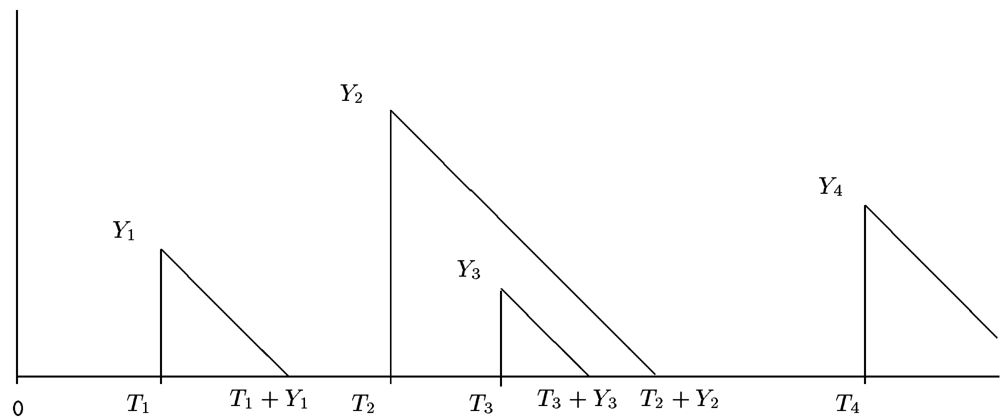

Figure 2.1: File à une infinité de serveurs

C'est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ d'intensité $\lambda m_+ \otimes \eta$, où m_+ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^+$. Remarquons que

$$X_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \le t < T_n + Y_n\}}.$$

Si $I_t = \{(x,y); 0 \le x \le t \le x+y\}$, on peut écrire $X_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{I_t}(T_n, Y_n)$. Par la définition d'un processus ponctuel de Poisson, X_t a une loi de Poisson de paramètre $(\lambda m_+ \otimes \eta)(I_t)$. Or

$$\begin{aligned}
(\lambda m_+ \otimes \eta)(I_t) &= \lambda \int \int \mathbf{1}_{I_t}(x,y)\, dx\, d\eta(y) \\
&= \lambda \int \int \mathbf{1}_{0<x<t<x+y}\, dx\, d\eta(y) \\
&= \lambda \int (y \wedge t)\, d\eta(y).
\end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de ce théorème que la loi de X_t converge vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda \int y\, d\eta(y)$. En particulier, si η n'a pas de premier moment, X_t converge en probabilité vers l'infini et le système en un sens n'est pas stable.

Supposons que les clients n'ont pas commencé à arriver à l'instant 0 mais qu'au contraire ils arrivent depuis toujours. En d'autres termes on rajoute des temps d'arrivée $\{T_{-n}, n \in \mathbf{N}\}$ et des temps de service $Y_{-n}, n \in \mathbf{N}$, correspondant à des clients d'indice $-n$ négatifs. Si les $-T_{-n}, n \ge 0$, forment un processus de Poisson indépendant de $T_n, n > 1$, si les (Y_{-n}) sont de loi η, indépendantes entre elles et des autres variables aléatoires, on voit que $\{(T_n, Z_n), n \in \mathbf{Z}\}$ forme un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ d'intensité $\lambda m \otimes \eta$.

Convenons qu'une variable aléatoire identiquement égale à $+\infty$ a une loi de Poisson de paramêtre $+\infty$.

Proposition 2.4.2 *Si les clients arrivent depuis toujours, X_t a une loi de Poisson de paramètre $\lambda \int y \, d\eta(y)$. De plus, le processus des sorties est un processus de Poisson de paramètre λ.*

Preuve: La loi de X_t se calcule immédiatement comme au dessus. Si J est un intervalle, le nombre de points $T_n + Y_n$ tombant dans J est égal au nombre de points (T_n, Y_n) tombant dans la bande $\tilde{J} = \{(x, y); x+y \in J\}$. On en déduit que le processus des temps de sortie $\{T_n + Y_n, n \in \mathbf{N}\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ en utilisant que lorsque les intervalles sont disjoints, les bandes correspondantes le sont aussi et que d'autre part $(\lambda m_+ \otimes \eta)(\tilde{J}) = \lambda(J)$.

On montre sans diificulté que la file avec des clients qui arrivent depuis toujours est stationnaire au sens suivant:

Définition 2.4.3 *Un processus $\{X_t, t \in T\}$ est stationnaire si pour tous $t_1, t_2, \cdots, t_n$, la loi du vecteur $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \cdots, X_{t_n+s})$ ne dépend pas de $s \in T$.*

C'est cette notion qui traduit celle de processus en équilibre. En particulier la loi de X_t ne bouge pas.

Si les clients n'arrivent qu'à partir de l'instant 0, quand on avance dans le temps on se rapproche de cette situation stationnaire. (Ceci se comprend bien si au lieu d'avancer dans le temps, on reste à un temps fixe, mais on fait reculer l'origine 0 des temps...).

Chapitre 3

Processus régénératifs et file $G/G/1$

3.1. Processus régénératifs

On trouve dans la littérature de nombreuses définitions des processus régénératifs. Nous avons choisi celle qui est la plus adaptée aux théorèmes ergodiques. Dans la suite $\mathbf{T}$ désigne soit l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers soit l'ensemble $\mathbf{R}^+$. Nous supposerons toujours que les processus $\{X_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ à valeurs dans un espace topologique E, que nous rencontrerons sont continus à droite.

Définition 3.1.1 *On dit qu'un processus $X_t, t \in \mathbf{T}$, est régénératif si il existe une suite croissante $\{\tau_n, n \in \mathbf{N}\}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{T}$ telle que, pour toute fonction mesurable $f : E \to \mathbf{R}^+$, les variables aléatoires*

$$Z_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} f(X_s)\, ds \ \ si\ \mathbf{T} = \mathbf{R}^+, Z_n = \sum_{k=\tau_n}^{\tau_{n+1}-1} f(X_k)\ \ si\ \mathbf{T} = \mathbf{N},$$

sont indépendantes et de même loi.

Très souvent $\tau_0 = 0$, mais ce n'est pas une nécéssité. En prenant pour f la fonction identiquement égale à 1, on voit que les variables aléatoires $\{\tau_{n+1} - \tau_n, n \in \mathbf{N}\}$, sont positives, indépendantes et de même loi. On voit donc que τ_n est une marche aléatoire sur $\mathbf{R}$ à valeurs positives. On appelle parfois un tel processus un processus de renouvellement.

Nous utiliserons la version suivante de la loi des grands nombres:

Théorème 3.1.2 *Soit $Y_k, k \geq 1$, des variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs positives. Alors, presque sûrement,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \mathbf{E}(Y_1) \leq +\infty.$$

Preuve: Lorsque $\mathbf{E}(Y_1) < +\infty$, c'est la loi des grands nombres classiques. Si $\mathbf{E}(Y_1) = +\infty$, on remarque que pour tout $a > 0$, puisque $\min(Y_1, a)$ est d'espérance finie,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{n} \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \min(Y_k, a)}{n} = \mathbf{E}(\min(Y_1, a))$$

Ceci étant vrai pour tout a, par application du théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{n} \geq \lim_{a \to +\infty} \mathbf{E}(\min(Y_1, a)) = \infty.$$

Théorème 3.1.3 (Théorème ergodique des processus régénératifs, $\mathbf{T} = \mathbf{R}^+$) *Considérons un processus régénératif $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, à valeurs dans E. Pour toutes fonctions mesurables $f, g : E \to \mathbf{R}^+$, presque sûrement,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\int_0^t f(X_s)\, ds}{\int_0^t g(X_s)\, ds} = \frac{\mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(X_s)\, ds]}{\mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} g(X_s)\, ds]},$$

si $\mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} g(X_s)\, ds] < +\infty$. En particulier, si $\mathbf{E}(\tau_1 - \tau_0) < +\infty$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\, ds = \int_E f(x)\, d\pi(x),$$

où π est la probabilité sur E définie par

$$\int f\, d\pi = \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1 - \tau_0)} \mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(X_s)\, ds].$$

Preuve: Posons $N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau_k)$. Alors, pour $t \geq \tau_0$,

$$\tau_{N_t} \leq t \leq \tau_{N_t+1}.$$

On a, puisque f est à valeurs positives,

$$\int_0^{\tau_{N_t}} f(X_s)\, ds \leq \int_0^t f(X_s)\, ds \leq \int_0^{\tau_{N_t+1}} f(X_s)\, ds.$$

Remarquons que

$$\frac{1}{N_t} \int_0^{\tau_{N_t}} f(X_s)\, ds = \frac{1}{N_t} \int_0^{\tau_0} f(X_s)\, ds + \frac{1}{N_t} \sum_{k=0}^{N_t - 1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(X_s)\, ds.$$

Par hypothèse, les variables aléatoires $Z_k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f(X_s)\, ds$ sont indépendantes et de même loi. Il résulte de la loi des grands nombres que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$ converge p.s. vers $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(X_s)\, ds]$. Quand $t \to +\infty$, puisque $N_t \to +\infty$, on en déduit que $\frac{1}{N_t} \sum_{k=0}^{N_t - 1} Z_k$ converge vers la même limite. Comme $\frac{1}{N_t} \int_0^{\tau_0} f(X_s)\, ds$ tend vers 0 de façon évidente, on voit que, p.s.,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{N_t} \int_0^{\tau_{N_t}} f(X_s)\, ds = \mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(X_s)\, ds].$$

De la même façon (en utilisant que $\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{N_t+1} = 1$)

$$\lim \frac{1}{N_t} \int_0^{\tau_{N_t+1}} f(X_s)\, ds = \mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(X_s)\, ds],$$

donc

$$\lim \frac{1}{N_t} \int_0^{t} f(X_s)\, ds = \mathbf{E}[\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(X_s)\, ds]$$

Ce qui entraîne facilement le théorème.

On montre de la même façon:

Théorème 3.1.4 (Théorème ergodique des processus régénératifs, $T = \mathbf{N}$) *Considérons un processus régénératif $X_n, n \in \mathbf{N}$, à valeurs dans E. Pour toutes fonctions mesurables $f, g : E \to \mathbf{R}^+$, presque sûrement,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^n f(X_k)}{\sum_{k=0}^n g(X_k)} = \frac{\mathbf{E}[\sum_{k=\tau_0}^{\tau_1-1} f(X_k)]}{\mathbf{E}[\sum_{k=\tau_0}^{\tau_1-1} g(X_k)]},$$

si $\mathbf{E}[\sum_{k=\tau_0}^{\tau_1-1} g(X_k)] < +\infty$. Lorsque $\mathbf{E}(\tau_1 - \tau_0) < +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \int_E f(x)\, d\pi(x),$$

où π est la probabilité sur E définie par

$$\int f\, d\pi = \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1 - \tau_0)} \mathbf{E}[\sum_{k=\tau_0}^{\tau_1-1} f(X_k)].$$

De nombreux exemples de processus régénératifs sont donnés par la situation suivante:

Proposition 3.1.5 *Si il y a un temps d'arrêt τ de la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$ tel que le processus $X^{(\tau)}$ défini par $X_t^{(\tau)} = X_{\tau+t}$, pour tout $t \in \mathbf{T}$, est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$ et de même loi que le processus X, alors X est régénératif.*

Preuve: En effet, il existe alors une fonction F défini sur l'ensemble des trajectoires telle que $\tau = F(X_t, t \ge 0)$. On pose alors $\tau_0 = 0, \tau_1 = \tau$ puis $\tau_2 = \tau_1 + F(X^{\tau_1})$, $\tau_3 = \tau_2 + F(X^{\tau_2})$, etc ... Si $f : E \to \mathbf{R}^+$ est mesurable, les variables aléatoires $\int_0^{\tau_1} f(X_s) ds$ et $\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(X_s) ds$ sont indépendates et de même loi. En effet, la première est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable alors que la seconde s'écrit

$$\int_0^{F(X^\tau)} f(X_s^\tau)\, ds,$$

on poursuit par récurrence.

A titre d'exemple regardons les processus de renouvellement alternés. Afin de modéliser le comportement d'une machine qui est successivement en état de marche et en panne, on introduit:

Définition 3.1.6 *Une suite $0 \leq T_1 \leq T_2 \cdots$ de variables aléatoires est un processus de renouvellement alterné si les v.a. $\{T_{n+1} - T_n, n \geq 0\}$ sont indépendantes, si les v.a. $\{T_{2n+1} - T_{2n}, n \geq 0\}$ ont une même loi et les v.a. $\{T_{2n+2} - T_{2n+1}, n \geq 0\}$ ont une autre même loi.*

(par convention $T_0 = 0$). Par exemple, les T_{2n} sont les instants où la machine tombe en panne et les T_{2n+1} ceux où elle est réparée. On pose $X_t = 1$ si la machine est en marche à l'instant t et $X_t = 0$ sinon. Autrement dit,

$$X_t = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T_{2n+1} \leq t \leq T_{2n+2}\}}.$$

Remarquons que X_t est un processus régénératif d'instants de régénération $\tau_n = T_{2n}$. la propotion de temsp passé dans l'état de marche est donné par la proposition suivante qui résulte du Théorème 3.1.3

Proposition 3.1.7 *Si $\mathbf{E}(T_2) < +\infty$, presque sûrement,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = 1\}}\, ds = \frac{1}{\mathbf{E}(T_2)} \mathbf{E}(T_2 - T_1).$$

3.2. Lemme de Wald

Etablissons les lemmes suivants:

Lemme 3.2.1 *Pour toute v.a. T à valeurs dans $\mathbf{N}$,*

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T > n)$$

Preuve: Il suffit de remarquer que $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{n<T\}}$ et de prendre l'espérance.

Lemme 3.2.2 (Lemme de Wald) *Soit $\{Y_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, si $n \geq 1$. Pour tout temps aléatoire T tel que $\{T = n\}$ est indépendant de $\sigma(Y_k, k > n\}$, en particulier pour tout temps d'arrêt T de la filtration $\sigma(S_1, \cdots, S_n)$,*

$$\mathbf{E}(S_T) = \mathbf{E}(Y_1)\mathbf{E}(T),$$

sous l'une des conditions suivantes:

a. $Y_1 \geq 0$, *p.s.*,

b. $\mathbf{E}(|Y_1|) < +\infty$ *et* $\mathbf{E}(T) < +\infty$.

Preuve: Supposons d'abord les v.a. Y_n à valeurs positives. Alors, on peut appliquer le théorème de Fubini pour écrire:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(S_n \mathbf{1}_{\{T=n\}}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}((Y_1 + \cdots + Y_n)\mathbf{1}_{\{T=n\}}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_k \mathbf{1}_{\{T\geq k\}}).
\end{aligned}$$

Remarquons que $\{T \geq k\}$ est indépendant de Y_k. On a donc (en utilisant le lemme précédant):

$$\mathbf{E}(S_T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_k)\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T\geq k\}}) = \mathbf{E}(Y_1) \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T \geq k) = \mathbf{E}(Y_1)\mathbf{E}(T).$$

Considérons maintenant le cas où Y_1 et T sont intégrables. Appliquant ce que l'on vient de faire à $|Y_n|$ on voit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} |Y_k| \mathbf{1}_{T=n}$ est intégrable (et d'espérance $\mathbf{E}(T)\mathbf{E}(|Y_1|)$). Ceci permet de justifier l'emploi du théorème de Fubini et donc de refaire le calcul précédent.

Lemme 3.2.3 *Soit $\{Y_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, intégrables telle que $\mathbf{E}(Y_1) > 0$. Alors le premier instant ν où la marche aléatoire $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ est strictement positive, est intégrable et $\mathbf{E}(S_\nu) < +\infty$.*

Preuve: Remarquons que ν est un temps d'arrêt de la marche S_n. Pour tout entier n, $\nu \wedge n$ est aussi un temps d'arrêt de cette marche. Puisque $\nu \wedge n$ et S_1 sont intégrables il résulte du lemme de Wald que

$$\mathbf{E}(\nu \wedge n)\mathbf{E}(S_1) = \mathbf{E}(S_{\nu\wedge n}).$$

Supposons d'abord qu'il existe une constante M telle que $Y_1 \leq M$. Dans ce cas $S_{\nu\wedge n} \leq M$. En appliquant le lemme de Fatou à la suite $M - S_{\nu\wedge n}$, nous voyons que

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbf{E}(\nu \wedge n)\mathbf{E}(S_1) = \limsup_{n\to+\infty} \mathbf{E}(S_{\nu\wedge n}) \leq \mathbf{E}(\limsup_{n\to+\infty} S_{\nu\wedge n}),$$

d'où, en utilisant le théorème de convergence monotone pour traiter le premier terme,

$$\mathbf{E}(\nu)\mathbf{E}(S_1) \leq M.$$

En voit donc que $\mathbf{E}(\nu)$ est fini. Considérons alors le cas général. Choisissons une constante M assez grande pour que $\mathbf{E}(Y_1 \wedge M) > 0$. En appliquant ce qui précède à la marche aléatoire $S_n^M = \sum_{k=1}^{n}(Y_k \wedge M)$ on voit que le temps d'arrêt $\tau_M = \inf\{n \geq 0; S_n^M > 0\}$ est intégrable. Or, $S_n \geq S_n^M$, donc $\tau \leq \tau_M$. On voit donc que τ lui même est intégrable. Par le lemme de Wald, $\mathbf{E}(\tau)\mathbf{E}(S_1) = \mathbf{E}(S_\tau)$, donc S_τ est aussi intégrable. Comme application du lemme de Wald montrons

Théorème 3.2.4 *Théorème élémentaire du renouvellement Soit $\tau_n, n \geq 0$, un processus de renouvellement (avec $\tau_0 = 0$) et $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau_n)$. Lorsque $n \to \infty$*

a. $\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1)}$ *presque surement.*

b. $\mathbf{E}(\frac{N_t}{t}) \to \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1)}$

Preuve: Le a. résulte de l'inégalité

$$\tau_{N_t} \leq t \leq \tau_{N_t+1}$$

et de la loi des grands nombres qui implique que $\lim_{t\to+\infty} \frac{\tau_{N_t}}{N_t} = \mathbf{E}(\tau_1)$.

Le b. est plus délicat. Supposons d'abord qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\tau_1 \leq M$ p.s. Remarquons que τ_n est une marche aléatoire et que $N_t + 1$ est un temps d'arrêt de cette marche car

$$\{N_t + 1 \leq k\} = \{\tau_k > t\}.$$

Il résulte du lemme de Wald que

$$\mathbf{E}(\tau_{N_t+1}) = \mathbf{E}(\tau_1)\mathbf{E}(N_t + 1)$$

ce qui entraîne b. car $t \leq \tau_{N_t+1} \leq t + M$ grace a l'hypothèse $\tau_1 \leq M$ p.s. Sans cette hypothèse on a seulement que $\lim \mathbf{E}(\frac{N_t}{t}) \geq \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1)}$; Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens on regarde le processus de renouvellement $\tau_n^{(M)} = \sum_{k=0}^{n-1} \min(\tau_{k+1} - \tau_k, M)$ et son processus de comptage $N_t^{(M)}$. Puisque $\tau_n^{(M)} \leq \tau_n$ on a $N_t \leq N_t^(M)$, donc,

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}(\frac{N_t}{t}) \leq \lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}(\frac{N_t^{(M)}}{t}) = \frac{1}{\mathbf{E}(\min(\tau_1, M)}$$

en utilisant ce qui précède. Il suffit alors de faire tendre M vers $+\infty$.

On appelle ce théorème est dit "élémentaire" pour le distinguer du théorème du renouvellement qui montre sous une hypothèse naturelle sur τ_1 que $\mathbf{E}(N_{t+h}) - \mathbf{E}(N_t)$ tend vers $\frac{h}{\mathbf{E}(\tau_1)}$. Cette hypothèse est par exemple vérifiée si τ_1 a une densité.

3.3. La file d'attente $G/G/1$

3.3.1. Etude via les processus régénératifs

Des clients arrivent aux instants $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ devant un serveur. Le client n arrive en T_n. Si le serveur est libre, le client va se faire servir, et sa durée de service est le temps aléatoire σ_n. Les clients sont servis suivant la discipline: premier arrivé, premier servi (FIFO: first in, first out).

On suppose que les v.a. $T_1 - T_0, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \cdots$, sont indépendantes de même loi ν, indépendantes des durées de service, et que les durées de service $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots$ sont indépendantes de loi η. On a donc une file $G/G/1$. On pose

$$X_t = \text{Taille du système à l'instant } t,$$

c'est à dire le nombre total de clients soit en train d'être servis soit dans la file d'attente, à l'instant t. Comme toujours, X_t est choisi par construction continu à droite. Nous supposerons pour simplifier l'exposé qu'à l'instant 0 le client 0 arrive dans un systême vide , on a donc $X_0 = 1$. Posons

$$\tau = \inf\{t > T_1; X_{t^-} = 0, X_t > 0\},$$

τ est donc le premier instant où un nouveau client arrive devant un système vide. Afin d'étudier cette variable aléatoire, montrons:

Proposition 3.3.1 *Considérons une file $G/G/1$. Supposons que $+\infty > \mathbf{E}(T_1) > \mathbf{E}(\sigma_0)$. Alors τ est d'espérance finie (et donc fini presque sûrement) .*

Preuve: Après l'instant 0 où arrive le client 0, tant que le système ne se vide pas, le client $n-1$ sort à l'instant $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k$. Le client n arrive en T_n devant un système vide si $T_n > \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k$. Posons $Y_k = T_k - T_{k-1} - \sigma_{k-1}, \Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, et $N = \inf\{n; \Sigma_n > 0\}$. N est le numéro du premier client qui arrive devant un système vide. Alors $\tau = T_N$. Il résulte du lemme 3.2.3 que N est intégrable. Puisque T_n est une marche aléatoire et que $\{N = n\}$ est indépendent de $\sigma(T_{n+p} - T_n, p \in \mathbf{N})$ il résulte du lemme de Wald que

$$\mathbf{E}(T_N) = \mathbf{E}(T_1)\mathbf{E}(N) \tag{3.1}$$

τ est intégrable, et en particulier fini p.s.

Il est intuitivement clair que, lorsque τ est fini p.s., les temps successifs τ_n où un nouveau client arrive devant un système vide font de (X_t) un processus régénératif. On a $\tau_0 = 0, \tau_1 = T_N, \cdots$. Pour le montrer rigoureusement, on établit que les v.a.

$$(T_{N+k+1} - T_{N+k}, \sigma_{N+k}), k = 0, 1 \cdots$$

sont indépendantes de même loi que (T_1, σ_0) et indépendantes de $\int_0^\tau f(X_s)\,ds$. On déduit donc du théorème 3.1.3 le théorème suivant qui montre que la file a un comportement limite bien défini. Posons

$$\int f\,d\pi = \frac{1}{\mathbf{E}(\tau)}\mathbf{E}(\int_0^\tau f(X_s)\,ds).$$

Théorème 3.3.2 *Si $+\infty > \mathbf{E}(T_1) > \mathbf{E}(\sigma_1)$, pour toute fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds = \int f\,d\pi, \quad p.s.$$

Ce théorème justifie les méthodes de Monte Carlo. Par exemple pour estimer la taille moyenne de la file, on applique ce théorème à la fonction $f(x) = x$.

Notons V_n le temps que le client n passe dans le système. Le processus $V_n, n \in \mathbf{N}$, est régénératif de premiers temps de régénération 0 puis N. On pose, pour tout borélien A de $\mathbf{R}^+$,

$$\mu(A) = \frac{1}{\mathbf{E}(N)}\mathbf{E}(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_A(V_k)).$$

On a donc:

Proposition 3.3.3 *Sous les hypothèses précédentes, pour toute fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ intégrable par rapport à μ,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(V_k) = \int f\, d\mu, \quad p.s.$$

Notons $\bar{V}$ la valeur moyenne de V_n et $\bar{X}$ la valeur moyenne de X_t, définies par

$$\bar{V} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V_k, \qquad \bar{X} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t X_s\, ds.$$

Corollaire 3.3.4 (Formule de Little) *Si $\lambda = \frac{1}{\mathbf{E}(T_1)}$,*

$$\bar{X} = \lambda \bar{V}.$$

Preuve: D'après les propositions précédentes,

$$\bar{X} = \frac{1}{\mathbf{E}(\tau)}\mathbf{E}(\int_0^\tau X_s\, ds); \quad \text{et} \quad \bar{V} = \frac{1}{\mathbf{E}(N)}\mathbf{E}(\sum_{k=0}^{N-1} V_k).$$

Or, nous avons vu que $\mathbf{E}(T_N) = \mathbf{E}(T_1)\mathbf{E}(N)$ c'est à dire que $\mathbf{E}(N) = \lambda\mathbf{E}(\tau)$. On conclut en remarquant que $\int_0^\tau X_s\, ds = \sum_{k=0}^{N-1} V_k$. En effet, ces deux quantités représentent sur la figure la surface entourée par la courbe en gras.

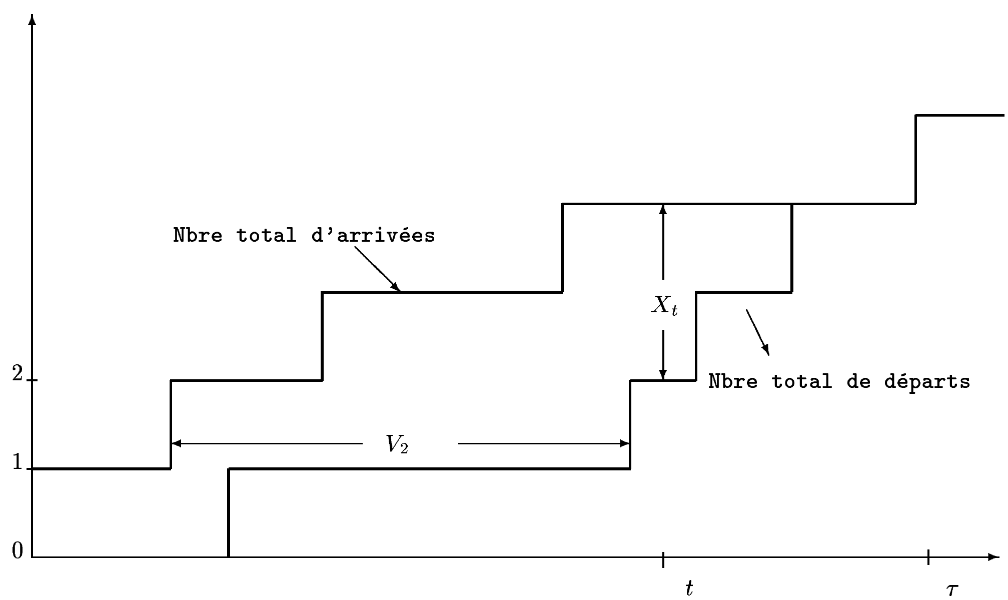

Figure 3.1: Un cycle de la file $G/G/1$

3.3.2. Approche via les équations stochastiques

Interessons nous maintenant au temps qu'un client passe dans le systême. On suppose encore qu'un client numéro 0, arrive en 0 dans le système. Soient donc $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ les instants d'arrivées des clients successifs, $\sigma_0, \sigma_1, \cdots$ leur temps de service. On suppose que les variables aléatoires $\{(T_{n+1} - T_n, \sigma_n), n \in \mathbf{N}\}$ sont indépendantes et de même loi (nous n'utiliserons pas ce que nous savons déja sur ces files).

Notons W_n le temps que le client n attend avant de commencer à être servi. Il sera utile de pouvoir supposer que W_0 est éventuellement non nul (mais naturellement indépendant des (σ_n, T_n)). On vérifie que, si $\varepsilon_{n+1} = \sigma_n - (T_{n+1} - T_n)$,

$$W_{n+1} = (W_n + \varepsilon_{n+1})^+ \tag{3.2}$$

où $x^+ = \max(x, 0)$. On suppose que $\mathbf{E}(T_1)$ et $\mathbf{E}(\sigma_0)$ sont finis. Soit $S_0 = 0$ et $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$.

Théorème 3.3.5 *Soit $\rho = \mathbf{E}(\sigma_0)/\mathbf{E}(T_1)$. Alors*

- *Si $\rho < 1$, W_n converge en loi vers $\max_{k \geq 0} S_k$. Cette loi est caractérisée comme étant la seule probabilité ν sur $\mathbf{R}^+$ telle que si W_0 a la loi ν alors W_1 est encore de loi ν (et dans ce cas tous les W_n ont la loi ν).*
- *Si $\rho > 1$, W_n tend vers $+\infty$, presque sûrement.*

Preuve: On voit facilement par récurrence que

$$W_n = \max(0, \varepsilon_n, \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}, \cdots, \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} + \cdots + \varepsilon_2, \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} + \cdots + \varepsilon_1 + W_0).$$

En particulier $W_n \geq S_n$. Lorsque $\rho > 1$, $S_n \to +\infty$, p.s. par la loi des grands nombres, donc $W_n \to +\infty$.

Considérons le cas $\rho < 1$, c'est à dire $E(S_1) < 0$. Remarquons que puisque les vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \cdots, \varepsilon_1)$ ont la même loi, W_n a la même loi que

$$\max(0, \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + W_0)$$

c'est à dire que $K_n = \max(M_{n-1}, S_n + W_0)$ où $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. Or S_n tend vers $-\infty$ par la loi des grands nombres car $\mathbf{E}(\varepsilon_1) < 0$. Donc K_n tend vers $\max_{k \geq 0} S_k$ qui est fini. Donc W_n converge en loi vers $\max_{k \geq 0} S_k$.

Supposons maintenant que W_0 a la loi de $\max_{k \geq 0} S_k$. Si ε_0 est une v.a. de même loi que les ε_n mais indépendante de ces v.a., on a

$$(\max_{k \geq 0} S_k + \varepsilon_0)^+ = \max(0, \max_{k \geq 0}(S_k + \varepsilon_0)) = \max_{n \geq 0} \tilde{S}_n$$

où $\tilde{S}_0 = 0$ et $\tilde{S}_n = \varepsilon_0 + S_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Il est clair que les deux processus (S_n) et $(\tilde{S}_n)$ ont la même loi. Donc $\max_{n \geq 0} \tilde{S}_n = (\max_{k \geq 0} S_k + \varepsilon_0)^+$ a la même loi que $\max_{k \geq 0} S_k$.

Il nous reste à montrer l'unicité. Si ν est une probabilité telle que $W_1 = (W_0+\varepsilon_1)^+$ a pour loi ν lorsque W_0 est de loi ν on voit par récurrence qu'alors W_n est de loi ν pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or on a vu que W_n converge en loi vers $\max S_k$ donc ν est la loi de $\max S_k$.

Remarque 3.3.6 Dans le cas $\rho < 1$, il n'y a que convergence en loi de W_n. Par exemple W_n s'annule une infinité de fois.

Remarque 3.3.7 Dans le cas $\rho < 1$, si on choisit pour W_0 la loi ν, le processus (W_n) est stationnaire.

Dans le théorème, on pourrait montrer que, si $\rho = 1$, W_n tend en probabilité vers $+\infty$, et s'annule une infinité de fois p.s. (en utilisant la récurrence des m.a. de moyenne nulle).

3.3.3. Un exemple: la file G/M/1

Considérons d'abord l'exemple de la file $G/M/1$. Dans ce cas les services σ_n ont une même loi exponentielle, dont nous notons μ le paramètre. Cherchons la loi π d'une variable aléatoire W telle que

$$\tilde{W} = (W + \sigma_0 - T_1)^+$$

a même loi que W si W est indépendante de $X = \sigma_0 - T_1$. Il est raisonnable de chercher π sous la forme d'un barycentre d'une masse de Dirac en 0 et d'une loi exponentielle. Autrement dit cherchons $c > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbf{P}(W > t) = ce^{-\alpha t}.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}((W+X)^+ > t) &= \mathbf{P}(W + X > t) \\
&= \mathbf{P}(W > t - X, t - X > 0) + \mathbf{P}(t - X \leq 0) \\
&= \mathbf{E}(ce^{-\alpha(t-X)}\mathbf{1}_{\{t-X>0\}}) + \mathbf{P}(X \geq t)
\end{aligned}$$

Or, si l'on note η la loi de T_1, et $\mathcal{L}_\eta$ sa transformée de Laplace,

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \mathbf{P}(\sigma_0 > T_1 + t) = e^{-\mu t}\mathbf{E}(e^{-\mu T_1}) = e^{-\mu t}\mathcal{L}_\eta(\mu)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(e^{\alpha X}\mathbf{1}_{\{t-X>0\}}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\alpha(s-y)}\mathbf{1}_{\{t-(s-y)>0\}}\mu e^{-\mu s}\, ds\, d\eta(y) \\
&= \frac{\mu}{\mu-\alpha}\int_0^\infty (1 - e^{-(\mu-\alpha)(t+y)})e^{-\alpha y}\, d\eta(y) \\
&= \frac{\mu}{\mu-\alpha}\left(\mathcal{L}_\eta(\alpha) - e^{-(\mu-\alpha)t}\mathcal{L}_\eta(\mu)\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{P}((W+X)^+ > t) = c\frac{\mu}{\mu-\alpha}\mathcal{L}_\eta(\alpha)e^{-\alpha t} - c\frac{\mu}{\mu-\alpha}e^{-\mu t}\mathcal{L}_\eta(\mu) + e^{-\mu t}\mathcal{L}_\eta(\mu).$$

On voit que si α vérifie $\mathcal{L}_\eta(\alpha) = \frac{\mu-\alpha}{\mu} = c$ alors $\mathbf{P}((W+X)^+ > t) = \mathbf{P}(W > t)$ comme on le voulait. Il reste donc à établir l'existence d'un tel α. La fonction $h(t) = \frac{\mu}{\mu-t}\mathcal{L}_\eta(t)$ est continue sur $[0, \mu[$, vérifie $h(0) = 1, h'(0) = \frac{1}{\mu} - \mathbf{E}(T_1) < 0$ et $\lim_{t\to\mu} h(t) = +\infty$, il existe donc bien un $\alpha \in]0, \mu[$ tel que $h(\alpha) = 1$. Nous avons donc montré:

Proposition 3.3.8 *Soit $\alpha \in]0, \mu[$ et $c > 0$ tels que $\mathcal{L}_\eta(\alpha) = \frac{\mu-\alpha}{\mu} = c$. La loi de W est celle de $(1-c)\delta_0 + c\mathcal{E}(\alpha)$.*

Si l'on attend, la durée de cette attente est "sans mémoire". La loi du "reste du temps à attendre" est toujours la même.

3.3.4. Un exemple: une file $G/D/1$

Considérons une file $G/D/1$ à valeurs entières: les durées de service sont déterministes. Autrement dit elles ne sont pas aléatoires, mais toutes égales à une même constante que nous choisirons égale à 1. Nou supposons de plus que les temps d'arrivée sont à valeurs entières. On utilise l'équation en loi

$$\tilde{W} = (W + \varepsilon_0)^+.$$

Cherchons une solution qui soit une loi géométrique sur $\mathbf{N}$ de paramètre q. Dans ce cas $\mathbf{P}(W \geq n) = q^n$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, en posant $T = T_2 - T_1$,

$$\begin{aligned}
q^{n+1} &= \mathbf{P}(W > n) = \mathbf{P}(\tilde{W} > n) \\
&= \mathbf{P}((W+\varepsilon_0)^+ > n) = \mathbf{P}(W + \varepsilon_0 > n) \\
&= \mathbf{P}(W + 1 - T > n) = \mathbf{P}(W \geq n + T) \\
&= \mathbf{E}(q^{n+T}) = q^n\mathbf{E}(q^T)
\end{aligned}$$

Cette relation est vérifiée si et seulement si q est choisi de telle sorte que $\mathbf{E}(q^T) = q$ c'est à dire que

$$E(q^{T-1}) = 1$$

Cette équation a effectivement une solution car la fonction $\lambda \to E(e^{-\lambda(T-1)})$ est continue sur $\mathbf{R}^+$, est égale à 1 en 0, tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$ et a une dérivée en 0 égale à $\mathbf{E}(1-T) > 0$. On peut utiliser des méthodes d'approximation numérique pour approcher p ou bien des méthodes de Monte Carlo (c'est à dire des simulations).

Chapitre 4

Chaînes de Markov

Ce chapitre ne prétend pas être une introduction générale aux chaînes de Markov, puisque la plupart les connaisse déja. Nous nous limitons à ce dont nous avons besoin dans la suite. Pour nous, la notion fondamentale est celle de probabilité invariante et la liaison avec les processus stationnaires. Elle généralise la notion d'état d'équilibre de la mécanique.

Pour ne pas toujours reprendre les preuves classiques que beaucoup d'étudiants ont déja vues, nous nous limitons essentiellement aux chaînes récurrentes positives.

4.1. Noyaux (ou matrices) de transition

Dans tout ce chapitre, E est un espace dénombrable, c'est à dire soit fini, soit en bijection avec $\mathbf{N}$.

Définition 4.1.1 *On appelle noyau (ou matrice, ou probabilité) de transition sur E, une famille $\{P(i,j), i,j \in E\}$ de réels telle que*

i) $P(i,j) \geq 0$, pour tout $i,j \in E$.

ii) Pour tout $i \in E$, $\sum_{j \in E} P(i,j) = 1$.

Etant donnés deux noyaux de transition P et Q sur E, on définit un nouveau noyau de transition PQ par la formule

$$(PQ)(i,j) = \sum_{k \in E} P(i,k)Q(k,j).$$

Soit I le noyau de transition Identité, défini par $I(i,j) = 1$, si $i = j$ et $I(i,j) = 0$, sinon. On pose $P^0 = I, P^1 = P$, puis par récurrence, $P^{n+1} = P^n P$.

Le noyau P opère sur les fonctions et les mesures sur E. Si $f : E \to \mathbf{R}$ est une fonction par exemple bornée ou à valeurs positives et si m est une mesure sur E (par définition une mesure est toujours à valeurs positives) on définit la fonction Pf et la mesure mP sur E par:

$$Pf(i) = \sum_{j \in E} P(i,j)f(j), \quad mP(j) = \sum_{i \in E} m(i)P(i,j).$$

Les notations sont cohérentes: si P, Q sont des noyaux, $(PQ)f = P(Qf)$ et $m(PQ) = (mP)Q$.

Supposons que E est fini et a d éléments. Une numérotation des états nous permet de supposer que $E = \{1, 2, \cdots, d\}$. Alors, un noyau de transition P s'identifie avec la matrice de coefficients $P(i,j), 1 \leq i,j \leq d$, une fonction f s'identifie au vecteur colonne $\{f(i), 1 \leq i \leq d\}$ et la mesure m au vecteur ligne $\{m(i), 1 \leq i \leq d\}$. Dans ce cas PQ, Pf, mP sont bien donnés par le produit des matrices P par Q, P par f et m par P.

4.2. Chaîne de Markov

Soit E un ensemble dénombrable muni d'une probabilité de transition P.

Définition 4.2.1 *On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ à valeurs dans E, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, est une chaîne de Markov de noyau P si*

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = P(x_n, x_{n+1})$$

pour tout $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1} \in E$, et tout $n \in \mathbf{N}$.

On dit que la loi de X_0 est la loi initiale de la chaîne. Si ν est une probabilité sur E, on note $\mathbf{P}_\nu$ la loi de la chaîne de noyau P de loi initiale ν. Remarquons que pour tout sous ensemble mesurable A de Ω,

$$\mathbf{P}_\nu(A) = \int_E \mathbf{P}_x(A \, d\nu(x).$$

Si $x \in E$, on note $\mathbf{P}_x$ la loi de la chaîne lorsque $X_0 = x$, c'est à dire lorsque la loi initiale est la masse de Dirac en x. Le lemme suivant montre que le noyau de transition et la loi initiale déterminent complètement la loi de la chaîne.

Lemme 4.2.2 *Pour toute probabilité ν sur E,*

$$\mathbf{P}_\nu(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \nu(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n),$$

en particulier,

$$\mathbf{P}_x(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = P(x, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n).$$

Preuve: Par récurrence sur n.

Proposition 4.2.3 *Si $X_n, n \in \mathbf{N}$, est une chaîne de noyau P, pour toute fonction $f : E \to \mathbf{R}^+$, on a $\mathbf{E}_x(f(X_n)) = P^n f(x)$. D'autre part, νP^n est la loi de X_n lorsque ν est la loi de X_0.*

Preuve: Montrons par exemple la première assertion: on vérifie d'abord facilement par récurrence sur n que

$$P^n(x,y) = \sum_{x_1,\cdots,x_{n-1}} P(x,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n-1},y).$$

Avec le lemme précédent, on en déduit que

$$P^n(x,y) = \mathbf{P}_x(X_n = y).$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x(f(X_n)) &= \sum_{y\in E} \mathbf{E}_x(f(X_n)\mathbf{1}_{X_n=y}) = \sum_{y\in E} f(y)\mathbf{P}_x(X_n = y)\\ &= \sum_{y\in E} f(y)P^n(x,y) = P^n f(x).\end{aligned}$$

4.3. Propriété de Markov

Soit $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ une chaîne de Markov sur E. On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$. Montrons d'abord:

Théorème 4.3.1 (Propriété de Markov simple) *Pour toute fonction mesurable $f : E^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$, par exemple bornée ou positive, pour toute probabilité ν, $\mathbf{P}_\nu-$ presque sûrement,*

$$\mathbf{E}_\nu[f(X_n, X_{n+1}, \cdots)/\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}_{X_n}[f(X_0, X_1, \cdots)].$$

Preuve: Dans une première étape qui utilise le lemme d'unicité, on montre qu'il suffit de vérifier ce résultat lorsque f est une fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_A$ où A est de la forme

$$A = \{a_0\} \times \{a_1\} \times \cdots \times \{a_d\} \times E \times E \times \cdots.$$

(la classe de ces ensembles A est stable par intersection finie et engendre la tribu produit). Alors $f(X_n, X_{n+1}, \cdots) = \mathbf{1}_{\{X_n=a_0, X_{n+1}=a_1,\cdots,X_{n+d}=a_d\}}$ Sur l'ensemble $X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n$ on a, si $x_n = a_0$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_\nu[f(X_n, X_{n+1}, \cdots)/\mathcal{F}_n]\\ &= \mathbf{P}_\nu(X_n = a_0, X_{n+1} = a_1, \cdots, X_{n+d} = a_d/X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)\\ &= \frac{\mathbf{P}_\nu(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n, X_n = a_0, X_{n+1} = a_1, \cdots, X_{n+d} = a_d)}{\mathbf{P}_\nu(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)}\\ &= \frac{\nu(x_0)P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n-1},x_n)P(x_n,a_1)\cdots P(a_{d-1},a_d)}{\nu(x_0)P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n-1},x_n)}\\ &= P(x_n,a_1)\cdots P(a_{d-1},a_d)\\ &= \mathbf{E}_{X_n}[f(X_0, X_1, \cdots)]\end{aligned}$$

Si $x_n \neq a_0$ il y a encore égalité car les deux termes sont nuls.

Rappelons qu'un temps d'arrêt du processus (X_n) est une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'événement $\{T \leq n\}$ est dans $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. La tribu $\mathcal{F}_T$ est formée des événements A tels que $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. En particulier $T, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} X_T$ et $X_{\min(T,n)}$ sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_T$ mesurables.

Lemme 4.3.2 *Soit T un temps d'arrêt. Pour toute variable aléatoire Z bornée, sur l'ensemble $\{T = n\}$,*

$$\mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_T) = \mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_n).$$

Preuve: Comme $\{T = n\} \in \mathcal{F}_T$, on a $\mathbf{1}_{\{T=n\}} \mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_T) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T=n\}} Z/\mathcal{F}_T)$. Il faut donc montrer que

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T=n\}} Z/\mathcal{F}_T) = \mathbf{1}_{\{T=n\}} \mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_n).$$

Le terme de droite est $\mathcal{F}_T$-mesurable. De plus, si $A \in \mathcal{F}_T$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T=n\} \cap A} Z) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T=n\} \cap A} \mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_n)),$$

car $\{T = n\} \cap A$ est dans $\mathcal{F}_n$.

On déduit imédiatement des deux résultats précédents:

Théorème 4.3.3 (Propriété de Markov forte) *Soit T un temps d'arrêt de la chaîne de Markov $X_n, n \in \mathbf{N}$, sur E. Pour toute fonction mesurable $f : E^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$, par exemple bornée ou positive, pour toute probabilité ν, sur l'ensemble $\{T < +\infty\}$,*

$$\mathbf{E}_\nu[f(X_T, X_{T+1}, \cdots)/\mathcal{F}_T] = \mathbf{E}_{X_T}[f(X_0, X_1, \cdots)].$$

Quitte à construire la chaîne de Markov sur $\Omega = \mathbf{E}^{\mathbf{N}}$, muni de la tribu produit, on peut toujours supposer qu'il existe une application $\theta : \Omega \to \Omega$ mesurable telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$X_n \circ \theta = X_{n+1}.$$

Cette application s'appelle le décalage (ou "shift" en anglais). On posera $\theta_0 =$ identité, $\theta_1 = \theta, \cdots, \theta_{n+1} = \theta_n \circ \theta$. Avec ces notations, la propriété de Markov forte s'écrit:

Théorème 4.3.4 (Autre forme de Markov fort) *Pour toute v.a. $Z : \Omega \to \mathbf{R}$, $\sigma(X_k, k \in \mathbf{N})$-mesurable, positive ou bornée, sur $T < +\infty$,*

$$\mathbf{E}_\nu[Z \circ \theta_T/\mathcal{F}_T] = \mathbf{E}_{X_T}[Z].$$

Notons la conséquence suivante de la propriété de Markov forte.

Corollaire 4.3.5 *Soit T un temps d'arrêt fini presque sûrement pour lequel il existe un état $i \in E$ tel que $X_T = i$, $\mathbf{P}_\nu$−p.s. Alors, $(X_T, X_{T+1}, X_{T+2}, \cdots)$ a sous $\mathbf{P}_\nu$ la même loi que $(X_0, X_1, \cdots)$ sous $\mathbf{P}_i$ et est indépendant de $\mathcal{F}_T$.*

Preuve: Il suffit de montrer que, pour tout $A \in \mathcal{F}_T$ et toute fonction mesurable bornée $f : E^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$, si ν est la loi de X_0,

$$\mathbf{E}_\nu[\mathbf{1}_A f(X_T, X_{T+1}, \cdots)] = \mathbf{P}_\nu(A) \mathbf{E}_i[f(X_0, X_1, \cdots)].$$

En écrivant que l'espérance est l'espérance de l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_T$, ceci résulte immédiatement de la propriété de Markov forte.

4.4. Propriétés de récurrence

Nous allons étudier le comportement des trajectoires d'une chaîne de Markov X_n lorsque $n \to +\infty$. On va ici essentiellement distinguer deux types de comportement suivant que la chaîne "tend vers l'infini" ou non. Introduisons les notations suivantes: pour tout $i \in E$,

$$\tau_i = \inf\{k > 0; X_k = i\},$$

puis $\tau_i^{(0)} = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$,

$$\tau_i^{(n+1)} = \inf\{k > \tau_i^{(n)}; X_k = i\}$$

On voit que $\tau^{(1)} = \tau_i$ est le temps d'atteinte de l'état i, $\tau_i^{(n)}$ est l'instant de n-ième passage en i, ce sont des temps d'arrêt. Par ailleurs, on vérifie que

$$\tau_i^{(n+1)} = \tau_i \circ \theta_{\tau_i^{(n)}} + \tau_i^{(n)}.$$

Pour tout $i, j \in \mathbf{E}$, on pose

$$G(i,j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(i,j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_j(X_n)) = \mathbf{E}_i(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_j(X_n))$$

C'est l'espérance du nombre de passages par j en partant de i.

Définition 4.4.1 *Un état i est récurrent si $\mathbf{P}_i(\tau_i < +\infty) = 1$.*

Théorème 4.4.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *i est récurrent.*
2. *$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_i(X_n) = +\infty$, $\mathbf{P}_i$-p.s.*
3. *$G(i,i) = +\infty$.*

Preuve: Montrons que, sous $\mathbf{P}_i$, la variable aléatoire $N = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_i(X_n)$ suit une loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètre $\alpha = \mathbf{P}(\tau_i < \infty)$, avec la convention que cette v.a. est identiquement infinie lorsque $\alpha = 1.$, Montrons donc que $\mathbf{P}_i(N > n) = \mathbf{P}_i(\tau_i < +\infty)^n$. C'est clair pour $n = 0$. Supposons la relation vraie au rang n. On a

$$\{\tau_i^{(n+1)} < +\infty\} = \{\tau_i^{(n)} < +\infty\} \cap \{\tau_i \circ \theta_{\tau_i^{(n)}} < +\infty\}.$$

Donc, en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}}$ et en appliquant la propriété de Markov forte, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_i(N > n+1) &= \mathbf{P}_i(\tau_i^{(n+1)} < +\infty) = \mathbf{E}_i[\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{\tau_i^{(n+1)} < +\infty\}}/\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}})] \\
&= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{\{\tau_i^{(n)} < +\infty\}} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{\tau_i \circ \theta_{\tau_i^{(n)}} < +\infty\}}/\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}})] \\
&= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{\{\tau_i^{(n)} < +\infty\}} \mathbf{E}_{X_{\tau_i^{(n)}}}(\mathbf{1}_{\{\tau_i < +\infty\}})] \\
&= \mathbf{P}_i(\tau_i^{(n)} < +\infty)\, \mathbf{P}_i(\tau_i < +\infty) \\
&= \mathbf{P}_i(\tau_i < +\infty)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Il est alors clair que $\alpha = 1$ si et seulement si N est identiquement infinie, ce qui est içi équivalent à $G(i,i) = \mathbf{E}_i(N) < +\infty$ car une loi géométrique est d'espérance finie.

Théorème 4.4.3 *Supposons que i est un état récurrent de la chaîne de Markov (X_n). Alors, sous la probabilité $\mathbf{P}_i$, la suite des temps $\tau_i^{(n)}, n \geq 0$, fait de (X_n) un processus régénératif.*

Preuve: Au moins intuitivement, ceci résulte du corollaire 4.3.5 appliqué au temps $T = \tau_i^{(n)}$. Montrons le en détail. Il s'agit de montrer pour tout $f : E \to \mathbf{R}^+$ que les variables aléatoires

$$Z_n = \sum_{k=\tau_i^{(n)}}^{\tau_i^{(n+1)}-1} f(X_k)$$

sont indépendantes et de même loi. On a $Z_n = Z_0 \circ \theta_{\tau_i^{(n)}}$. Pour toute v.a. X bornée et $\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}}$-mesurable et toute fonction borélienne $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\mathbf{E}_i(X\psi(Z_n)) = \mathbf{E}_i(\mathbf{E}_i(X\psi(Z_n)/\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}})) = \mathbf{E}_i(X\mathbf{E}_i(\psi(Z_0 \circ \theta^{\tau_i^{(n)}})/\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}})).$$

Comme $\tau_i^{(n)}$ est un temps d'arrêt, il résulte donc d'abord de la propriété de Markov forte puis du fait que $X_{\tau_i^{(n)}} = i$ que

$$\mathbf{E}_i(X\psi(Z_n)) = \mathbf{E}_i(X\mathbf{E}_{X_{\tau_i^{(n)}}}(\psi(Z_0)) = \mathbf{E}_i(X\mathbf{E}_i(\psi(Z_0)) = \mathbf{E}_i(X)\mathbf{E}_i(\psi(Z_0))$$

Ceci montre que Z_n est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}}$ et de même loi que Z_0. Puisque les variables aléatoires $Z_0, Z_1, \cdots, Z_{n-1}$ sont $\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}}$-mesurables (à vérifier), on en déduit par récurrence sur n que les v.a. $Z_n, n \geq 0$, sont bien indépendantes.

On déduit du théorème 3.1.4:

Corollaire 4.4.4 *Si i est un état récurrent, pour toutes fonctions $f, g : E \to \mathbf{R}^+$, $\mathbf{P}_i$-presque sûrement,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n} g(X_k)} = \frac{\int f\, dm}{\int g\, dm}$$

si $\int g\, dm$ est fini et non nul, où m est la mesure définie par

$$\int f\, dm = \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\tau_i-1} f(X_k)).$$

4.5. Mesures et Probabilités invariantes

Dans la théorie des chaînes et des processus de Markov, la notion de probabilité invariante est sans doute la plus importante. Elle généralise et étend celle d'état d'équilibre en physique.

Définition 4.5.1 *On dit qu'une mesure m sur E est une mesure invariante de la chaine de Markov de noyau de transition P si $mP = m$.*

Il est intuitif que les mesures m introduites au corollaire 4.4.4 vont avoir un rôle important.

Lemme 4.5.2 *Soit i un état récurrent de la chaîne de Markov. Alors, la formule*

$$m(j) = \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\tau_i-1} \mathbf{1}_j(X_k))$$

définit une mesure invariante.

Preuve: Sous $\mathbf{P}_i$, $X_0 = X_{\tau_i} = i$. On a donc, pour toute fonction $f : E \to \mathbf{R}^+$

$$\begin{aligned}
\int f\, dm &= \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\tau_i-1} f(X_k)) = \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\tau_i-1} f(X_{k+1})) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\tau_i>k} f(X_{k+1})) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\tau_i>k} \mathbf{E}_i(f(X_{k+1})/\mathcal{F}_k)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\tau_i>k} \mathbf{E}_{X_k}(f(X_1))) = \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\tau_i-1} Pf(X_k)) \\
&= \int Pf\, dm = \int f\, d(mP).
\end{aligned}$$

Une chaîne de Markov est dite irréductible si pour tout $i, j \in E$, il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $P^n(i,j) > 0$.

Lemme 4.5.3 *Si m une mesure invariante d'une chaîne irréductible, alors $m(j) > 0$, pour tout $j \in E$.*

Preuve: Il existe au moins un état i tel que $m(i) \neq 0$. Si n est un entier tel que $P^n(i,j) > 0$,

$$m(j) = \sum_{k \in E} m(k) P^n(k,j) \geq m(i) P^n(i,j) > 0.$$

Lemme 4.5.4 *Si une chaîne de Markov irréductible possède une probabilité invariante π, toute autre mesure invariante est proportionnelle à π. En particulier, π est la seule probabilité invariante.*

Preuve: Soit m une mesure invariante et i un état fixé de E. Posons $\lambda = \frac{\pi(i)}{m(i)}$ et $m' = \lambda m$ et montrons que $m' = \pi$. Remarquons que $m'(i) = \pi(i)$. Définissons une mesure μ sur E, en posant, pour tout $k \in E$, $\mu(k) = \min(m'(k), \pi(k))$. Alors

$$(\mu P)(k) = \sum_{j \in E} \mu(j) P(j,k) \leq \sum_{j \in E} m'(j) P(j,k) = m'(k)$$

car m' est une mesure invariante. On voit de la même façon que $(\mu P)(k) \leq \pi(k)$. On a donc

$$(\mu P)(k) \leq \min(m'(k), \pi(k)) = \mu(k).$$

Mais, puisque

$$\sum_{k \in E} \mu P(k) = \sum_{k \in E} \sum_{j \in E} \mu(j) P(j,k) = \sum_{j \in E} \mu(j) \sum_{k \in E} \mu(j) P(j,k) = \sum_{j \in E} \mu(j)$$

et puisque $\mu(E) < +\infty$ (car $\mu(E) \leq \pi(E) = 1$) on voit que

$$\sum_{k \in E} (\mu(k) - (\mu P)(k) \leq (\sum_{k \in E} \mu(k)) - (\sum_{k \in E} (\mu P(k)) = \mu(E) - \mu(E) = 0$$

(on a bien $\mu(E) \leq +\infty$ car $\mu(E) \leq \pi(E) = 1$). Chaque terme $\mu(k) - \mu P(k)$ étant positif, ceci n'est possible que si, pour tout $k \in E$, $\mu(k) = \mu P(k)$. On en déduit que $\pi - \mu$ est une mesure invariante. Puisque $(\pi - \mu)(i) = 0$, il résulte du lemme précédant que $\pi - \mu = 0$. De la même façon on voit que $m' = \mu$. Donc $m' = \pi$.

Théorème 4.5.5 *Considérons une chaîne de Markov (X_n) irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un état $i \in E$ tel que $\mathbf{E}_i(\tau_i) < +\infty$.

(ii) Pour tout état $i \in E$, $\mathbf{E}_i(\tau_i) < +\infty$.

(iii) La chaîne de Markov possède une probabilité invariante π.

Sous ces conditions la chaîne est dite récurrente positive. π est la seule mesure invariante (à une constante multiplicative près) et la seule probabilité invariante. Pour tout $k \in E$,

$$\pi(k) = \frac{1}{\mathbf{E}_k(\tau_k)}$$

et pout tout $i \in E$

$$\pi(k) = \frac{1}{\mathbf{E}_i(\tau_i)} \mathbf{E}_i(\sum_{n=0}^{\tau_i - 1} \mathbf{1}_{\{k\}}(X_k)))$$

Preuve: Montrons d'abord que (i) implique (iii). Supposons donc (i). Soit m la mesure invariante associée à l'état récurrent i définie au lemme 4.5.2. Puisque $\mathbf{E}_i(\tau_i)$ est fini, τ_i est fini $\mathbf{P}_i$-p.s., donc i est récurrent. On définit alors par

$$\pi = \frac{m}{\mathbf{E}_i(\tau_i)} \tag{4.1}$$

une probabilité invariante. Ceci prouve (iii).

Montrons que (iii) entraîne (ii). Il résulte du principe du maximum (cf. lemme 4.5.7) que, si π est une probabilité invariante, pour tout état i,

$$\sum_{j \in E} \pi(j) G(j,i) \leq \sum_{j \in E} \pi(j) G(i,i) \leq G(i,i).$$

Or ,

$$\sum_{j\in E}\pi(j)G(j,i)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in E}\pi(j)P^n(j,i)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi(i)=+\infty$$

car on sait que $\pi(i)\neq 0$. Donc $G(i,i)=+\infty$ et l'état i est récurrent. Puisque la mesure m associée à i est une mesure invariante, il résulte du lemme 4.5.4 que m et π sont proportionnelles, donc que $m(E)$ est fini. Or $m(E)=\mathbf{E}_i(\tau_i)$, donc $\mathbf{E}_i(\tau_i)$ est fini, ce qui montre (ii). Puisque (ii) entraîne (i) de façon évidente, ceci prouve les équivalences du théorème.

L'unicité de π résulte du lemme 4.5.4. La deuxième formule donnant π est la formule (4.1). Cette formule appliquée à i donne,

$$\pi(i)=\frac{\mathbf{E}_i(\sum_{n=0}^{\tau_i-1}\mathbf{1}_i(X_n))}{\mathbf{E}_i(\tau_i)}=\frac{1}{\mathbf{E}_i(\tau_i)}.$$

(Se souvenir que π ne dépend pas de i par unicité)

Théorème 4.5.6 (Thm ergodique des ch. de Markov récurrentes positives) *Si (X_n) est une chaîne de Markov récurrente positive de probabilité invariante π, pour toute loi initiale ν, et pour toute fonction $f:E\to\mathbf{R}^+$, $\mathbf{P}_\nu$-presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)=\int f\,d\pi. \qquad (*)$$

et pour tout $i,j\in E$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(i,j)=\pi(j).$$

Preuve: Pour tout état i, il résulte du corollaire 4.4.4, appliqué à $g=1$, que (*) est vraie $\mathbf{P}_i$-presque sûrement (se souvenir que π ne dépend pas de i). C'est encore vrai $\mathbf{P}_\nu$-p.s. car

$$\mathbf{P}_\nu=\int\mathbf{P}_i\,d\nu(i)$$

En prenant l'espérance sous $\mathbf{P}_i$ des deux cotés et en choisissant pour f la fonction indicatrice de j on obtient la deuxième limite.

Ce théorème donne deux moyens pratiques d'approcher π si, comme c'est souvent le cas, on ne sait pas la calculer explicitement. La première façon est la méthode de Monte Carlo, qui consiste à simuler sur ordinateur une longue trajectoire $X_n(\omega)$ de la chaîne, puis de faire la moyenne de f le long de cette trajectoire. D'après (*) on obtient ainsi a peu près $\int f\,d\pi$. L'autre façon est de calculer itérativement P^n, par exemple dans le cas où E est fini. Puis de faire la moyenne des $P^n(i,j)$ pour approcher $\pi(j)$ (on peut montrer que la vitesse de convergence est exponentielle). C'est très souvent beaucoup plus rapide que la recherche d'un vecteur propre de la transposée de P.

Lemme 4.5.7 (Principe du maximum) *Pour tous $i, j \in E$, $G(i,j) \leq G(j,j)$.*

Preuve: Ce lemme résulte du calcul suivant dans lequel on applique la propriété de Markov forte au temps d'arrêt τ_j:

$$\begin{aligned} G(i,j) &= \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{\tau_j<\infty\}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{k+\tau_j}=j\}}) \\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{\{\tau_j<\infty\}} \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{k+\tau_j}=j\}}/\mathcal{F}_{\tau_j})] = \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{\{\tau_j<\infty\}} \mathbf{E}_{X_{\tau_j}}(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}})] \\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{\{\tau_j<\infty\}} \mathbf{E}_j(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}})] = \mathbf{P}_i(\tau_j < +\infty) G(j,j). \end{aligned}$$

On dit qu'une suite (x_n) de E tend vers l'infini si pour toute partie finie F de E, $x_n \notin F$ pour tout n assez grand.

Théorème 4.5.8 *On considère une chaîne de Markov irréductible. Alors, un et un seul des deux cas suivants peuvent se produire:*

Cas récurrent: *Tous les états sont récurrents et partant de tout point, la chaîne visite une infinité de fois tous les autres, p.s.*

Cas transitoire: *Partant de tout état, X_n tend vers l'infini, p.s.*

Preuve: Si il existe un état récurrent i, considérons la mesure invariante m qui lui est associée. Soit j un autre état de E. Puisque la chaîne est irréductible, $m(j) > 0$. Or, $\mathbf{P}_i$-p.s.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{j\}}(X_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{i\}}(X_k)} = m(j)$$

(car $m(i)$=1). Puisque i est récurrent,$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{i\}}(X_k) = +\infty$. La limite précédente assure donc que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{j\}}(X_k) = +\infty$ donc que la chaîne (X_n) passe une infinité de fois par j. En prenant l'espérance, on voit que

$$G(i,j) = \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{j\}}(X_k)) = +\infty$$

donc, par le principe du maximum $G(j,j) = +\infty$ et l'état j est récurrent.

Supposons qu'il n'y a pas d'état récurrent. Si F est une partie finie

$$\mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_F(X_k)) = \sum_{j\in F} G(i,j) \quad \leq \quad \sum_{j\in F} G(j,j) < +\infty$$

Donc $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_F(X_k)$ est une somme finie, $\mathbf{P}_i$-p.s., ce qui n'est possible que si X_n quitte F définitivement après un certain temps.

Corollaire 4.5.9 *Lorsque E est fini, toute chaîne irréductible est récurrente positive.*

Preuve: L'existence d'un état récurrent résulte de la proposition précédente (pour s'en convaincre prendre $E = F$ dans sa preuve). On sait qu'à cet état récurrent, on peut associer une mesure invariante. Elle est de masse finie car l'espace est fini.

4.6. Stationnarité et réversibilité

On dit qu'un processus $X_n, n \in \mathbf{N}$, est stationnaire (au sens strict) si pour tous $m, n \geq 0$ la loi du vecteur $(X_m, X_{m+1}, \cdots, X_{m+n})$ est la même que celle du vecteur $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$.

Théorème 4.6.1 *Une chaîne de Markov de loi initiale ν est un processus stationnaire si et seulement si ν est une probabilité invariante.*

Preuve: Comme nous l'avons vu, si ν est la loi de X_0, alors νP^n est la loi de X_n. Il en résulte que cette loi est invariante si et seulement si toutes les variables aléatoires X_n ont la même loi. C'est évidemment le cas lorsque (X_n) est stationnaire. Réciproquement, supposons que ν est invariante. Alors, pour tout $m \in \mathbf{N}$, X_m a la loi ν sous $\mathbf{P}_\nu$. Ceci nous permet d'écrire, en utilisant la propriété de Markov au temps m que, pour toute fonction $f : E^{n+1} \to \mathbf{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\nu(f(X_m, X_{m+1}, \cdots, X_{m+n})) &= \mathbf{E}_\nu[\mathbf{E}_\nu(f(X_m, X_{m+1}, \cdots, X_{m+n})/\mathcal{F}_m)] \\
&= \mathbf{E}_\nu[\mathbf{E}_{X_m}(f(X_0, X_1, \cdots, X_n))] \\
&= \mathbf{E}_\nu[f(X_0, X_1, \cdots, X_n)].
\end{aligned}$$

donc (X_n) est bien stationnaire.

Considérons une chaîne de Markov $X_n, n \in \mathbf{N}$, admettant une probabilité invariante ν. On a vu qu'alors, sous $\mathbf{P}_\nu$, (X_n) est stationnaire. Comme tout processus stationnaire, on peut le prolonger en un processus $X_n, n \in \mathbf{Z}$, stationnaire, en posant, pour tout $m \in \mathbf{Z}$ et toute partie A de E^n,

$$\mathbf{P}_\nu((X_m, X_{m+1}, \cdots, X_{m+n}) \in A) = \mathbf{P}_\nu((X_0, X_1, \cdots, X_n) \in A).$$

(Ceci résulte d'un théorème de Kolmogorov, nous l'admettons). Nous supposerons que $\nu(i) > 0$ pour tout $i \in \mathbf{E}$, ce qui est toujours le cas lorsque la chaîne est irréductible.

Proposition 4.6.2 *Sous $\mathbf{P}_\nu$, le processus $Z_n = X_{-n}, n \in \mathbf{N}$, est une chaîne de Markov de noyau*

$$Q(i,j) = \frac{\nu(j)}{\nu(i)} P(j,i)$$

Preuve: Pour tout $a_0, a_1, \cdots, a_n \in E$, on a:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_\nu(Z_0 = a_0, Z_1 = a_1, \cdots, Z_n = a_n) \\
&= \mathbf{P}_\nu(X_0 = a_0, X_{-1} = a_1, \cdots, X_{-n} = a_n) \\
&= \mathbf{P}_\nu(X_n = a_0, X_{n-1} = a_1, \cdots, X_0 = a_n) \\
&= \nu(a_n) P(a_n, a_{n-1}) \cdots P(a_1, a_0) \\
&= \frac{\nu(a_n)}{\nu(a_{n-1})} P(a_n, a_{n-1}) \frac{\nu(a_{n-1})}{\nu(a_{n-2})} P(a_{n-1}, a_{n-2}) \cdots \frac{\nu(a_1)}{\nu(a_0)} P(a_1, a_0) \nu(a_0) \\
&= Q(a_n, a_{n-1}) Q(a_{n-1}, a_{n-2}) \cdots Q(a_1, a_0) \nu(a_0)
\end{aligned}$$

ce qui montre la proposition.

Définition 4.6.3 *Une probabilité ν sur E est dite réversible (ou P-réversible) si pour tout $i, j \in \mathbf{E}$*

$$\nu(i)P(i,j) = \nu(j)P(j,i).$$

Une probabilité réversible ν est invariante et sous $\mathbf{P}_\nu$, les chaînes $X_n, n \in \mathbf{Z}$, et $X_{-n}, n \in \mathbf{Z}$, ont la même loi. Il est souvent plus facile de chercher directement une probabilité réversible qu'une probabilité invariante, mais il n'en existe pas toujours.

4.7. Critères de récurrence

Nous allons utiliser les surmartingales positives pour établir divers critères de récurrence des chaînes de Markov. Ces critères peuvent aussi se montrer directement, mais les preuves sont longues et moins intuitives. Soit $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Définition 4.7.1 *Une suite $\{Z_n, n \in \mathbf{N}\}$ est une* **surmartingale** *si chaque Z_n est une variable aléatoire intégrable, $\mathcal{F}_n$-mesurable, et si*

$$\mathbf{E}(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq Z_n, \;\; \forall n \geq 0.$$

Nous admettrons le théorème suivant, vu dans le cours de Probabilités:

Théorème 4.7.2 *Une surmartingale à valeurs positives converge presque sûrement.*

Appliquons ceci aux chaînes de Markov:

Proposition 4.7.3 *Si P est le noyau de transition d'une chaîne de Markov récurrente, les seules fonctions positives h vérifiant $Ph \leq h$ sont les constantes.*

Preuve: Le point important est que la relation $Ph \leq h$ entraîne que $h(X_n)$ est une surmartingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_i)$, pour tout $i \in E$. En effet,

$$\mathbf{E}_i(h(X_{n+1})/\sigma(X_0, \cdots, X_n)) = Ph(X_n) \leq h(X_n).$$

Soit Z la limite de cette surmartingale positive. Pour tout $j \in E$ la chaîne récurrente (X_n) passe une infinité de fois par j. Il en résulte que $h(j) = Z$. Ceci étant vrai pour tout j, la fonction h est constante.

Proposition 4.7.4 *Considérons une chaîne irréductible sur E, et i_0 un état fixé de E. La chaîne est transitoire si et seulement si il existe une fonction bornée h non constante telle que $Ph(i) = h(i)$ pour tout $i \neq i_0$.*

Preuve: Supposons la chaîne récurrente. Quitte à changer h en $-h$, on peut supposer que $Ph(i_0) \leq h(i_0)$. Alors $g = h - \inf h$ vérifie $Pg \leq g$ et est à valeurs positives. Elle est constante par la proposition précédente, donc h est constante. La réciproque découle du lemme suivant.

Lemme 4.7.5 *Soit A une partie de E et $T_A = \inf\{n \in \mathbf{N}; X_n \in A\}$. Alors $h(i) = \mathbf{P}_i(T_A < +\infty)$ vérifie $Ph = h$ hors de A et $h = 1$ sur A.*

Preuve: Si $i \notin A$, $\{T_A < +\infty\} = \{\exists n \geq 0; X_{n+1} \in A\}$, $\mathbf{P}_i-$p.s.. Donc, par la propriété de Markov appliquée au temps constant $T = 1$:

$$\begin{aligned} h(i) = \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{T_A<+\infty}) &= \mathbf{E}_i(\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\exists n\geq 0; X_{n+1}\in A})/\mathcal{F}_1) \\ &= \mathbf{E}_i(\mathbf{E}_{X_1}(\mathbf{1}_{\exists n\geq 0; X_n\in A})) \\ &= Ph(i). \end{aligned}$$

Si $i \in A$, $T_A = 0, \mathbf{P}_i$-p.s., donc $h(i) = 1$.

Proposition 4.7.6 (Critère de Foster) *Considérons une chaîne irréductible de noyau P. Soit F une partie finie de E.*

1. *Si il existe une fonction $V : E \to \mathbf{R}^+$ telle que $\lim_{i\to\infty} V(i) = +\infty$ et telle que*

   $$PV(i) \leq V(i), \quad \forall i \notin F$$

   alors la chaîne est récurrente.

2. *Si il existe une fonction $V : E \to \mathbf{R}^+$ et $\varepsilon > 0$ tels que PV est fini partout, et*

   $$PV(i) \leq V(i) - \varepsilon, \quad \forall i \notin F$$

   alors la chaîne est récurrente positive.

Preuve: Soit $T = \inf\{n \geq 0; X_n \in F\}$. Alors $V(X_{n\wedge T}), n \geq 0$, est une surmartingale. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(V(X_{n\wedge T})/\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbf{E}_i(\sum_{k=0}^{n-1} V(X_k)\mathbf{1}_{T=k}/\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbf{E}_i(V(X_n)\mathbf{1}_{T\geq n}/\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} V(X_k)\mathbf{1}_{T=k} + \mathbf{1}_{T\geq n}\mathbf{E}_i(V(X_n)/\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} V(X_{k\wedge T})\mathbf{1}_{T=k} + \mathbf{1}_{T\geq n}PV(X_{n-1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} V(X_{k\wedge T})\mathbf{1}_{T=k} + \mathbf{1}_{T\geq n}V(X_{n-1}) \\ &= V(X_{n\wedge T}). \end{aligned}$$

La surmartingale positive $V(X_{n\wedge T})$ converge $\mathbf{P}_i$-p.s.. Si la chaîne est transitoire, elle tend vers l'infini quand $n \to +\infty$. Puisque V tend vers l'inifini à l'infini, ceci n'est possible que si $T < +\infty$, $\mathbf{P}_i$-p.s. A l'aide de la propriété de Markov, on en déduit que la chaîne passe une infinité de fois dans F, et donc qu'elle ne peut pas tendre vers l'infini.

Montrons maintenant la deuxième assertion. Soit $i \notin F$. On montre comme au dessus que $Z_n = V(X_{T\wedge n}) + (n \wedge T)\varepsilon$ est une surmartingale positive. On a donc $\mathbf{E}_i(Z_0) \geq \mathbf{E}_i(Z_n)$, ce qui entraîne que $V(i) \geq \mathbf{E}_i(n \wedge T)\varepsilon$, d'où $\mathbf{E}_i(T) \leq \frac{V(i)}{\varepsilon}$. Soit $S = \inf\{n \geq 1; X_n \in F\}$. Puisque $S = 1 + T \circ \theta$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i(S) &= \mathbf{E}_i(\mathbf{E}_i(S/\mathcal{F}_1)) \\
&= \mathbf{E}_i(\mathbf{E}_{X_1}(T)) + 1 \\
&\leq \mathbf{E}_i(\frac{V(X_1)}{\varepsilon}) + 1 \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} PV(i) + 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure immédiatement lorsque F est réduit à un point. Nous admettrons le cas général (sa preuve consiste à regarder la chaîne induite X_{T_n} sur F; pour un $i \in F$ fixé, puisque F est fini, $\theta = \inf\{n; X_{T_n} = i\}$ est d'espérance finie; on montre alors que $\mathbf{E}_i(T_\theta)$ est fini un peu comme le lemme de Wald).

Si, dans l'énoncé précédent, on ne suppose pas que la chaîne est irréductible, on obtient avec la même preuve que:

Dans la cas 1, partant de tout point, on atteint presque sûrement un état récurrent.

Dans le cas 2, partant de tout point, on atteint au bout d'un temps d'espérance fini un état récurrent dont le temps de retour est d'espérance finie.

Il peut être utile de remarquer que si i est un état récurrent d'une chaîne de Markov sur E, si E_i est l'ensemble des points de E que l'on peut atteindre à partir de i, alors, partant de E_i la chaîne reste toujours dans E_i et que en restriction à E_i cette chaîne est récurrente (et en particulier irréductible).

4.8. La file $M/G/1$

Nous allons considérer en détail la file $M/G/1$. C'est une file $G/G/1$ dans laquelle les clients arrivent suivant un processus de Poisson. Par une technique différente de celle vue avant, nous allons pouvoir décrire de façon précise le comportement de cette file.

Les clients arrivent aux instants $T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$ d'un processus de Poisson de paramètre λ. Les temps de service (σ_n) sont indépendants de loi η, intégrable et d'espérance $\mathbf{E}(\sigma_n) = \frac{1}{\mu}$. On pose $\rho = \lambda/\mu$. On se doute que la position de ρ par rapport à 1 va être importante.

L'étude de cette file se fait à travers le processus

$$X(t) = \text{Taille du système à l'instant } t \geq 0.$$

La taille est égale au nombre total de personnes dans la file (comptant celles en train d'être servies) au temps t. On choisit la version continue à droite de X_t, il n'y a donc pas d'ambiguité sur la façon d'interpréter cette quantité à l'instant de sortie ou d'arrivée d'un client. Le processus (X_t) n'est pas markovien en général (réfléchir au cas où les services sont déterministes par exemple). C'est pourquoi on introduit les temps

$$\tau_n = \text{Instant de sortie du client } n.$$

Puisque X_t est continu à droite, $X(\tau_n)$ est le nombre de clients dans le système que laisse le client n quand il sort. Posons $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n)$ et notons $\varepsilon_1 = N_{\sigma_1}$.

Proposition 4.8.1 *Le processus $Y_n = X(\tau_n)$ est une chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ vérifiant*

$$Y_{n+1} = (Y_n - 1)^+ + \varepsilon_{n+1}$$

où les v.a. (ε_n) sont indépendantes de même loi que ε_1.

Preuve: Posons $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n)$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t, \sigma_n, n \in \mathbf{N})$. Comme (σ_n) est indépendant du processus (N_t), on voit que N_t est un $\mathcal{F}_t$-processus de Poisson. Remarquons que $X(\tau_n)$ ne dépend que de $N_s, s \leq \tau_n$, et de $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$. Si $X(\tau_n) \geq 1$, le client $n+1$ est déja dans le système. Il commence à être servi en τ_n et son temps de service est σ_{n+1}, il sort donc en $\tau_n + \sigma_{n+1}$. Le nombre de clients arrivés entre τ_n et $\tau_n + \sigma_{n+1}$ est $N_{\tau_n+\sigma_{n+1}} - N_{\tau_n}$, donc:

$$\text{si } X(\tau_n) \geq 1, \text{ alors } X(\tau_{n+1}) = X(\tau_n) - 1 + N_{\tau_n+\sigma_{n+1}} - N_{\tau_n}.$$

Maintenant, si $X(\tau_n) = 0$, il faut attendre le temps T_{n+1} pour qu'un client arrive dans la file. Il ressort en $T_{n+1} + \sigma_{n+1}$ et entre ces deux instants, le nombre des autres clients arrivés est $N_{T_{n+1}+\sigma_{n+1}} - N_{T_{n+1}}$. Donc

$$\text{si } X(\tau_n) = 0, \text{ alors } X(\tau_{n+1}) = X(\tau_n) + N_{T_{n+1}+\sigma_{n+1}} - N_{T_{n+1}}.$$

Posons

$$S_n = T_{n+1}\mathbf{1}_{X(\tau_n)=0} + \tau_n \mathbf{1}_{X(\tau_n)>0}.$$

On vérifie que S_n est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt. Si $\varepsilon_{n+1} = N_{S_n+\sigma_{n+1}} - N_{S_n}$, alors $X(\tau_{n+1}) = (X(\tau_n)-1)^+ + \varepsilon_{n+1}$ et ε_{n+1} est une v.a. indépendante de $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ et de même loi que N_{σ_1} par la propriété de Markov forte du processus de Poisson (ca demande un peu de travail et l'utilisation de la remarque 2.1.5). La proposition en résulte, en utilisant le lemme suivant pour montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov.

Lemme 4.8.2 *Soit E un ensemble dénombrable, $\{\varepsilon_n, n \in \mathbf{N}\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans un ensemble F. Soit $\phi : E \times F \to E$ une application mesurable. Pour tout X_0 indépendant des (ε_n) la suite défine par récurrence par*

$$X_{n+1} = \phi(X_n, \varepsilon_{n+1}),$$

est une chaîne de Markov sur E

Preuve: Ceci résulte du fait que si $P(i,j) = \mathbf{P}(\phi(i,\varepsilon_1) = j)$, on a

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}/X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(\phi(x_n, \varepsilon_{n+1}) = x_{n+1}) = P(x_n, x_{n+1}).$$

Posons, pour tout $n \geq 0$,

$$p_n = \mathbf{P}(N_{\sigma_1} = n) = \int e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, d\eta(t),$$

et $p_n = 0$ si $n < 0$. La probabilité de transition de la chaîne Y_n est donnée par

$$P(i,j) = p_{j-(i-1)^+}$$

donc

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$\mathbf{E}(\varepsilon_1) = \mathbf{E}(N_{\sigma_1}) = \int \mathbf{E}(N_t) \, d\mathbf{P}_{\sigma_1}(t) = \int \lambda t \, d\eta(t) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Lemme 4.8.3 *La chaîne de Markov Y_n est irréductible.*

Preuve: Pour tout $k \geq 0$, $p_k > 0$. Puisque $P(0,k) = p_k$, 0 conduit à tout point. Comme $P(i, i-1) = p_0$, tout point conduit à 0.

Proposition 4.8.4 *La chaîne de Markov Y_n est récurrente positive, récurrente nulle, ou transitoire suivant que $\rho < 1$, $\rho = 1$, ou $\rho > 1$.*

Preuve: Le cas $\rho \leq 1$ résulte du critère de Foster appliqué à $V(i) = i$: pour $i \geq 1$,

$$PV(i) = \mathbf{E}\left((i-1)^+ + \varepsilon_1\right) = \mathbf{E}(i - 1 + \varepsilon_1) = V(i) - 1 + \rho.$$

Considérons le cas $\rho > 1$. En utilisant que $x^+ \leq x$, on voit que $Y_n \geq Y_{n-1} + \varepsilon_n - 1$ et par récurrence que

$$Y_n \geq Y_0 + \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k - 1).$$

Puisque $\mathbf{E}(\varepsilon_1) > 1$, on déduit de la loi des grands nombres que $Y_n \to +\infty$.

Etudions plus en détail le cas le plus intéressant, c'est à dire celui où $\rho < 1$ et où la chaîne est récurrente positive. Commençons par déterminer la probabilité invariante que nous noterons π, ou au moins sa fonction génératrice (qui n'est autre que la transformée de Laplace en $-\log s$)

$$\hat{\pi}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \pi_n$$

en fonction de la fonction génératrice $\hat{p}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n p_n$, pour $0 \leq s \leq 1$. Pour tout $k \geq 0$,

$$\pi_k = (\pi P)(k) = \pi_0 p_k + \pi_1 p_k + p_{k-1}\pi_2 + \cdots + \pi_{k+1} p_0,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} s^k \pi_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_0 p_k + \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \sum_{r=0}^{k} \pi_{r+1} p_{k-r}.$$

Le terme de droite ressemble à un produit de convolution. On a

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(s) &= \pi_0 \hat{p}(s) + \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{k} \pi_{r+1} s^{r+1} s^{k-r} p_{k-r} \\ &= \pi_0 \hat{p}(s) + \frac{1}{s}(\hat{\pi}(s) - \pi_0)\hat{p}(s). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\hat{\pi}(s) = \pi_0 \frac{\hat{p}(s)(s-1)}{s - \hat{p}(s)}.$$

Puisque $\hat{p}'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_n = \rho$, on a

$$\lim_{s \to 1} \frac{s - \hat{p}(s)}{s-1} = \lim_{s \to 1} 1 - \frac{\hat{p}(s) - 1}{s-1} = 1 - \rho$$

ce qui entraîne que $\hat{\pi}(1) = \pi_0 \frac{1}{1-\rho}$, donc $\pi_0 = 1 - \rho$. On retrouve la condition $\rho < 1$. En conclusion,

Proposition 4.8.5 (Formule de Pollacek-Khintchine 1) *Si $\rho < 1$, $\pi_0 = 1 - \rho$ et*

$$\hat{\pi}(s) = (1-\rho) \frac{\hat{p}(s)(s-1)}{s - \hat{p}(s)}.$$

Corollaire 4.8.6 (Formule de Pollacek-Khintchine 2) *La taille moyenne à l'équilibre est, si σ^2 est la variance de σ_1,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \pi_n = \rho + \frac{\rho^2(1 + \mu^2 \sigma^2)}{2(1-\rho)}$$

Remarquons que cette taille est minimale pour $\sigma^2 = 0$.

Nous avons étudié le processus X_t aux temps t de la forme $t = \tau_n$. Afin d'en déduire des résultats sur le processus $X(t)$ lui même, on utilise la théorie du renouvellement.

Supposons toujours que $\rho < 1$. Alors, puisque $X(\tau_n)$ est récurrent, on peut introduire les instants successifs où la file se vide complètement: $\xi_0 = 0$, puis

$$\xi_1 = \inf\{t > 0; X(t^-) = 1, X_t = 0\}, \cdots, \xi_n = \inf\{t > \xi_{n-1}; X(t^-) = 1, X_t = 0\}.$$

On vérifie que le processus (X_t) est régénératif, de temps de régénération ξ_1.

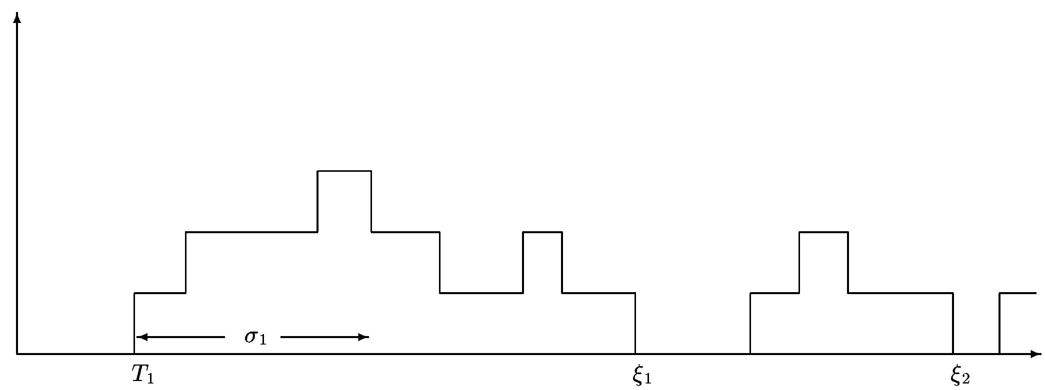

Figure 4.1: File M/G/1

Lemme 4.8.7 $\mathbf{E}(\xi_1)$ *est fini.*

Preuve: Soit $S = \inf\{n \geq 0; X(\tau_n) = 0\}$. Remarquons que $\xi_1 = T_1 + \sum_{n=1}^{S} \sigma_n$. Puisque l'évènement $\{S = k\}$ est indépendant de $\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \cdots$, on en déduit (cf. le lemme de Wald) que $\mathbf{E}(\xi_1) = \mathbf{E}(T_1) + \mathbf{E}(S)\mathbf{E}(\sigma_1)$.

Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\tilde{\pi}(k) = \frac{1}{\mathbf{E}(\xi_1)}\mathbf{E}(\int_0^{\xi_1} \mathbf{1}_k(X(s))\, ds).$$

Il résulte des théorèmes limites pour les processus régénératifs que:

Proposition 4.8.8 *Supposons $\rho < 1$. Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$.*

1. $$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_k(X_s)\, ds = \tilde{\pi}(k), \ \ p.s.$$

2. $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{P}(X_t = k) = \tilde{\pi}(k)$.

Le résultat suivant est sans doute intuitif. Cependant il n'est pas du tout trivial.

Théorème 4.8.9 *Les probabilités π et $\tilde{\pi}$ sont égales.*

Preuve: Soit $\nu_0 = \inf\{n > 0; Y_n = 0\}$. On sait que

$$\frac{\pi(k)}{\pi(0)} = \mathbf{E}_0\left\{\sum_{k=0}^{\nu_0} \mathbf{1}_k(Y_n)\right\}.$$

On a donc

$$\pi(k)/\pi(0) = \mathbf{E}_0\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_k(X(\tau_n))\mathbf{1}_{\tau_n \leq \xi_1}\right\}.$$

Remarquons qu'entre 0 et ξ_1 il y a autant de passages de $k+1$ à k que de passages de k à $k+1$. On peut donc écrire, en posant $t_n^r = \frac{n}{2^r}$ que

$$\begin{aligned}
\pi(k)/\pi(0) &= \mathbf{E}(\text{nombre de passages de } X_t \text{ de } k \text{ à } k+1, \text{ pour } t \leq \xi_1) \\
&= \lim_{r\to+\infty} \mathbf{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X(t_n^r)=k}\mathbf{1}_{X(t_{n+1}^r)=k+1}\mathbf{1}_{t_n^r<\xi_1}) \\
&= \lim_{r\to+\infty} \mathbf{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X(t_n^r)=k}\mathbf{1}_{t_n^r<\xi_1}\mathbf{1}_{\text{une arrivée entre } t_n^r \text{ et } t_{n+1}^r}) \\
&= \lim_{r\to+\infty} \mathbf{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X(t_n^r)=k}\mathbf{1}_{t_n^r<\xi_1})\mathbf{P}(N_{t_{n+1}^r} - N_{t_n^r} = 1) \\
&= \lim_{r\to+\infty} \mathbf{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X(t_n^r)=k}\mathbf{1}_{t_n^r<\xi_1})\mathbf{P}(N_{t_{n+1}^r - t_n^r} = 1) \\
&= \lambda\,\mathbf{E}(\int_0^{\xi_1} \mathbf{1}_k(X(s))\,ds.
\end{aligned}$$

car $\mathbf{P}(N_t = 1) = \lambda t + o(t)$. On en déduit que

$$\frac{\pi(k)}{\pi(0)} = \lambda\tilde{\pi}(k)\mathbf{E}(\xi_1).$$

Comme π et $\tilde{\pi}$ sont des probabilités, $\pi = \tilde{\pi}$ et $\mathbf{E}(\xi_1) = \frac{1}{\lambda\pi_0} = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$.

4.9. Problèmes d'absorbtion

Considérons une chaîne de Markov X_n sur d'espace d'état fini E réunion de deux parties disjointes F et G. On suppose que

$$T = \inf\{n \geq 0; X_n \in G\}$$

est p.s. fini partant de tout point de F. On cherche à calculer $\mathbf{P}_x(X_T = a)$ et $\mathbf{E}_x(T)$, pour tout point de F. Pour faire ces calculs on peut tuer la chaîne lorsqu'elle atteint G. Autrement dit on peut supposer sans perte de généralité que $P(y,y) = 1$ pour tout $y \in G$. Numérotons les états de telle sorte que $F = \{1, 2, \cdots, R\}$ et $G = \{R+1, \cdots, K\}$. La matrice de transition s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} Q & A \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.9.1 *La matrice* $N = \sum_{k=0}^{+\infty} Q^k$ *existe et vérifie* $N = (I - Q)^{-1}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0 & NA \\ 0 & I \end{pmatrix}$. *On a, pour tout* $i \in \{1, \cdots, R\}, j \in \{R+1, \cdots K\}$,

$$\mathbf{P}_i(X_T = j) = (NA)_{i,j}, \quad \mathbf{E}_i(T) = \sum_{m=1}^{R} N_{i,m}.$$

Preuve: Remarquons d'abord que

$$P^n == \begin{pmatrix} Q^n & (I + Q + Q^2 + \cdots + Q^{n-1})A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(on le vérifie par récurrence). Les état de F sont transitoires donc $G(i, i) < +\infty$ lorsque $i \in F$. Il résulte donc du principe du maximum que $G(i, j) < +\infty$ pour tout $i, j \in F$. Autrement dit la matrice N est finie. En particulier Q^n tend vers 0. Comme $(I - Q)(I + Q + \cdots + Q^n) = I - Q^{n+1}$ on en déduit que $N = (I - Q)^{-1}$. La chaîne une fois dans G ne bouge plus, donc $X_T = \lim_{n\to+\infty} X_n$ et, si $i \in F, j \in G$

$$\mathbf{P}_i(X_T = j) = \lim_{n\to+\infty} P^n(i, j) = (NA)_{i,j}.$$

Remarquons enfin que $T = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_F(X_n)$ donc, si $i \in F$,

$$\mathbf{E}_i(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_F(X_n)) = \sum_{m=1}^{R} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_m(X_n)) = \sum_{m=1}^{R} G(i, m) = \sum_{m=1}^{R} N_{i,m}.$$

Chapitre 5

Processus markoviens de sauts

Dans toute la suite, E est un ensemble dénombrable, éventuellement fini. Nous allons étudier les processus de Markov à temps continu à valeurs dans E. On les appelle aussi “chaînes de Markov à temps continu” ou encore “processus markoviens de saut”.

5.1. Premières propriétés

Soit $P_t, t \in \mathbf{R}^+$, une famille de noyaux markoviens sur E.

Définition 5.1.1 *Un processus $\{X_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ à valeurs dans E est appelé processus markovien de saut de semigroupe $\{P_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ si, pour tous $t \geq 0, s \geq 0, y \in E$,*

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_y(X_{s+t})/\sigma(X_r, r \leq s)] = P_t(X_s, y),$$

et si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues à droite sur $\mathbf{R}^+$, pour tout ω.

On peut montrer (à l'aide du théorème de classe monotone) que la propriété énoncée est équivalente à la suivante, qui ne fait pas intervenir l'espérance conditionnelle:

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t_{n+1}$

$$\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1}/X_{t_1} = x_1, \cdots, X_{t_n} = x_n) = P_{t_{n+1}-t_n}(x_n, x_{n+1}).$$

Donnons un premier exemple de tel processus, qui s'avérera assez général.

Proposition 5.1.2 *Soit $\{Z_n, n \in \mathbf{N}\}$ une chaîne de Markov sur E de probabilité de transition P indépendante d'un processus de Poisson $\{N_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ de paramètre λ. Alors*

$$X_t = Z_{N_t},\ t \in \mathbf{R}^+,$$

est un processus de saut markovien de semigroupe $P_t = e^{\lambda t(P-I)}, t \in \mathbf{R}^+$ défini par

$$e^{\lambda t(P-I)}(i,j) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n P^n(i,j)}{n!}.$$

Preuve: On a

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_r} = i_r) \\
&= \sum_{n_1,\cdots,n_r} \mathbf{P}(N_{t_1} = n_1, \cdots, N_{t_r} = n_r, Z_0 = i_0, Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_r} = i_r) \\
&= \sum_{n_1,\cdots,n_r} \mathbf{P}(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2 - n_1, \cdots, N_{t_r} - N_{t_{r-1}} = n_r - n_{r-1}) \\
&\quad \mathbf{P}(Z_0 = i_0, Z_{n_1} = i_1, \cdots, Z_{n_r} = i_r) \\
&= \mathbf{P}(Z_0 = i_0) \sum_{n_1,\cdots,n_r} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{n_1}}{n_1!} \cdots e^{-\lambda(t_r - t_{r-1})} \frac{(\lambda(t_r - t_{r-1}))^{n_r - n_{r-1}}}{(n_r - n_{r-1})!} \\
&\quad P^{n_1}(i_0, i_1) P^{(n_2 - n_1)}(i_1, i_2) \cdots P^{(n_r - n_{r-1})}(i_{r-1}, i_r) \\
&= \mathbf{P}(Z_0 = i_0) e^{\lambda t_1 (P-I)}(i_0, i_1) \cdots e^{\lambda(t_r - t_{r-1})(P-I)}(i_{r-1}, i_r)
\end{aligned}
$$

On voit qu'en particulier le processus de Poisson lui même est un processus markovien de saut.

Revenons à la situation générale. Nous avons parlé plus haut de "semigroupe".

Proposition 5.1.3 (Equation de Chapman Kolmogorov) *La famille de noyaux de transition $P_t, t \in \mathbf{R}^+$, d'un processus de Markov a la propriété dite de semigroupe suivante: pour tous $t, s \geq 0$, $P_{t+s} = P_t P_s$.*

Preuve: On a

$$
\begin{aligned}
P_{t+s}(i,j) &= \mathbf{P}(X_{t+s} = j / X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in E} \mathbf{P}(X_{t+s} = j / X_t = k) \mathbf{P}(X_t = k / X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in E} P_s(k,j) P_t(i,k) = P_t P_s(i,j).
\end{aligned}
$$

Comme dans le cas des chaînes, on note $\mathbf{P}_x$ (resp. $\mathbf{P}_\nu$) la loi du processus lorsque $X_0 = x$ (resp. de loi ν) et on note $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Théorème 5.1.4 (Propriété de Markov forte) *Soit $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, un processus de Markov sur E. Pour tout temps d'arrêt T et toute fonction mesurable $f : E^{\mathbf{R}^+} \to \mathbf{R}$, bornée ou positive, sur l'ensemble $\{T < \infty\}$,*

$$\mathbf{E}(f(X_{T+t}, t \geq 0) / \mathcal{F}_T) = \mathbf{E}_{X_T}(f(X_t, t \geq 0)).$$

Preuve: On reprend le schéma de la preuve de la propriété de Markov pour le processus de Poisson. Il suffit de considérer le cas où f ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées:

$$f(X_t, t \geq 0) = \phi(X_{t_1} \cdots, X_{t_r}).$$

Si T prend ses valeurs dans l'ensemble des dyadiques $\{k/2^n, k = 0, 1, \cdots\}$, la preuve est la même que pour une chaîne de Markov à temps discret. Sinon, on approche T par une suite décroissante T_n de tels temps d'arrêt. On peut écrire, en remarquant que pour chaque ω, $(X_{T_n})(\omega) = (X_T)(\omega)$ pour n assez grand, puisque E est dénombrable,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(f(X_{T+t}, t \geq 0)/\mathcal{F}_T) &= \mathbf{E}(\phi(X_{T+t_1}, \cdots, X_{T+t_r})/\mathcal{F}_T) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(\phi(X_{T_n+t_1}, \cdots, X_{T_n+t_r})/\mathcal{F}_T) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\phi(X_{T_n+t_1}, \cdots, X_{T_n+t_r})/\mathcal{F}_{T_n})/\mathcal{F}_T) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{E}_{X_{T_n}}(\phi(X_{t_1}, \cdots, X_{t_r}))/\mathcal{F}_T) \\
&= \mathbf{E}_{X_T}(\phi(X_{t_1}, \cdots, X_{t_r})).
\end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété.

Si $\theta_t : \Omega \to \Omega$ est telle que $X_s \circ \theta_t = X_{t+s}$ on peut exprimer la proprité de Markov forte en disant que, pour toute v.a. Z, mesurable par rapport à $\sigma(X_s, s \geq 0)$, bornée ou positive,

$$E(Z \circ \theta_T/\mathcal{F}_T) = \mathbf{E}_{X_T}(Z),$$

sur l'ensemble $\{T < \infty\}$.

5.2. Description dynamique

Soient $T_0 = 0$ puis

$$0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$$

les instants successifs de saut du processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$. En d'autres termes

$$T_{n+1} = \inf\{t > T_n; X_t \neq X_{T_n}\}.$$

Ce sont des temps d'arrêt. Remarquons que

$$T_{n+1} = T_n + T_1 \circ \theta_{T_n}$$

et que

$$X_{T_{n+1}} = X_{T_1} \circ \theta_{T_n}.$$

La continuité à droite des trajectoires et le fait que E est dénombrable assurent bien que $T_{n+1} \neq T_n$. Posons, pour tout $i, j \in E$

$$Q(i,j) = \mathbf{P}_i(X_{T_1} = j), \quad \lambda(i) = \frac{1}{\mathbf{E}_i(T_1)}.$$

Convenons qu'une v.a. de loi exponentielle de paramètre nul est une v.a. identiquement égale à $+\infty$. Le théorème suivant est fondamental:

Théorème 5.2.1 *Si $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, est un processus de Markov sur E, alors*

- *$X_{T_n}, n \in \mathbf{N}$, est une chaîne de Markov de noyau Q,*
- *Les variables $T_1, T_2 - T_1, \cdots$ sont conditionnellement à $\sigma(X_{T_0}, X_{T_1}, \cdots)$ indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\lambda(X_{T_0}), \lambda(X_{T_1}), \cdots$.*

Le dernier énoncé signifie que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_1 > \alpha_1, T_2 - T_1 > \alpha_2, \cdots, T_n - T_{n-1} > \alpha_n / X_{T_0} = x_0, \cdots, X_{T_n} = x_n, \cdots)\\ = \exp(-\lambda(x_0)\alpha_1)\exp(-\lambda(x_1)\alpha_2)\cdots\exp(-\lambda(x_{n-1})\alpha_n).\end{aligned}$$

Ceci est donc aussi égal à:

$$\mathbf{P}(T_1 > \alpha_1, T_2 - T_1 > \alpha_2, \cdots, T_n - T_{n-1} > \alpha_n / X_{T_0} = x_0, \cdots, X_{T_{n-1}} = x_{n-1}).$$

Preuve: Déterminons d'abord la loi de T_1 lorsque le processus part de i. Soit $t, s \geq 0$. Remarquons que $T_1 = t + T_1 \circ \theta_t$ si $T_1 > t$. En appliquant la propriété de Markov au temps t, et en utilisant que partant de i, $X_t = i$ si $T_1 > t$, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i(T_1 > t+s) &= \mathbf{E}_i[\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{T_1 > t+s}/\mathcal{F}_t)]\\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{T_1 > t}\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{T_1\circ\theta_t > s}/\mathcal{F}_t)]\\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{T_1 > t}\mathbf{E}_{X_t}(\mathbf{1}_{T_1 > s})]\\ &= \mathbf{P}_i(T_1 > t)\mathbf{P}_i(T_1 > s).\end{aligned}$$

La fonction $f(t) = \mathbf{P}_i(T_1 > t)$ est décroissante et vérifie l'équation $f(t+s) = f(t)f(s)$. Ceci assure qu'il existe un réel $\lambda(i)$ tel que $f(t) = e^{-t\lambda(i)}$. Alors, soit $\lambda(i) = 0$ et $T_1 = +\infty$, $\mathbf{P}_i$-p.s., soit $\lambda(i) \neq 0$ et T_1 est une variable exponentielle de paramètre $\lambda(i)$ et d'espérance $1/\lambda(i)$. Déterminons maintenant la loi du couple (T_1, X_{T_1}) partant de i. En remarquant que $X_{T_1} = X_{T_1} \circ \theta_t$ si $T_1 > t$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i(T_1 > t, X_{T_1} = j) &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{T_1 > t}\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_j(X_{T_1}\circ\theta_t)/\mathcal{F}_t)]\\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{T_1 > t}\mathbf{E}_{X_t}(\mathbf{1}_j(X_{T_1}))]\\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{T_1 > t}\mathbf{E}_{X_t}(\mathbf{1}_j(X_{T_1}))]\\ &= Q(i,j)\mathbf{P}_i(T_1 > t).\end{aligned}$$

Il résulte de la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt T_n, que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_i(T_1 > t_1, X_{T_1} = i_1, \cdots, T_{n+1} - T_n > t_{n+1}, X_{T_{n+1}} = i_{n+1})\\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{\{T_1 > t_1, X_{T_1} = i_1, \cdots, T_n - T_{n-1} > t_n, X_{T_n} = i_n\}}\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{T_{n+1} - T_n > t_{n+1}, X_{T_{n+1}} = i_{n+1}\}}/\mathcal{F}_{T_n})]\\ &= \mathbf{E}_i[\mathbf{1}_{\{T_1 > t_1, X_{T_1} = i_1, \cdots, T_n - T_{n-1} > t_n, X_{T_n} = i_n\}}\mathbf{E}_{X_{T_n}}(\mathbf{1}_{\{T_1 > t_{n+1}, X_{T_1} = i_{n+1}\}})]\\ &= \mathbf{P}_i(T_1 > t_1, X_{T_1} = i_1, \cdots, T_n - T_{n-1} > t_n, X_{T_n} = i_n)\mathbf{P}_{i_n}(T_1 > t_{n+1}, X_{T_1} = i_{n+1})\\ &= \mathbf{P}_i(T_1 > t_1, X_{T_1} = i_1, \cdots, T_n - T_{n-1} > t_n, X_{T_n} = i_n)Q(i_n, i_{n+1})e^{-\lambda(i_n)t_{n+1}},\end{aligned}$$

ce qui donne facilement le théorème. On retiendra en particulier de la démonstration précédente que

Proposition 5.2.2 *Pour tout $i, j \in E$,*

$$\mathbf{P}_i(X_{T_1} = j, T_1 > t) = e^{-t\lambda(i)} Q(i,j).$$

Supposons qu'il y a un état i pour lequel $\lambda(i) = 0$. Alors, une fois dans cet état, on y reste toujours (car on a vu dans la preuve du théorème qu'il faut interpréter une v.a. exponentielle de paramètre 0 comme une v.a. identiquement infinie). On dit alors que i est une "trappe".

Corollaire 5.2.3 *Soit (X_t) un processus de saut markovien. Supposons que λ ne s'annule pas. Alors il existe une chaîne de Markov $\{\xi_n, n \geq 0\}$ de noyau Q, indépendante d'une suite U_n de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 telles que, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$,*

$$X_t = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n \mathbf{1}_{[V_n, V_{n+1}[}(t)$$

où $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{\lambda(\xi_{k-1})}$, et $V_0 = 0$.

Preuve: Il suffit de poser $\xi_n = X_{T_n}$ et $U_n = \lambda(\xi_{n-1})(T_n - T_{n-1})$ et d'appliquer le théorème.

Interprétations: Il y a deux interprétations du théorème:

- En l'état i le processus attend un temps exponentiel de paramètre $\lambda(i)$, indépendant de ce qui précède. Puis il saute en l'état j avec probabilité $Q(i,j)$. En j, on recommence.
- En l'état i, le processus est en quelque sorte attiré par tous les autres états (on parle parfois de compétition). De façon imagée, chaque état j porte une horloge qui sonne au bout d'un temps exponentiel de paramètre $A(i,j) = \lambda(i)Q(i,j)$. Si celle qui sonne la première est en l'état j_0, le processus saute à ce moment là en j_0 (voir le lemme des deux réveils).

Il est a priori possible que, avec une probabilité non nulle, $\lim_{n\to+\infty} T_n < +\infty$, on dit alors qu'il y a **explosion**. Afin de donner un critère de non explosion, montrons d'abord:

Lemme 5.2.4 *Soit $U_n, n \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. Alors $\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{+\infty} U_k < +\infty) = 1$ ou 0 suivant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ ou $= +\infty$.*

Preuve: Puisque $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}(U_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}$, on voit que $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k$ est fini p.s. lorsque $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$. Par ailleurs,

$$\mathbf{E}(e^{-\sum_{k=1}^{+\infty} U_k}) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \lambda_k^{-1}},$$

et ce produit infini est nul lorsque que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$. Dans ce cas $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k = +\infty$, presque sûrement.

Proposition 5.2.5 *Considérons un processus markovien de saut (X_t). Il n'y a pas explosion, c'est à dire que* $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$, *p. s., si et seulement si* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(X_{T_k})} = +\infty$ *p. s.*

Preuve: En utilisant le lemme au dessus on peut écrire que

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to+\infty} T_n < +\infty) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\lim_{n\to+\infty} T_n < +\infty/\sigma(X_{T_k}, k \geq 0)) = \mathbf{P}(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(X_{T_k}} < +\infty).$$

Corollaire 5.2.6 *Si* $\sup \lambda(i) < +\infty$ *ou si* X_{T_n} *est une chaîne de Markov récurrente, il n'y a pas d'explosion.*

Preuve: Il résulte de la proposition que s'il y a explosion alors $\lambda(X_{T_n}) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

L'explosion entraîne de nombreux phénomènes désagréables. Pour les éviter **nous supposerons toujours désormais qu'il n'y a pas d'explosion**. Tous les processus que nous rencontrerons auront cette propriété.

Le théorème précédent décrit complètement le processus à partir de λ et Q jusqu'au temps d'explosion. Donc, en l'absence d'explosion, il existe un et un seul processus de saut markovien correspondant à ces données.

5.3. Le générateur

En pratique, il est presque toujours impossible de décrire le semigroupe $\{P_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ d'un processus markovien de saut. En fait, on utilise le générateur défini ainsi:

Définition 5.3.1 *On appelle générateur la "matrice"* $A(i,j), i,j \in E$, *définie par*

$$A(i,j) = \begin{cases} \lambda(i)Q(i,j), & si \;\; i \neq j, \\ -\lambda(i), & si \;\; i = j, \end{cases}$$

Remarquons que $Q(i,i) = 0$ donc que $\sum_{j\in E} A(i,j) = 0$. En particulier

$$A(i,i) = -\sum_{j\neq i} A(i,j).$$

Pour décrire le lien entre le générateur et le semigroupe, montrons le lemme important suivant qui dit qu'en un temps petit, le processus n'a pas le temps de sauter deux fois. De façon plus précise, on a le lemme suivant. On note $o(t)$ une fonction telle que $o(t)/t \to 0$ quand $t \to 0$.

Lemme 5.3.2 *Pour tout* $i \in E$, $P_i(T_2 \leq t) = o(t)$.

Preuve: Notons d'abord que si U et V sont des v.a. exponentielles indépendantes de paramètre $\lambda(i)$ et $\lambda(j)$ alors

$$\mathbf{P}(U+V\le t)\le \mathbf{P}(U\le t)\mathbf{P}(V\le t)=(1-e^{-t\lambda(i)})(1-e^{-t\lambda(j)}).$$

En utilisant le théorème de la section précédente, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_i(T_2\le t) &= \sum_{j\in E}\mathbf{P}_i(X_{T_1}=j,T_2\le t)\\
&= \sum_{j\in E}\mathbf{P}_i(X_{T_1}=j)\,\mathbf{P}_i(T_2\le t/X_{T_1}=j)\\
&\le \sum_{j\in E}\mathbf{P}_i(X_{T_1}=j)(1-e^{-t\lambda(i)})(1-e^{-t\lambda(j)})\\
&\le (1-e^{-t\lambda(i)})\sum_{j\in E}\mathbf{P}_i(X_{T_1}=j)(1-e^{-t\lambda(j)})
\end{aligned}$$

Cete dernière quantité est un $o(t)$ par le théorème de convergence dominée.

Remarque: De l'inégalité $1-e^{-x}\le x$, on déduit de la preuve précédente que si $\sup_{i\in E}\lambda(i)=M<+\infty$, alors $\mathbf{P}_i(T_2\le t)\le t^2M^2$.

Analytiquement le lien entre le générateur et le semigroupe est donné par:

Théorème 5.3.3 *Le semigroupe $\{P_t, t\in\mathbf{R}^+\}$ vérifie, pour tout $t\ge 0$,*

- $\frac{dP_t}{dt}=AP_t$ *(équation backward);*
- *Si il n'y a pas explosion,* $\frac{dP_t}{dt}=P_tA$ *(équation forward).*

En particulier A est la dérivée de P_t en $t=0$, c'est à dire que, si $i\ne j$,

$$P_t(i,j)=\lambda(i)Q(i,j)t+o(t)$$

et $P_t(i,i)=1-\lambda(i)t+o(t)$.

Avant de montrer ce théorème dans sa généralité, montrons le pour $t=0$. Il s'agit de voir que $P_0'=A$. Si $i\ne j$,

$$\begin{aligned}
P_t(i,j) &= \mathbf{P}_i(X_t=j)=\mathbf{P}_i(X_t=j,T_1\le t<T_2)+\mathbf{P}_i(X_t=j,T_2\le t)\\
&= \mathbf{P}_i(X_{T_1}=j,T_1\le t)-\mathbf{P}_i(X_{T_1}=j,T_1\le t,T_2\le t)+\mathbf{P}_i(X_t=j,T_2\le t)\\
&= (1-e^{-t\lambda(i)})Q(i,j)-\mathbf{P}_i(X_{T_1}=j,T_1\le t,T_2\le t)+\mathbf{P}_i(X_t=j,T_2\le t).
\end{aligned}$$

Il résulte du lemme au dessus que

$$\mathbf{P}_i(X_{T_1}=j,T_1\le t,T_2\le t)+\mathbf{P}_i(X_t=j,T_2\le t)\le 2\mathbf{P}_i(T_2\le t)=o(t)$$

D'autre part, si on part de i il faut au moins deux sauts du processus pour y revenir. On a donc

$$\begin{aligned} P_t(i,i) - 1 &= \mathbf{P}_i(T_1 > t) + \mathbf{P}_i(X_t = i, T_2 \leq t) - 1 \\ &= e^{-t\lambda(i)} - 1 + \mathbf{P}_i(X_t = i, T_2 \leq t) \\ &= e^{-t\lambda(i)} - 1 + o(t), \end{aligned}$$

Dans les deux cas,

$$P_t(i,j) - P_0(i,j) = \frac{1 - e^{-t\lambda(i)}}{\lambda(i)} A(i,j) + o(t)$$

ce qui montre le théorème lorsque $t = 0$. (En fait la preuve établit que $P_t(i,j) - P_0(i,j) = \frac{1-e^{-t\lambda(i)}}{\lambda(i)} A(i,j) + r_t(i,j)$ où $\sum_j |r_t(i,j)| = o(t)$ et cette relation permettrait de montrer sans trop de difficulté l'équation backward en général).

Traitons maintenant (et sans utiliser ce qui précède) l'équation backward du théorème. Commençons par le lemme suivant.

Lemme 5.3.4

$$P_t(i,j) = e^{-\lambda(i)t}\delta_i(j) + \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-\lambda(i)(t-s)} A(i,k) P_s(k,j)\, ds$$

Preuve: Si T_1 est l'instant de premier saut,

$$\begin{aligned} P_t(i,j) &= \mathbf{P}_i(X_t = j) = \mathbf{P}_i(X_t = j, T_1 > t) + \mathbf{P}_i(X_t = j, T_1 \leq t) \\ &= \delta_i(j) e^{-\lambda(i)t} + \sum_{k \neq i} \mathbf{P}_i(X_{T_1} = k, X_t = j, T_1 \leq t) \end{aligned}$$

Or, par la propriété de Markov forte,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i(X_{T_1} = k, X_t = j, T_1 \leq t) &= \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_{T_1} = k, T_1 \leq t\}} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_t = j\}} / \mathcal{F}_{T_1})) \\ &= \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_{T_1} = k, T_1 \leq t\}} \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_{t-T_1} \circ \theta_{T_1} = j\}} / \mathcal{F}_{T_1})) \\ &= \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_{T_1} = k, T_1 \leq t\}} \mathbf{E}_{X_{T_1}}(\mathbf{1}_{\{X_{t-T_1} = j\}})) \\ &= \mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_{T_1} = k, T_1 \leq t\}} P_{t-T_1}(k,j)) \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(i)s} P_{t-s}(k,j) \lambda(i) Q(i,k)\, ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(i)(t-s)} A(i,k) P_s(k,j)\, ds \end{aligned}$$

où l'on considére T_1 comme fixé dans l'espérance conditionelle et on utilise le changement de variables $s \to t - s$ à la dernière ligne. On obtient donc bien le lemme.

Preuve de l'équation backward. Puisque $A(i,k)P_s(k,j) = \lambda(i)Q(i,k)P_s(k,j)$, on voit que $\sum_{k\neq i} A(i,k)P_s(k,j)$ est une fonction bornée (par $\lambda(i)$). On déduit du lemme que

$$P_t(i,j) = e^{-\lambda(i)t}\delta_i(j) + \int_0^t e^{-\lambda(i)(t-s)} \sum_{k\neq i} A(i,k)P_s(k,j)\, ds$$

et donc que

$$e^{\lambda(i)t}P_t(i,j) = \delta_i(j) + \int_0^t e^{\lambda(i)s} \sum_{k\neq i} A(i,k)P_s(k,j)\, ds$$

La primitive d'une fonction bornée étant continue, on voit que $P_t(i,j)$ est une fonction continue de t. Ceci entraîne que $\sum_{k\neq i} A(i,k)P_t(k,j)$ est continue, ce qui à son tour assure que $e^{\lambda(i)t}P_t(i,j)$ est dérivable, de dérivée $e^{\lambda(i)t}\sum_{k\neq i} A(i,k)P_t(k,j)$. On a donc

$$\frac{d}{dt}P_t(i,j) = \frac{d}{dt}e^{-\lambda(i)t}e^{\lambda(i)t}P_t(i,j) = \sum_{k\neq i} A(i,k)P_t(k,j) - \lambda(i)P(i,j) = AP_t(i,j)$$

La preuve de l'équation forward est dans le même esprit, mais plus compliquée par le manque de contrôle de P_tA. On pourra la sauter. Commençons aussi par un lemme.

Lemme 5.3.5 *Si il n'y a pas explosion,*

$$P_t(i,j) \quad = \quad e^{-\lambda(j)t}\delta_i(j) + \sum_{k\neq j}\int_0^t e^{-\lambda(j)(t-s)}P_s(i,k)A(k,j)\, ds$$

Preuve: Montrons d'abord que

$$P_t(i,j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i(e^{-\lambda(j)(t-T_n)}\mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j,T_n<t\}}) \tag{5.1}$$

Remarquons par la propriété de Markov forte appliquée au temps T_n,

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{T_{n+1}-T_n>t,X_{T_{n+1}}=j\}}/\mathcal{F}_{T_n}) = e^{-\lambda(X_{T_n})t}Q(X_{T_n},j),$$

c'est à dire que la loi de $(X_{T_{n+1}}, T_{n+1}-T_n)$ sachant $\mathcal{F}_{T_n}$ est $Q(k,\cdot)\lambda(k)e^{-\lambda(k)s}\, ds$ si $X_{T_n} = k$. On a, si il n'y a pas explosion,

$$\begin{aligned}
P_t(i,j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i\left(\mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j,T_n\leq t<T_{n+1}\}}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i\left(\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j,T_n\leq t<T_{n+1}\}}/\mathcal{F}_{T_n})\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i\left(\mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j,T_n\leq t\}}\mathbf{E}_i(\mathbf{1}_{\{t-T_n<T_{n+1}-T_n\}}/\mathcal{F}_{T_n})\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i\left(e^{-\lambda(j)(t-T_n)}\mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j,T_n\leq t\}}\right).
\end{aligned}$$

Pour montrer le lemme, écrivons en utilisant (5.1):

$$\begin{aligned} P_t(i,j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i \left(e^{-\lambda(j)(t-T_n)} \mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j, T_n \le t\}} \right) \\ &= e^{-\lambda(j)t} \delta_i(j) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in E} \mathbf{E}_i \left(e^{-\lambda(j)(t-T_n)} \mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j, T_n \le t\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_{n-1}}=k\}} \right). \end{aligned}$$

Puisque la loi de $(X_{T_n}, T_n - T_{n-1})$ sachant $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$ est $Q(k,\cdot)\lambda(k)e^{-\lambda(k)s}\,ds$ si $X_{T_{n-1}} = k$,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in E} \mathbf{E}_i \left(e^{-\lambda(j)(t-T_n)} \mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j, T_n \le t\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_{n-1}}=k\}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in E} \mathbf{E}_i \left(\mathbf{E}_i(e^{-\lambda(j)(t-T_n)} \mathbf{1}_{\{X_{T_n}=j, T_n \le t\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_{n-1}}=k\}} / \mathcal{F}_{T_{n-1}}) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in E} \mathbf{E}_i \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(j)(t-T_{n-1}-s)} Q(k,j) \mathbf{1}_{\{T_{n-1}+s \le t\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_{n-1}}=k\}} \lambda(k) e^{-\lambda(k)s}\,ds \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k \in E} \mathbf{E}_i \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(j)(t-T_n-s)} Q(k,j) \mathbf{1}_{\{T_n+s \le t\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_n}=k\}} \lambda(k) e^{-\lambda(k)s}\,ds \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k \in E} \mathbf{E}_i \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{r > T_n\}} e^{-\lambda(j)(t-r)} Q(k,j) \mathbf{1}_{\{r<t\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_n}=k\}} \lambda(k) e^{-\lambda(k)(r-T_n)}\,dr \right) \end{aligned}$$

en posant $s + T_n = r$. Puisque si $k \neq j$, $\lambda(k)Q(k,j) = A(k,j)$, ceci est encore égal à

$$\begin{aligned} &\sum_{k \neq j} \int_0^t A(k,j) e^{-\lambda(j)(t-r)} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i \left(\mathbf{1}_{\{r>T_n\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_n}=k\}} e^{-\lambda(k)(r-T_n)}\,ds \right) \\ &= \sum_{k \neq j} \int_0^t A(k,j) e^{-\lambda(j)(t-r)} P_r(i,k)\,dr \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau (5.1) ce qui prouve le lemme.

Terminons la preuve de l'équation forward: La deuxième relation du lemme s'écrit:

$$e^{\lambda(j)t} P_t(i,j) = \delta_i(j) + \sum_{k \in E} \int_0^t e^{\lambda(i)(s)} P_s(i,k) A(k,j)\,ds.$$

La difficulté vient du manque de contrôle sur $P_s(i,k)A(k,j)$. Cette fonction est continue et positive, pour $k \neq i$. Comme on sait déja que le terme de droite est dérivable de dérivée continue, on voit que nécéssairement

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) + P_t(i,j)\lambda(j) = \sum_{k \neq j} P_s(i,k) A(k,j)$$

pour Lebesgue-presque tout t. La différence (droite - gauche) est semicontinue inférieurement (car la limite d'une suite croissante de fonctions continues positives est semicontinue inférieurement). Elle doit donc être nulle partout.

En général, les équations de Kolmogorov ne peuvent pas se résoudre. Par contre, on peut parfois utiliser les exponentielles de matrices:

Proposition 5.3.6 *Supposons que* $\sup_{i\in E}\lambda(i) < +\infty$. *Alors*

$$P_t = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Preuve: Comme

$$\sum_{j\in E} |A(i,j)| = \lambda(i) + \sum_{j\neq i} \lambda(i)Q(i,j) = 2\lambda(i),$$

on voit facilement par récurrence que si $M = \sup_{i\in E}\lambda(i)$, $|A^n(i,j)| \leq (2M)^n$. Cette estimation permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ est dérivable et de calculer sa dérivée. On déduit de l'équation backward de Kolmogorov que:

$$(\exp(-tA)P_t)' = -A\exp(-tA)P_t + \exp(-tA)AP_t = 0,$$

donc $P_t = \exp(tA)$.

Ceci va nous permettre d'obtenir une représentation simple des processus markoviens à intensité λ bornée:

Corollaire 5.3.7 *Supposons que* $\sup_{i\in E}\lambda(i) = M < +\infty$. *Alors,* $P = \frac{A}{M} + I$ *est une probabilité de transition. Si* N_t *est un processus de Poisson de paramètre* M *et si* Z_n *est une chaîne de Markov de noyau* P *alors*

$$X_t = Z_{N_t}$$

est une représentation du processus de Markov de générateur A.

Preuve: Pour tout $i,j \in E$, $P(i,j) = A(i,j)/M \geq 0$ si $i \neq j$ et $P(i,i) = -\frac{\lambda(i)}{M} + 1 \geq 0$. Par ailleurs $\sum_{j\in E} P(i,j) = \sum_{j\in E} \frac{A(i,j)}{M} + 1 = 1$. Donc P est un noyau de transition. Le corollaire résulte alors de la proposition précédente et de la proposition 5.1.2.

5.4. Mesure invariante

Définition 5.4.1 *On dit que* π *est une mesure invariante si* $\pi P_t = \pi$, *pour tout* $t \in \mathbf{R}^+$. *On dit que le processus* $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, *est irréductible, resp. transitoire, resp. récurrent, lorsque la chaîne de Markov* $X_{T_n}, n \in \mathbf{N}$, *a ces propriétés. On dira que* X_t *est récurrent positif si ce processus est récurrent et si il possède une probabilité invariante.*

Notons que X_t peut être récurrent positif sans que X_{T_n} le soit. Pour étudier l'existence et l'unicité des mesures invariantes, commençons par un lemme. Posons $\Pi(i,j) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P_t(i,j)\,dt$

Lemme 5.4.2 *Si le processus $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, est récurrent, la chaîne de Markov de noyau*

$$\Pi(i,j) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P_t(i,j)\,dt$$

est aussi récurrente.

Preuve: Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} P_t(i,j)\,dt &= \mathbf{E}_i\left(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_j(X_t)\,dt\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i\left(\mathbf{1}_j(X_{T_n})(T_{n+1}-T_n)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_i\left(\mathbf{1}_j(X_{T_n})\mathbf{E}_i(T_{n+1}-T_n/\sigma(X_{T_k}, k \geq 0))\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(j)} \mathbf{E}_i\left(\mathbf{1}_j(X_{T_n})\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(j)} Q^n(i,j).
\end{aligned}$$

Ensuite, on vérifie par récurrence que

$$\Pi^n(i,j) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} P_t(i,j)\,dt$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Pi^n(i,j) = \int_0^{+\infty} P_t(i,j)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(j)} Q^n(i,j).$$

Le lemme en résulte immédiatement.

Montrons maintenant l'important théorème suivant, analogue du cas discret.

Théorème 5.4.3 *Soit $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, un processus de saut markovien* **récurrent**. *Il admet une mesure invariante m, unique à une constante près, caractérisée par* **une** *des conditions suivantes:*

1. *Pour un état i fixé, si $S_i = \inf\{t > T_1; X_t = i\}$,*

$$m(j) = \mathbf{E}_i\left(\int_0^{S_i} \mathbf{1}_j(X_s)\,ds\right).$$

2. *La mesure ν définie par $\nu(j) = \lambda(j)m(j)$ vérifie $\nu Q = \nu$.*

3. $mA = 0$.

Preuve: Montrons d'abord l'unicité: si m est une mesure invariante, $mP_t = m$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, $m\Pi = m$, où Π est le noyau introduit dans le lemme. Donc m est une mesure invariante de la chaîne de noyau Π. Or on sait qu'il n'existe qu'une seule telle mesure, à une constante près, car cette chaîne est récurrente.

Pour établir l'existence, vérifions que la formule donnée au *1*) définit une mesure invariante. Remarquons que S_i est un temps d'arrêt. On peut donc écrire, pour toute fonction $f : E \to \mathbf{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\int_E P_t f\, dm &= \mathbf{E}_i[\int_0^{S_i} P_t f(X_s)\, ds] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_0^{+\infty} P_t f(X_s) \mathbf{1}_{s<S_i}\, ds] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_0^{+\infty} \mathbf{E}_i(f(X_{t+s})/\mathcal{F}_s) \mathbf{1}_{s<S_i}\, ds] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_0^{+\infty} \mathbf{E}_i(f(X_{t+s}) \mathbf{1}_{s<S_i}/\mathcal{F}_s)\, ds] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_0^{+\infty} f(X_{t+s}) \mathbf{1}_{s<S_i}\, ds] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_t^{S_i} f(X_u)\, du] + \mathbf{E}_i[\int_{S_i}^{S_i+t} f(X_u)\, du] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_t^{S_i} f(X_u)\, du] + \mathbf{E}_i[\int_0^{t} \mathbf{E}_i(f(X_{u+S_i})/\mathcal{F}_{S_i})\, du] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_t^{S_i} f(X_u)\, du] + \mathbf{E}_i[\int_0^{t} \mathbf{E}_{X_{S_i}}(f(X_u))\, du] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_t^{S_i} f(X_u)\, du] + \mathbf{E}_i[\int_0^{t} \mathbf{E}_i(f(X_u))\, du] \\
&= \mathbf{E}_i[\int_0^{S_i} f(X_u)\, du] = \int_E f dm.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant *2*. Si $\tau_i = \inf\{n > 0; X_{T_n} = i\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
m(j) &= \mathbf{E}_i[\int_0^{S_i} \mathbf{1}_j(X_s)\, ds] = \mathbf{E}_i[\sum_{n=0}^{\tau_i-1} (T_{n+1} - T_n) \mathbf{1}_j(X_{T_n})] \\
&= \mathbf{E}_i[\mathbf{E}_i(\sum_{n=0}^{\tau_i-1} (T_{n+1} - T_n) \mathbf{1}_j(X_{T_n})/\sigma(X_{T_k}, k \geq 1))] \\
&= \mathbf{E}_i[\sum_{n=0}^{\tau_i-1} \lambda(X_{T_n})^{-1} \mathbf{1}_j(X_{T_n})] = \lambda(j)^{-1} \mathbf{E}_i(\sum_{n=0}^{\tau_i-1} \mathbf{1}_j(X_{T_n})).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\nu(\cdot) = \lambda(\cdot)m(\cdot)$ est une mesure Q-invariante.

La relation $\nu Q = \nu$ s'écrit $\nu(j) = \sum_{i \in E} \nu(i) Q(i,j)$, c'est à dire

$$\lambda(j)m(j) = \sum_{i \in E} m(i)\lambda(i)Q(i,j) = \sum_{i \neq j} m(i)A(i,j).$$

C'est équivalent à $mA(j) = m(j)A(j,j) + \sum_{i\neq j} m(i)A(i,j) = 0$.

Terminons la preuve du théorème. Si $\tilde{m}$ vérifie aussi $\tilde{m}A = 0$ alors $\tilde{\nu} = \lambda\tilde{m}$ vérifie $\tilde{\nu}Q = \tilde{\nu}$. Puisque Q est récurrent, ν et $\tilde{\nu}$ sont alors proportionnelles. Il en est donc de même de m et de $\tilde{m}$. Donc $\tilde{m}$ est invariante.

Il faut faire un peu attention dans le maniement des mesures invariantes, si on ne sait pas à priori que la chaîne est récurrente. En particulier, une mesure vérifiant $\pi A = 0$ n'est pas nécessairement invariante lorsque le processus est transitoire. On utilise souvent la proposition suivante (on pourrait montrer qu'elle elle est aussi vraie dès qu'il n'y a pas explosion).

Proposition 5.4.4 *Considérons un processus de saut markovien irréductible de générateur A pour lequel il y a une probabilité π telle que $\pi A = 0$. Si $\sum_{i\in E} \lambda(i)\pi(i) < +\infty$, le processus est récurrent positif et π est la probabilité invariante.*

Preuve: La mesure $\nu(j) = \lambda(j)\pi(j)$ est une mesure bornée invariante de la chaîne de noyau Q qui est donc récurrente. La proposition s'en déduit immédiatement en utilisant avec le théorème précédent.

La proposition suivante s'interprète comme une convergence vers l'équilibre. Une de ses conséquences est de pouvoir faire des calculs sur le processus en simulant une trajectoire assez longue.

Proposition 5.4.5 *Si X_t est un processus de saut markovien récurrent positif, de probabilité invariante π, pour toute fonction $f \in L^1(\pi)$, pour tout $i \in E$, $\mathbf{P}_i$ presque sûrement,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds = \int f\,d\pi.$$

Preuve: Notons d'abord qu'il résulte du théorème 5.4.3 que la probabilité invariante π vérifie, pour tout $j \in E$,

$$\pi(j) = \frac{1}{\mathbf{E}_i(S_i)}\mathbf{E}_i(\int_0^{S_i} \mathbf{1}_{\{j\}}(X_s)\,ds.$$

Sous $\mathbf{P}_i$, le processus X_t est régénératif de temps de régénération $\tau = S_i$. La proposition résulte donc du théorème ergodique des processus régénératifs (Théorème 3.1.3).

Le lemme suivant peut être utile.

Lemme 5.4.6 *Pour tout $s \geq 0$ fixé, pour tout entier $k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}_i(T_k = s) = 0$.*

Preuve: On a

$$\mathbf{P}_i(T_k = s) = \sum_{x_1,\cdots,x_{k-1}} \mathbf{P}_i(T_k = s/X_{T_1} = x_1,\cdots,X_{T_{k-1}} = x_{k-1})\mathbf{P}(X_{T_1} = x_1,\cdots,X_{T_{k-1}} = x_{k-1})$$

or, conditionnellement aux positions T_k, T_k a la loi d'une somme de v.a. exponentielles indépendantes. Elle a donc une densité et ne charge pas les points.

5.5. Réversibilité

Soit π une probabilité invariante du processus de saut markovien $X_t, t \geq 0$, sur E. On vérifie comme dans le cas discret que sous $\mathbf{P}_\pi$, $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, est un processus stationnaire. Quitte à élargir l'espace de probabilité, on peut prolonger ce processus en un processus stationnaire $X_t, t \in \mathbf{R}$.

Rappellons qu'un processus $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, resp. $t \in \mathbf{R}$, est dit stationnaire si pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, la loi du vecteur $(X_{t+t_1}, \cdots, X_{t+t_n})$ est la même pour tout $t \geq 0$, resp. $t \in \mathbf{R}$. On considère la version continue à droite du processus X_{-t}. Elle a la même loi que le processus initial car pour tout s fixé, X_t est continu en s par le lemme de la fin de la section précédante.

Théorème 5.5.1 *Si π est une probabilité invariante du processus $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, alors sous P_π, la version continue à droite de $X_{-t}, t \in \mathbf{R}^+$, est un processus markovien de saut de générateur $\tilde{A}$ vérifiant $\pi(i)\tilde{A}(i,j) = \pi(j)A(j,i)$. On dit que la probabilité π est réversible si $\pi(i)A(i,j) = \pi(j)A(j,i)$.*

Preuve: Le caractère markovien de X_{-t} se vérifie comme dans le cas discret (après avoir montré que, pour tout s fixe, presque sûrement, X_{-t} ne saute pas au point s et est donc continu en s) et nous obtenons que son semigroupe de transition $\tilde{P}_t$ est donné par

$$\tilde{P}_t(i,j) = \frac{\pi(j)}{\pi(i)} P_t(j,i).$$

En dérivant en 0, nous en déduisons que $\pi(i)\tilde{A}(i,j) = \pi(j)A(j,i)$.

On appelle parfois (en franglais) l'équation

$$\pi(i)\tilde{A}(i,j) = \pi(j)A(j,i),$$

l'équation de balance locale. Notons qu'elle entraîne que $\pi A = 0$ (que l'on appelle équation de balance globale). Cette terminologie s'explique de la façon intéressante suivante.

Disons qu'un phénomène aléatoire arrive avec un **taux** (infinitésimal) τ si

$$\mathbf{P}(\text{Ce phénomène se produit entre } 0 \text{ et } t) = \tau t + o(t).$$

Par exemple, les arrivées d'un processus de Poisson de paramètre λ se font avec le taux λ. Remarquons que, si $i \neq j$,

$$A(i,j) = \text{Taux de saut vers } j, \text{en partant de } i.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_i(\text{Il y a un saut vers } j \text{ avant } t) \\
&\quad = \mathbf{P}_i(\text{Il y a un saut vers } j \text{ avant } t, T_1 \leq t < T_2) + o(t) \\
&\quad = \mathbf{P}_i(X_{T_1} = j, T_1 \leq t) + o(t) \\
= &\quad (1 - e^{-\lambda(i)t})Q(i,j) + o(t) \\
&\quad = A(i,j)t + o(t).
\end{aligned}$$

De même, si $i \neq j$, à l'équilibre (c'est à dire sous $\mathbf{P}_\pi$)

$$\pi(i)A(i,j) = \text{Taux de passage par } i \text{ puis par } j$$

car

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_\pi(\exists 0 \leq t_1 < t_2 \leq t; X_{t_1} = i, X_{t_2} = j) \\
&\quad = \mathbf{P}_\pi(\exists 0 \leq t_1 < t_2 < t; X_{t_1} = i, X_{t_2} = j, t < T_2) + o(t) \\
&\quad = \mathbf{P}_\pi(X_0 = i, X_{T_1} = j, t < T_2) + o(t) \\
&\quad = \pi(i)A(i,j) + o(t).
\end{aligned}$$

Autrement dit $\pi(i)A(i,j)$ s'interprète comme un flux entre i et j à l'équilibre. Il y a réversibilité si le flux dans un sens du temps est égal au flux dans l'autre sens. On pourra chercher une interprétation analogue à l'équation de balance globale $\pi A = 0$.

5.6. Processus de naissance et mort

Commençons par dire quelques mots du processus de saut le plus simple sur $E = \mathbf{N}$. Si N_t est le processus de Poisson de paramètre λ, et si $x \in \mathbf{N}$, posons, sous $\mathbf{P}_x$

$$X_t = x + N_t.$$

Pour déterminer le générateur de ce processus, on peut procéder de deux façons:

1) On calcule explicitement le semigroupe P_t. C'est ici facile:

$$P_t(i,j) = \mathbf{P}(N_t = j - i) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{1}_{j \geq i}.$$

On en déduit par l'une des équation de Kolmogorov que

$$A(i,i+1) = P_0'(i,i+1) = \lambda, \; A(i,i) = -\lambda,$$

et que tous les autres $A(i,j)$ sont nuls.

2) On utilise la description dynamique du processus. Etant en i, le processus saute après un temps exponentiel de paramètre $\lambda(i) = \lambda$ et va nécessairement en $i+1$, donc $Q(i,i+1) = 1$. On retrouve le générateur donné au dessus.

Pour des processus plus compliqué c'est pratiquement toujours la seconde méthode que l'on emploie. Le plus souvent P_t est incalculable. C'est d'ailleurs l'avantage du temps continu que de permettre une description simple et intuitive des paramètres qui déterminent le processus. Finalement, de façon un peu paradoxal, les processus à temps continu sont plus simples que ceux à temps discret. Ceci sera illustré dans le chapitre sur les files d'attente.

Venons en aux processus de naissance et mort. Ils représentent la classe la plus simple (et la plus importante) de processus sur $E = \mathbf{N}$:

Définition 5.6.1 *On appelle processus de naissance et mort tout processus markovien de saut sur* $\mathbf{N}$ *tel que* $A(i,j)=0$ *si* $|i-j|>1$.

Posons

$$\begin{aligned}\alpha_n &= A(n,n-1) \quad \text{si } n\geq 1;\\ \beta_n &= A(n,n+1) \quad \text{pour tout } n\in\mathbf{N}.\end{aligned}$$

Alors, en employant les notations de la section précédente,

$$\lambda(n)=\alpha_n+\beta_n,\ Q(n,n-1)=\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n},\ Q(n,n+1)=\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}.$$

On peut décrire le processus associé de la façon approximative suivante: imaginons que $X_t=n$ est le nombre d'individus d'une population à l'instant t. Alors, entre t et $t+dt$ il change d'état avec probabilité $\lambda(n)dt$, et passe soit à l'état $n+1$ avec probabilité $\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}$ (naissance), soit à l'état $n-1$ avec probabilité $\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}$ (mort d'un individu). Une autre façon de dire les choses est de dire que globalement, entre t et $t+dt$, il passe de l'état n à l'état $n+1$ avec probabilité $\beta_n dt$, de l'état $n+1$ à l'état n avec probabilité $\alpha_n dt$, et ne bouge pas avec probabilité $1-(\alpha_n+\beta_n)dt$. C'est souvent ce type de description intuitive qui permet d'écrire le générateur. Donnons un exemple: X_t est l'effectif d'une population, formé d'individus indépendants pouvant mourir avec le taux α et donner naissance à un nouvel individu avec le taux β. Alors $\alpha_n=n\alpha,\beta_n=n\beta$.

Supposons d'abord que le processus est irréductible, c'est à dire ici que les coefficients α_n et β_n sont tous non nuls.

Proposition 5.6.2 *Le processus est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha_1\cdots\alpha_n}{\beta_1\cdots\beta_n}=\infty.$$

Preuve: Par définition, le processus (X_t) est récurrent en même temps que la chaine de noyau Q. Appliquons le critère type Foster en cherchant une fonction h bornée telle que $Qh(i)=h(i)$ pour tout $i\neq 0$. On obtient que

$$h(n)=\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}h(n-1)+\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}h(n+1),\ \text{pour tout } n\geq 1,$$

d'où,

$$\begin{aligned}h(n+1)-h(n) &= \frac{\alpha_n}{\beta_n}(h(n)-h(n-1))\\ &= \frac{\alpha_n\cdots\alpha_1}{\beta_n\cdots\beta_1}(h(1)-h(0))\end{aligned}$$

par une récurrence immédiate. Si $h(1)\neq h(0)$, cette fonction h est non constante. Elle est bornée si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha_1\cdots\alpha_n}{\beta_1\cdots\beta_n}<\infty$.

Théorème 5.6.3 *Le processus est récurrent positif si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = +\infty, \quad S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} < \infty$$

La probabilité invariante est $\pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ *et* $\pi_0 = \frac{1}{S}$.

Preuve: Comme le processus est récurrent sous la condition mentionnée, il suffit de résoudre l'équation $\pi A = 0$. Elle s'écrit

$$\begin{aligned} &-\beta_0 \pi_0 + \alpha_1 \pi_1 = 0 \\ &\beta_{n-1} \pi_{n-1} - (\alpha_n + \beta_n) \pi_n + \alpha_{n+1} \pi_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$-\beta_n \pi(n) + \alpha_{n+1} \pi_{n+1} = -\beta_{n-1} \pi(n-1) + \alpha_n \pi_n$$

et par récurrence, $-\beta_n \pi(n) + \alpha_{n+1} \pi_{n+1} = 0$ ce qui entaîne facilement le théorème.

Corollaire 5.6.4 *Dans le cas récurrent positif, le processus est réversible.*

Preuve: Il suffit de voir que $\pi_n A(n, n+1) = \pi_{n+1} A(n+1, n)$, ce qui est clair puisque

$$\pi_{n+1} = \frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}} \pi_n.$$

Un contre exemple: Prenons $\alpha_n = 3^n, \beta_n = 2 \cdot 3^n$. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum \frac{1}{2^n} < +\infty$ et $S > +\infty$. Il existe donc une probabilité π telle que $\pi A = 0$ sans qu'il y ait de probabilité invariante.

Terminons par la traduction de la proposition dans le cas fini:

Proposition 5.6.5 *Si* $\beta_k = 0$ *alors que* $\beta_0 > 0, \cdots, \beta_{k-1} > 0$ *et* $\alpha_1 > 0, \cdots, \alpha_k > 0$, *le processus sur* $E = \{0, 1, \cdots, k\}$, *est récurrent positif de probabilité invariante* $\pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$, *pour* $0 \leq n \leq k$, *où* $S = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$.

Chapitre 6

Files d'attente

6.1. Introduction

Une file d'attente est constituée de **clients** qui arrivent de l'extérieur pour rejoindre cette file, de **guichets** où les clients vont se faire servir par des **serveurs**. Dans certains cas les clients attendent dans une salle d'attente de capacité limitée. Un client servi disparaît (contrairement au cas des réseaux de files d'attente que l'on considérera plus loin). Les instants d'arrivée des clients et les temps de service sont aléatoires. Sauf avis contraire, on suppose que le premier arrivé est le premier servi (discipline FIFO: First In First Out). La théorie de ces files s'est développée pour la modélisation des centraux téléphoniques: un central recueille tous les appels d'une zone géographique donnée et les met en relation avec les correspondants. La capacité est limitée (le standard ne doit pas "sauter" !). Les caisses d'un hypermarché donnent un exemple déja assez compliqué de file d'attente. Un autre exemple important est donné par la file à l'entrée d'un élément d'un système informatique (Unité centrale CPU, imprimante, ...) lorsque les travaux qui arrivent se mettent en attente avant d'être traités par cet élément.

Une file d'attente est décrite par la loi d'interarrivée des clients, la loi des temps de service, le nombre de serveurs, la longueur maximale de la file (égale à la taille de la salle d'attente éventuelle). Nous supposerons toujours ici que les interarrivées sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, indépendantes des temps de service, eux mêmes indépendants et de même loi. Pour les files simples, on utilise les notations de Kendall:

Loi d'interarrivée / Loi de service / Nombre de serveurs / Longueur max.

Les lois sont notées symboliquement: M lorsqu'elles sont exponentielles (M pour Markov), G (G pour Général) sinon. On ne spécifie pas la longueur maximale de la file lorsqu'elle est infinie. Par exemple une file $M/M/s$ est une file d'attente à s guichets, telle que le flot d'arrivée des clients est poissonien et les temps de service exponentiels, sans restriction sur la taille de la file d'attente. Nous nous limiterons à l'étude de files markoviennes. Ce sont des files que l'on peut essentiellement décrire à l'aide d'un processus markovien de saut bien choisi. La question essentielle est de savoir si la taille de la file a tendance à exploser ou au contraire à se rapprocher d'un processus "en équilibre", c'est à dire stationnaire. Dans ce dernier cas, il peut être intéressant de calculer la taille moyenne de la file, la loi du temps d'attente d'un client, etc... Un des buts de ce chapitre est de nous apprendre à écrire le générateur de processus markovien de saut décrivant une situation concrète. On verra que c'est infiniment plus facile que de trouver les semigroupes associés. C'est là un des intérêts des processus à temps continu.

On notera X_t le nombre total de clients dans le système à l'instant t, c'est à dire le nombre de clients dans la file plus éventuellement le nombre de clients en train d'être servis.

6.2. La file $M/M/1$.

On considère une file $M/M/1$, donc une file à un serveur. Les interarrivées sont des variables aléatoires exponentielles de paramètre λ et les services des v.a. exponentielles de paramètre μ. On posera $\rho = \lambda/\mu$.

Théorème 6.2.1 *Le processus $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, à valeurs dans $\mathbf{N}$ est un processus de Markov de générateur*

$$A(n, n+1) = \lambda,\ A(n, n-1) = \mu \textit{ si } n > 0,$$

et $A(n,m) = 0$ si $|n-m| \geq 2$.

Preuve: Il est possible mais pénible d'écrire une preuve complète de ce théorème. Contentons nous de comprendre pourquoi il est vrai. Supposons connu la trajectoire $\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ jusqu'à l'instant t. Montrons qu'alors on peut décrire le comportement futur en fonction de X_t seulement. Si $X_t = n$, il y a n clients dans le système à l'instant t. La taille peut devenir égale à $n+1$ si un nouveau client arrive. Vu la propriété d'oubli de la loi exponentielle, la loi du temps de la première arrivée après l'instant t est une exponentielle de paramètre λ (et ne dépend pas des arrivées et des durées de service précédentes). Si $n > 0$, la taille X_t peut devenir $n-1$ si le service d'un client se termine. A nouveau à cause de la propriété d'oubli de la loi exponentielle, la loi de la durée de service restante est une exponentielle de paramètre μ (et ne dépend pas des arrivées précédentes). Tout ceci s'exprime en fonction de X_t et non de ce qui se passe avant. Pour déterminer le générateur on peut procéder de deux façons. Supposons $n > 0$. Si on note $t+S$ la première arrivée après t et $t+T$ la fin du service en train d'être effectué à cet instant, S et T sont des exponentielles indépendantes.

Méthode 1. Soit A l'évènement "il y a au plus un saut du processus X_t dans l'intervalle $[t, t+h]$". On sait que la probabilité du complémentaire de cet évènement est un $o(h)$. On a donc

$$\begin{aligned}
P_t(n, n+1) &= \mathbf{P}(X_{t+h} = n+1/X_t = n) \\
&= \mathbf{P}(\{X_{t+h} = n+1\} \cap A/X_t = n) + o(h) \\
&= \mathbf{P}(S < h) + o(h) \\
&= \lambda h + o(h),
\end{aligned}$$

d'où $A(n, n+1) = \lambda$. Les autres valeurs se trouvent de façon analogue.

Méthode 2. Les v.a. S et T peuvent être interprétées comme les temps de sonnerie de deux réveils. Si $S < T$, on saute à l'instant S en $n+1$. Si $T < S$, on saute en $n-1$ à l'instant T. Le lemme des deux réveils vu avant nous indique que finalement l'on saute au bout d'un temps exponentiel de paramètre $\lambda + \mu$ en $n+1$, resp. $n-1$, avec probabilité $\lambda/(\lambda+\mu)$, resp. $\mu/(\lambda+\mu)$, ce qui donne alors le générateur.

Nous avons utilisé le lemme des deux réveils à la fin de la preuve précédente. En fait cette méthode est générale. En effet, on montre facilement que ce lemme se généralise à plus de deux réveils et que l'on a:

Proposition 6.2.2 *Soit $X_t, t \geq 0$, un processus de Markov sur un espace d'état dénombrable E, de générateur A. Fixons un état $i \in E$, et donnons nous pour chaque $j \neq i$ tel que $A(i,j) \neq 0$, une variable aléatoire S_j de loi exponentielle de paramètre $A(i,j)$, indépendante des autres. Alors, partant de i, le processus X_t attend le temps $\min_{j \neq i} S_j$, puis saute au point j_0 tel que $S_{j_0} = \min_{j \neq i} S_j$. De ce nouveau point, on recommence.*

Il faut prendre garde au fait que tout n'est pas markovien. Il est essentiel de noter le rôle des lois exponentielles: la taille X_t n'est pas un processus de Markov pour les files $G/G/1$, ni $G/M/1$, ni $M/G/1$. Remarquons aussi que pour la file $M/M/1$, le choix de la taille elle même comme variable de référence est important. Par exemple le nombre total de clients effectivement dans la file d'attente n'est pas un processus de Markov (exercice).

Revenons à la file $M/M/1$. On voit que X_t est un processus de naissance et mort. D'après les résultats généraux sur ces processus, on a, si $\rho = \lambda/\mu$:

Proposition 6.2.3 *Le processus X_t est récurrent positif si et seulement si $\rho < 1$. La probabilité invariante π étant alors donnée par $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$.*

Dans l'énoncé suivant, l'expression "à l'équilibre " signifie que la probabilité utilisée est $\mathbf{P}_\pi$, (on utilise aussi parfois l'expression: "en régime stationnaire"). Remarquons que sous cette probabilité la taille X_t est toujours de loi ψ et en particulier indépendante de t. Le corollaire résulte donc du fait que

$$\mathbf{E}_\pi(X_t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-\rho)\rho^n.$$

Corollaire 6.2.4 *Si $\rho < 1$, à l'équilibre, l'espérance de la taille est $\rho/1-\rho$.*

Calculons maintenant le temps U qu'un nouveau client arrivant dans un système en équilibre passe dans le système à l'équilibre. (Par nouveau on entend supplémentaire au système en équilibre). Si ce client arrive à l'instant t, et trouve $X_{t^-} = n$ autres clients dans le système, il lui faudra attendre que $n+1$ temps de service soient effectués avant de pouvoir sortir. La loi de ce temps est celle de la somme de $n+1$

variables aléatoires indépendantes de paramètre μ, donc une loi $\Gamma(\mu, n+1)$. On connait donc la loi conditionnelle de U lorsque $X_{t^-} = n$. Or X_{t^-} est de loi π. On voit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U > t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_{t^-} = n)\mathbf{P}(U > t / X_{t^-} = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n \int_t^{+\infty} \frac{\mu^{n+1}}{n!} s^n e^{-\mu s}\, ds \\
&= (1 - \frac{\lambda}{\mu})\mu \int_t^{+\infty} e^{\lambda s - \mu s}\, ds \\
&= e^{-(\mu-\lambda)t},
\end{aligned}$$

ce qui établit que U suit une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$. Il est remarquable que ce n'est pas seulement fonction de ρ. La file peut être longue si ρ est près de 1 et le temps d'attente court, et vice versa ! En utilisant la propriété d'indépendance des accroissements du processus de Poisson, on peut démontrer (mais nous l'admettrons) que le calcul que l'on vient de faire est encore vrai pour les cleints présents dans le système en équilibre (et non pas supplémentaire).

6.3. Les files $M/M/s$.

On considère une file $M/M/s$. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ et vont se faire servir dans un des s guichets. Chaque serveur ne sert qu'un client à la fois. Les temps de service sont indépendants entre eux et des arrivées et suivent des lois exponentielles de paramètre μ. Dès qu'un guichet se libère, le premier client de la file (éventuel) va immédiatement s'y faire servir. A nouveau, X_t est le nombre total de clients dans le système à l'instant t.

Théorème 6.3.1 *X_t est un processus markovien de saut sur $\mathbf{N}$ de générateur*

$$A(n, n+1) = \lambda,\ A(n, n-1) = \min(s, n)\mu \ \ si \ \ n > 0,$$

et $A(n, m) = 0$ si $|n - m| \geq 2$.

Preuve: On raisonne comme pour la file $M/M/1$. La taille passe de n à $n+1$ lorsqu'un nouveau client arrive, c'est à dire suivant une exponentielle de paramètre λ. On a donc $A(n, n+1) = \lambda$. Si n clients sont dans le système à l'instant t, il y en a $\min(s, n)$ en train d'être servis donc susceptibles de partir. La loi de sortie du premier est celle du minimum de $\min(s, n)$ exponentielles indépendantes de paramètre μ, donc une exponentielle de paramètre $\min(s, n)\mu$. Il en résulte que $A(n, n-1) = \min(s, n)\mu$ si $n > 0$. Une autre façon de trouver ce résultat est de faire le raisonnement suivant:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_{t+h} = n-1/X_t = n) = o(h) + \\
&\sum_{k=1}^{\min(s,n)} \mathbf{P}(\text{la fin du service du } k^{\text{ième}} \text{ serveur occupé } \leq t + h/X_t = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\min(s,n)} \mu h + o(h) \\
&= \min(s, n)\mu h + o(h).
\end{aligned}$$

Proposition 6.3.2 *Soit $\rho = \lambda/\mu$. Le processus X_t est récurrent positif si et seulement si $\rho < s$. La probabilité invariante est réversible et vérifie $\pi_n = \pi_0 \rho^n/n!$ si $n \leq s$ et $\pi_n = \pi_0 \frac{\rho^s}{s!}(\frac{\rho}{s})^{n-s}$ si $n \geq s$.*

Preuve: Ceci résulte immédiatement des résultats sur les processus de naissance et mort.

Nous supposerons dans le reste de cette section que $\lambda < s\mu$ et calculons quelques quantités importantes en régime stationnaire (c'est à dire par définition sous $\mathbf{P}_\pi$, on dit aussi 'à l'équilibre"). Le corollaire suivant, prouvé en 1917, est important en téléphonie. Il permet (avec la formule d'Erlang 1, que nous verrons ensuite) le dimensionnement des centraux téléphoniques.

Corollaire 6.3.3 (Formule d'Erlang 2) *En régime stationnaire,*

$$\mathbf{P}(\textit{Tous les serveurs sont occupés}) = \pi_0 \frac{\rho^s}{(1-\rho/s)s!}.$$

Preuve: On a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\text{Tous les serveurs sont occupés}) \\
&\quad = \mathbf{P}(X_t \geq s) = \sum_{j=s}^{+\infty} \pi_j = \sum_{n=s}^{+\infty} \pi_0 \frac{\rho^s}{s!}(\frac{\rho}{s})^{n-s} = \pi_0 \frac{\rho^s}{(1-\rho/s)s!}.
\end{aligned}$$

Corollaire 6.3.4 *En régime stationnaire,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\textit{Nombre de serveurs occupés}) &= \rho \\
\mathbf{E}(\textit{Taille du système}) &= \rho + \pi_0 \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

Preuve: Calculons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\text{Nombre de serveurs occupés}) &= \sum_{n=1}^{s} n\mathbf{P}(X_t = n) + s\mathbf{P}(X_t > s) \\
&= \sum_{n=1}^{s} \pi_0 \frac{n\rho^n}{n!}) + \sum_{n=s+1}^{+\infty} \pi_0 \frac{s\rho^s}{s!}(\frac{\rho}{s})^{n-s} \\
&= \rho(\pi_0 \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!}) + \rho \sum_{n=s}^{+\infty} \pi_0 \frac{\rho^s}{s!}(\frac{\rho}{s})^{n-s} \\
&= \rho \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = \rho.
\end{aligned}$$

Par ce qui précède,

$$\mathbf{E}(\text{Taille du système}) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(X_t = n) = \rho + \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)\mathbf{P}(X_t = n).$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)\mathbf{P}(X_t = n) &= \pi_0 \frac{\rho^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)(\frac{\rho}{s})^{n-s} \\
&= \pi_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho}{s} \sum_{m=0}^{\infty} m(\frac{\rho}{s})^{m-1} \\
&= \pi_0 \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

Corollaire 6.3.5 *Si $\rho/s = 1 - \varepsilon$, lorsque $\varepsilon \to 0^+$,*

$$\pi_0 \sim \frac{s!}{s^s}\varepsilon, \quad \mathbf{E}(\textit{Taille}) \sim \frac{1}{\varepsilon}.$$

Preuve: Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1$, on a

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s+1}^{+\infty} (\frac{\rho}{s})^{n-s} \frac{\rho^s}{s!}}$$

donc, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}
\pi_0 &\sim \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{+\infty} (1-\varepsilon)^{n-s}} \\
&\sim \frac{1}{\frac{s^s}{s!} \frac{1}{1-(1-\varepsilon)}} \\
&\sim \frac{s!}{s^s}\varepsilon.
\end{aligned}$$

et, en utlisant le corollaire précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\text{Taille du système}) &\sim \frac{s!\varepsilon}{s^s}\frac{s^{s+1}}{(s-1)!\varepsilon^2 s^2}\\ &\sim \frac{1}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Calculons maintenant le temps d'attente W d'un client, avant de commencer à être servi. Commençons par considérer un client supplémentaire qui arrive de l'extérieur dans le système en équilibre. Si ce client trouve $n+s$ autres clients dans le système quand il arrive, il lui faudra attendre que $n+1$ temps de service se terminent. Ceci a la loi de la somme de $n+1$ v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $s\mu$, c'est à dire une loi $\Gamma(s\mu, n+1)$. En conditionnant par la taille du système on obtient que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(W>t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(\text{Taille}=s+n)\mathbf{P}(W>t/\text{Taille}=s+n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\pi_{s+n}\frac{(s\mu)^{n+1}}{n!}\int_t^{+\infty}x^n e^{-\mu s x}\,dx\\ &= \pi_0\frac{\rho^s}{s!}\int_t^{+\infty}e^{-\mu s x}\sum_{n\geq 0}(\frac{\rho}{s})^n\frac{(s\mu)^{n+1}x^n}{n!}\,dx\\ &= \pi_0\frac{\rho^s}{s!}s\mu\int_t^{+\infty}e^{-\mu s x}e^{\rho\mu x}\,dx\\ &= s\pi_0\frac{\rho^s}{s!}\frac{1}{(s-\rho)}e^{t\mu(s-\rho)}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\mathbf{P}(W>0)=\pi_0\frac{\rho^s}{(1-\rho/s)s!}$ et que

$$\mathbf{P}(W>t/W>0)=e^{-t\mu s(1-\rho/s)}.$$

Cette loi conditionnelle est donc une loi exponentielle. On voit donc que la loi $\mathbf{P}_W$ de W s'écrit

$$\mathbf{P}_W=(1-\alpha)\,\delta_0+\alpha m$$

où $\alpha=\pi_0\frac{\rho^s}{(1-\rho/s)s!}$ et m est la loi exponentielle de paramètre $\mu s(1-\rho/s)$. Si U est le temps total pendant lequel le client reste dans le système, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(U) &= \mathbf{E}(W)+\frac{1}{\mu}\\ &= \mathbf{E}(W/W>0)\mathbf{P}(W>0)+\frac{1}{\mu}\\ &= \frac{\pi_0}{\mu(s-\rho)}\frac{\rho^s}{(1-\rho/s)s!}+\frac{1}{\mu}\end{aligned}$$

On en déduit:

Corollaire 6.3.6 (Formule de Little)

$$\lambda \mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(\mathit{Taille}).$$

Tout ceci reste vrai pour les clients réels du système. A titre d'exercice, on pourra comparer les performances d'une file $M/M/2$ avec deux serveurs au taux μ et une file $M/M/1$ avec un serveur deux fois plus efficace, c'est à dire au taux 2μ (les taux d'arrivée étant les mêmes).

6.4. Autres exemples de files markoviennes

6.4.1. La file $M/M/\infty$.

Pour la file $M/M/\infty$ il y a un nombre infini de serveurs. Tout client est immédiatement servi et personne n'attend. Si λ est le taux des arrivées et μ le taux des services, le générateur du processus $X_t =$ "taille du système à l'instant t" vérifie:

$$\begin{aligned} A(n, n+1) &= \lambda \\ A(n, n-1) &= n\mu \ \text{ si } n > 0. \end{aligned}$$

C'est encore un processus de naissance et mort et on voit immédiatement que, si $\rho = \lambda/\mu$,

Proposition 6.4.1 *Le processus X_t est récurrent positif de probabilité invariante $\pi_n = \frac{1}{n!}\rho^n e^{-\rho}$.*

6.4.2. La file $M/M/1/k$.

On part du modèle $M/M/1$ mais il y a une salle d'attente de capacité limitée à k clients. Si cette salle est pleine, les nouveaux clients sont rejetés hors du système et disparaissent. On a nécessairement $0 \leq X_t \leq k+1$. L'espace des états est donc $E = \{0, 1, \cdots, k+1\}$. Le générateur vérifie

$$\begin{aligned} A(n, n+1) &= \lambda \ \text{ si } \ n \leq k; \\ A(n, n-1) &= \mu \ \text{ si } \ n \geq 1; \end{aligned}$$

les autres termes non diagonaux étant nuls. On trouve facilement que:

Proposition 6.4.2 *Soit $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, le processus X_t est récurrent positif de probabilité invariante $\pi_n = C\rho^n$ si $n \in E$, avec $C = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+2}}$ si $\rho \neq 1$ et $C = \frac{1}{k+2}$ si $\rho = 1$.*

6.4.3. File avec rejet: $M/M/s/0$

Reprenons une file $M/M/s$ mais supposons que lorsque tous les serveurs sont occupés, tout nouveau client est rejeté. C'est par exemple le cas des centraux téléphoniques. On appelle parfois cette file d'attente file d'Erlang. La taille du système X_t est alors $\leq s$, donc l'espace des états est $E = \{0, 1, \cdots, s\}$. Le générateur vérifie:

$$\begin{aligned} A(n, n+1) &= \lambda \text{ si } n < s \\ A(n, n-1) &= n\mu \text{ si } 0 < n \leq s. \end{aligned}$$

On a encore facilement:

Proposition 6.4.3 *Le processus X_t est récurrent positif de probabilité invariante*

$$\pi_n = C\frac{1}{n!}\rho^n \quad si\ 0 \leq n \leq s.$$

On en déduit

Corollaire 6.4.4 (Première formule d'Erlang) *En régime stationnaire*

$$\mathbf{P}(\textit{Un nouveau client est rejeté}) = \frac{\rho^s}{s!(1 + \rho + \cdots + \rho^s/s!)}.$$

6.4.4. Une file avec découragement

On considère une file $M/M/1$, de paramètres λ et μ, modifiée de la façon suivante: lorsqu'un nouveau client s'approche du système et voit une file trop longue il a tendance à se décourager et à repartir. Plus, précisément, si il voit devant lui n personnes dans le système il repart avec probabilité $\frac{n}{n+1}$, et ceci indépendamment des autres évènements. On vérifie facilement que:

Proposition 6.4.5 *La taille du système (X_t) est un processus de Markov dont le générateur A vérifie:*

$$\begin{aligned} A(n, n+1) &= \frac{1}{n+1}\lambda \\ A(n, n-1) &= \mu \quad si\ 0 < n. \end{aligned}$$

Il est toujours récurrent positif de probabilité invariante $\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$.

Il est important de comprendre comment on détermine $A(n, n+1)$: une façon de faire est la suivante: lorque $t \to 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_t = n+1/X_0 = n) &= \mathbf{P}(X_t = n+1, \text{un seul saut du processus} \\ &\qquad \text{avant } t/X_0 = n) + o(t) \\ &= \mathbf{P}(\text{Un nouveau client s'approche du système avant } t \\ &\qquad \text{et il décide de rejoindre la file}/X_0 = n) + o(t) \\ &= \mathbf{P}(\text{Un nouveau client s'approche du système avant } t). \\ &\qquad \mathbf{P}(\text{ il décide de rejoindre la file}/X_0 = n) + o(t) \\ &= (\lambda t)\frac{1}{n+1} + o(t), \end{aligned}$$

donc $A(n, n+1) = \lambda \frac{1}{n+1}$.

6.5. Le processus des sorties

Considérons une file d'attente dont les arrivées dans le système (c'est à dire les instants t tels que $X_t = X_{t^-} + 1$ forment un processus de Poisson de paramètre λ et tel que la taille du système X_t est un processus de naissance et mort récurrent positif. L'exemple typique est la file $M/M/s$. A l'équilibre, le processus (X_t) est réversible, et donc de même loi que le processus (X_{-t}). Chaque entrée d'un client dans le système correspond à un saut de taille $+1$ de X_t, c'est à dire à un saut de taille -1 du processus (X_{-t}), donc à une sortie de ce processus. Puisqu'il a même loi que le processus initial on en déduit que le processus des sorties est aussi un processus de Poisson de paramètre λ. De plus, comme les arrivées après l'instant t sont indépendantes de $\sigma(X_s, s \leq t)$, on voit en retournant le temps que:

Théorème 6.5.1 *A l'équilibre, le processus des sorties est un processus de Poisson de paramètre λ et les sorties avant t sont indépendantes du futur $\sigma(X_s, s \geq t)$.*

Il est d'ailleurs un peu étonnant que le fait qu'il y ait eu beaucoup de sorties avant l'instant t n'influe pas sur la taille à l'instant t. Ceci n'est évidemment vrai qu'à l'équilibre. Considérons un réseau simple formé de deux files du type précédent en série. Notons $\pi_n, n \in \mathbf{N}$, et $\gamma_n, n \in \mathbf{N}$, les probabilités invariantes lorsque les flots d'entrée de chacun de ces deux systèmes pris isolément est un Poisson de paramètre λ. Soit X_t la taille de la première file et Y_t celle de la seconde. Il résulte du théorème qu'à l'équilibre, les entrées dans la deuxième file forment un Poisson de paramètre λ. Par ailleurs Y_t, qui ne dépend que des sorties avant t du processus (X_s), est indépendant de X_t. Il en résulte que, à l'équilibre, (X_t, Y_t) a pour loi la probabilité α sur $\mathbf{N}^2$ définie par $\alpha(n, m) = \pi_n \gamma_m$ pour tout $(n, m) \in \mathbf{N}^2$. En fait on peut trouver ceci directement par le calcul, comme on le verra au chapitre suivant car $Z_t = (X_t, Y_t)$ est un processus de saut markovien sur $\mathbf{N}^2$.

Chapitre 7

Réseaux de files d'attente

7.1. Introduction

Un grand atelier de réparation ou d'entretien est souvent modélisé par plusieurs files d'attente en interaction. On peut imaginer par exemple une première file conduisant à une "station" où est faite un diagnostic général. Ensuite, le "client" va faire réparer successivement les diverses parties défaillantes. Il est possible que certaines stations de réparation soient visitées plusieurs fois. En fin de traitement, le client repasse à la première station. Il quitte le système si tout va bien, sinon retourne faire examiner ce qui reste en panne. Un système informatique est constitué d'éléments qui traitent plusieurs programmes (par exemple un site central CPU, une imprimante, ...). Chaque programme attend avant d'être traité que l'élément soit libre, ensuite il va se faire traiter par un autre élément, etc...

Nous nous intéressons dans cette partie aux réseaux constitué de plusieurs files d'attente. Un client peut très bien revenir à une file qu'il a déja visité. Ces réseaux peuvent être très compliqués, et on ne sait pas les traiter mathématiquement en général. Le plus souvent, seules des simulations sur ordinateur permettent de les étudier. Cependant, en 1957, Jackson a décrit une classe générale de réseaux qui admettent une modélisation markovienne. On peut en donner les conditions de stationarité et expliciter les probabilités invariantes. Ce sont les réseaux les plus utilisés en pratique.

Souvenons nous que l'on a vu un premier réseau très simple à la fin du chapitre précédent. On va retrouver, dans un cadre plus général, la forme produit de la mesure invariante que nous avons vue dans ce cas.

7.2. Description des réseaux de Jackson

Faute de temps, nous allons nous restreindre à la classe la plus importante de réseaux de Jackson. Ils sont constitués d'un nombre fini K de stations. Dans chacune des stations $i = 1, 2, \cdots, K$, il y a un seul serveur qui utilise des temps de service exponentiels de paramètre μ_i. Des clients peuvent arriver directement de l'extérieur du système à la station i suivant un processus de Poisson de paramètre $\alpha_i \geq 0$, le cas $\alpha_i = 0$ correspondant au cas où il n'y a pas de telle arrivée. A la sortie de la station i le client va immédiatement avec probabilité $p_{i,j}$ dans la station j, et avec probabilité $\beta_i \geq 0$ il sort définitivement du système. On a donc, pour tout $i = 1, \cdots, K$,

$$\beta_i + \sum_{j=1}^{K} p_{i,j} = 1.$$

On peut avoir $p_{i,i} > 0$. Les variables aléatoires représentant les temps de services, les intervalles d'arrivées de l'extérieur, les choix successifs des clients sont indépendants.

On dit que le réseau est fermé si il n'y a aucun échange avec l'extérieur (donc ni arrivée ni sortie: $\alpha_i = \beta_i = 0$, pour tout i). Sinon on dit qu'il est ouvert.

Soit $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \cdots, X_t^{(K)})$ le vecteur représentant l'état du système à l'instant t. $X_t^{(i)}$ est égal au nombre de clients en attente ou en train d'être servis à la station i. Notons $e_1, \cdots, e_K$ la base canonique de $\mathbf{R}^K$: $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots, 0)$. On se convainc que:

Proposition 7.2.1 *Le processus $X_t, t \in \mathbf{R}^+$, est un processus de Markov à valeurs dans $\mathbf{N}^K$ dont le générateur A vérifie:*

pour tous $i, j \in 1, 2, \cdots, K$, et $n = (n_1, \cdots, n_K) \in \mathbf{N}^K$,

$$\begin{aligned}
A(n, n + e_i) &= \alpha_i, \\
A(n, n - e_i) &= \mu_i \beta_i \quad \textit{si } n_i > 0, \\
A(n, n + e_j - e_i) &= \mu_i p_{i,j} \quad \textit{si } n_i > 0 \textit{ et } i \neq j,
\end{aligned}$$

les seuls autres termes non nuls étant les termes diagonaux $A(n, n), n \in \mathbf{N}^K$.

Par exemple, pour trouver $A(n, n - e_i)$ on s'intéresse à la probabilité qu'avant l'instant t (t petit), un client finisse de se faire servir à la station i puis décide de quitter le système. A un $o(t)$ près, un client finit de faire servir avec la probabilité $\mu_i t$ et quitte le système avec probabilité β_i. L'évènement cherché est donc égal à $\mu_i \beta_i\, t + o(t)$, ce qui donne $A(n, n - e_i)$.

7.3. Equation du trafic

La question principale est de savoir sous quelles conditions le processus X_t admet une probabilité invariante. Elle permettra éventuellement de décrire le réseau à l'équilibre. Imaginons qu'il existe une quantité $\lambda_i \geq 0$ représentant le flux de clients à la station i. A l'équilibre, le flot entrant est égal au flot sortant, ce qui conduit à l'équation suivante, dite **équation du trafic**,

$$\alpha_i + \sum_{j=1}^{K} \lambda_j p_{j,i} = \lambda_i,$$

où le vecteur $(\lambda_1, \cdots, \lambda_K)$ est à coordonnées positives ou nulles. Oubliant éventuellement l'origine intuitive de cette équation, nous allons voir qu'en effet elle possède une solution. Posons

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

En s'inspirant de l'exemple traité à la fin du chapitre précédent, on est amené à montrer:

Proposition 7.3.1 *Soit $C > 0$. La mesure π sur $\mathbf{N}^K$ définie par*

$$\pi_n = C \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i},$$

si $n = (n_1, \cdots, n_K)$ vérifie $\pi A = 0$.

Preuve: On a $A(n,n) = -\sum_{i=1}^{K}[\alpha_i + \mu_i(1-p_{i,i})\mathbf{1}_{n_i>0}]$, et

$$\begin{aligned}
\sum_{m\neq n} \pi_m A(m,n) = {} & \sum_{i=1}^{K}[\pi_{n+e_i}A(n+e_i,n) + \\
& +\pi_{n-e_i}A(n-e_i,n)\mathbf{1}_{n_i>0} + \sum_{j\neq i}\pi_{n-e_i+e_j}A(n-e_i+e_j,n)\mathbf{1}_{n_i>0}] \\
& = \pi_n \sum_{i=1}^{K}[\rho_i\mu_i\beta_i + \frac{1}{\rho_i}\alpha_i\mathbf{1}_{n_i>0} + \sum_{j\neq i}\frac{\rho_j}{\rho_i}\mu_j p_{j,i}\mathbf{1}_{n_i>0}] \\
& = \pi_n \sum_{i=1}^{K}[\lambda_i\beta_i + \frac{1}{\rho_i}\mathbf{1}_{n_i>0}(\alpha_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j p_{j,i})] \\
& = \pi_n \sum_{i=1}^{K}[\lambda_i\beta_i + \frac{1}{\rho_i}\lambda_i(1-p_{i,i})\mathbf{1}_{n_i>0}] \\
& = \pi_n \sum_{i=1}^{K}[\lambda_i\beta_i + \mu_i(1-p_{i,i})\mathbf{1}_{n_i>0}] \\
& = -\pi_n A(n,n)
\end{aligned}$$

car, en sommant sur i l'équation du trafic,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{K}\alpha_i &= \sum_{i=1}^{K}(\lambda_i - \sum_{j=1}^{K}\lambda_j p_{j,i}) = \sum_{i=1}^{K}\lambda_i - \sum_{j=1}^{K}\lambda_j\sum_{i=1}^{K}p_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{K}\lambda_i - \sum_{j=1}^{K}\lambda_j(1-\beta_j) = \sum_{i=1}^{K}\beta_i\lambda_i.
\end{aligned}$$

7.4. Réseaux ouverts

Nous allons maintenant considérer les réseaux ouverts. Nous supposons que la condition suivante est vérifiée:

Condition C: Pour tout $i, j \in \{1, \cdots, K\}$, il existe des entiers $m, r \geq 0$ tels que $(\alpha P^m)_i > 0$ et $(P^r \beta)_j > 0$.

On peut montrer que:

Lemme 7.4.1 *Sous la condition C, le processus X_t est irréductible.*

En effet, la condition $(\alpha P^m)_i > 0$ indique qu'il existe $i_1, i_2, \cdots, i_m$ tels que

$$\alpha_{i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{m-1},i_m} p_{i_{m-1},i} > 0.$$

Ceci assure qu'avec une probabilité non nulle, un client peut venir de l'extérieur et entrer dans le système à la station i_1, puis aller dans la station i_2, puis i_3,..., jusqu'à arriver en i. Autrement dit, le processus peut passer de tout état n en l'état $n + e_i$. L'autre condition assure que l'on peut aller de n à $n - e_j$ en faisant sortir le client présent en j, après avoir visité éventuellement r stations. Vidant d'abord complètement le système puis le remplissant, on passe de tout état à tout autre.

Par ailleurs

Lemme 7.4.2 *Sous la condition (C), l'équation du trafic a toujours une solution.*

Preuve: Considérons le processus markovien de saut sur $F = \{0, 1, \cdots, K\}$ de générateur B donné hors de la diagonale par:

$$B(i,j) = p_{i,j} \text{ si } j \neq 0,\ B(i,0) = \beta_i\ , B(0,i) = \alpha_i.$$

Puisque F est fini, ce processus a une probabilité invariante ν. Elle vérifie $\nu B = 0$, ce qui s'écrit, pour i fixé:

$$\nu_i \sum_{k \neq i} B(i,k) = \sum_{j \neq i} \nu_j B(j,i).$$

On en déduit, si $i \neq 0$,

$$\nu_i (1 - p_{i,i}) = \nu_0 \alpha_i + \sum_{j \neq i} \nu_j p_{j,i},$$

et si $i = 0$,

$$\nu_0 (\sum_{k=1}^{K} \alpha_k) = \sum_{i=1}^{K} \nu_i \beta_i.$$

Il en résulte que $\nu_0 \neq 0$ et que le vecteur de coordonnées $\lambda_i = \nu_i / \nu_0$ est solution de l'équation du trafic.

Théorème 7.4.3 *Considérons un réseau ouvert pour lequel la condition C est vérifiée et tel que pour tout $i = 1, \cdots, K$, $\rho_i < 1$. Le processus X_t est alors récurrent positif irréductible de probabilté invariante*

$$\pi_n = \prod_{i=1}^{K} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}.$$

Preuve: On a vu que $\pi A = 0$. Par ailleurs $\sum_{n \in \mathbf{N}^K} |A(n,n)| \pi_n$ est fini car les intensités $|A(n,n)|$ sont bornées. Le théorème résulte immédiatement de la proposition 5.4.4.

La condition $\rho_i < 1$, pour tout i est aussi nécessaire à l'existence d'une probabilité invariante. En effet, la mesure $m_n = \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i}$ vérifie $mA = 0$. Si le processus est récurrent, on sait que m est alors invariante. Par unicité, c'est la seule mesure invariante, à une constante près. Cette mesure n'est de masse finie que si $\rho_i < 1$, pour tout i.

On voit en particulier qu'à l'équilibre et à $t \geq 0$ fixé, les tailles des files à chaque station sont des v.a. indépendantes.

7.5. Réseaux fermés

Terminons par les réseaux fermés. Dans ce cas il n'y a ni entrée ni sortie de clients du système. Le nombre total de clients N est donc constant. Si on veut que X_t soit irréductible il faut donc choisir comme espace d'états l'ensemble fini $E_N = \{n \in \mathbf{N}^K ; \sum_{i=1}^{K} n_i = N\}$.

Lemme 7.5.1 *Pour les réseaux fermés, l'équation du trafic a une solution.*

Preuve: On voit que $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_K)$ est solution de l'équation du trafic dès que $\lambda P = \lambda$. Il suffit donc de prendre une probabilité invariante de la chaîne de Markov à temps discret de noyau P.

Théorème 7.5.2 *On suppose que le système est fermé et que la matrice de transition P est irréductible. Alors, pour tout $N \in \mathbf{N}$ le processus X_t admet sur E_N l'unique probabilité invariante π définie par*

$$\pi_n = C \prod_{k=1}^{K} \rho_k^{n_k}$$

$n \in E_N$, où C est la constante qui fait de π une probabilité.

Preuve: L'espace étant fini, il suffit de vérifier que X_t est irréductible.

7.6. Le processus des sorties

Considérons un réseau ouvert à l'équilibre, et décrivons le processus des sorties définitives du système. Pour cela, nous allons commencer par décrire le processus retourné dans le temps $(X(-t)$. On sait qu'à l'équilibre, $X(-t), t \in \mathbf{R}$, (ou plutot sa version continue à droite) est un processus de saut de générateur $\tilde{A}$ défini par,

$$\pi(n)\tilde{A}(n,m) = \pi(m)A(m,n),$$

pour tout $m, n \in \mathbf{N}^K$. En utilisant l'expression de π, on voit que

$$\begin{aligned} \tilde{A}(n, n+e_i) &= \lambda_i\beta_i, \\ \tilde{A}(n, n-e_i) &= \frac{\alpha_i}{\rho_i}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}}, \\ \tilde{A}(n, n-e_i+e_j) &= p_{j,i}\frac{\lambda_j}{\rho_i}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}}. \end{aligned}$$

On voit donc que ce processus correspond à un réseau de caractéristiques en général différentes du réseau initial (qui n'est alors pas réversible). Comme les sorties du réseau initial correspondent aux entrées du réseau retourné, on en déduit que:

Proposition 7.6.1 *Les sorties définitives suivent des processus de Poisson indépendants de paramètre $\lambda_i\beta_i, i = 1, \cdots, K$.*

Par contre les sorties intermédiaires d'une station à une autre ne sont en général pas poissoniennes. Traitons un exemple (pouvant modéliser les mouvements des cleients à un comptoir de café). Des clients arrivent de l'extérieur suivant un processus de Poisson de paramètre α. Le temps de service est de loi exponentielle de paramètre μ. Une fois servi, le client sort avec probabilité q et revient dans la file avec probabilité $p = 1 - q$. L'équation du trafic est

$$\lambda = \alpha + p\lambda$$

d'où $\lambda = \alpha/q$. Supposons que $\rho = \lambda/\mu$, auquel cas il y a une unique probabilité invariante $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$. A l'équilibre, les sorties définitives forment un processus de Poisson de paramètre α/q. Calculons par contre, toujoours à l'équilibre, le temps d'interarrivée D entre deux clients à la station (comptant aussi bien les nouveaux que ceux qui reviennent). A un instant donné, 0 par exemple, un client arrive. Le nombre de clients qu'il trouve dans le système est de loi π (propriété dite PASTA). Alors D vérifie:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D > t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n \mathbf{P}(D > t / X_0 = n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n \mathbf{P}(\text{le prochain client venant de l'extérieur arrive après le temps } t, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \text{et les clients dans le système ne reviennent pas avant} \\
& \qquad \text{le temps } t/X_0 = n+1) \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\pi_n \mathbf{P}(\text{Les } n+1 \text{ clients du système ne reviennent pas avant } t) \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\pi_n \{\mathbf{P}(\text{Les } n+1 \text{ clients quittent le système}) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{P}(\text{Les clients no } 1, 2, \cdots, j-1 \text{ quittent le système,} \\
& \qquad \text{le client } j \text{ revient après } t)\} \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\rho^n (1-\rho) \left[q^{n+1} + \sum_{j=\mu}^{n+1} q^{j-1} p \int_t^{+\infty} \mu e^{-\mu s} \frac{(\mu s)^{j-1}}{(j-1)!}\, ds \right] \\
= & e^{-\alpha t}(1-\rho) \left[(q \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho q)^n) + p \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \rho^n q^j \int_t^{+\infty} \mu e^{-\mu s} \frac{(\mu s)^j}{j!}\, ds \right] \\
= & e^{-\alpha t}(1-\rho) \left[\frac{q}{1-\rho q} + p \frac{1}{1-\rho} \int_t^{+\infty} \mu e^{-\mu s} e^{\rho q \mu s}\, ds \right] \\
= & e^{-\alpha t}(1-\rho) \left[\frac{q}{1-\rho q} + p \frac{1}{1-\rho} \int_t^{+\infty} \mu e^{-\mu s} e^{\rho q \mu s}\, ds \right] \\
= & e^{-\alpha t} \left(\frac{\mu q - \alpha}{\mu - \alpha} \right) + e^{-\mu t} \frac{p\mu}{\mu - \alpha}.
\end{aligned}
$$

cette loi n'est pas une loi exponentielle (mais un mélange d'exponentielles).

Table des matières