UPMC 2016-2017 Licence L3 - 3M290

Examen du 11 mai 2017. Durée 2h.
Sans documents ni calculatrice ni portable.

Notations :

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
L'ensemble Ω est muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et d'une probabilité $\mathbb{P}$.
v.a. signifie variable aléatoire.
$\mathbb{E}(U)$ désigne l'espérance de la v.a. U.
$\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Questions de Cours.

1) Donner la définition de la fonction de répartition d'une v.a. X.

2) Quand dit-on qu'une v.a. X possède la densité φ ?

3) Enoncer la loi forte des grands nombres.

Exercice 1. On note D le disque ouvert de rayon 1 c'est-à-dire l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\, x^2 + y^2 < 1\}$. On considère le vecteur aléatoire (X, Y) de densité $\frac{1}{\pi} 1_D(x,y)$.

1) Déterminer la loi de X et celle de Y.

2) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

3) On considère $(R, \Theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[$ tel que $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$.

a) Vérifier que l'application f de $]0,1[\times]0,2\pi[$ dans D définie par $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est bien un changement de variable de $]0,1[\times]0,2\pi[$ dans D.

b) Déterminer la loi du couple (R, Θ). *Indication :* on pourra remarquer que d'après la question 3) a) l'application h de D dans $]0,1[\times]0,2\pi[$ définie par $h(x,y) = (r,\theta)$ est aussi un changement de variable.

c) Les v.a. R et Θ sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer les lois des v.a. R et Θ.

Exercice 2.
Dans cet exercice Z désigne une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1. On considère deux réels a et b strictement positifs.

1) Déterminer la loi de la v.a. $X = bZ^{\frac{1}{a}}$.

2) a) Pour tout réel t, calculer $\mathbb{P}(X \leq t)$ que l'on note $F(t)$.

b) Montrer que $1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t r(u)du}$ où $r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ pour tout réel $t > 0$.

Exercice 3.
Dans cet exercice X désigne une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que X et $-X$ ont la même loi. On suppose que $\mathbb{P}(X > x)$ est équivalent à $\frac{\alpha}{x^\lambda}$ lorsque $x \to +\infty$ où α et λ sont strictement positifs. On note $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi que X.

On définit $Z_n = n^{-1/\lambda} \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.

1) Montrer que pour tout $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = 0$.

2) Montrer que pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^{-\lambda}}$.

3) a) Montrer que la fonction définie par $F(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^{-\lambda}}$ pour $x > 0$ et $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$ est la fonction de répartition d'une v.a. Cette v.a. possède-t-elle une densité ? Si oui, préciser cette densité.

b) Déduire de 1) et 2) un résultat de convergence sur la suite (Z_n). On indiquera de quel type de convergence il s'agit et on justifiera avec soin.