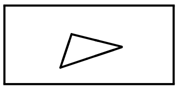
Probabilités 2012
Unité d'enseignement MM052
Année universitaire 2011-2012, deuxième semestre
Omer Adelman

MM052 : ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉS

Évidence

Le périmètre d'un triangle inclus dans un rectangle est majoré par le périmètre du rectangle.

Ce fait évident n'a manifestement rien à voir avec les probabilités. Quelle idée d'en parler ici ?



(« Explication » dans quelques pages.)

Présentation

Le descriptif qui se trouve dans la brochure du M1 est sommaire. Les lignes ci-dessous constituent une petite explication de texte.

« Éléments de probabilités »

Nous aborderons la théorie de probabilités à travers quelques éléments « de base », éléments dont certains ne seront qu'effleurés. Si des étudiants manifestent leur désir de voir plus de choses, des pistes susceptibles de les intéresser seront signalées.

« notamment lorsqu'ils sont futurs agrégatifs »

Les étudiants qui envisagent une candidature pour l'année scolaire 2012-2013 pourront suivre une préparation spécifique (qui fait partie du M2). Cette préparation comporte un enseigement de probabilités (concernant en particulier la partie *analyse* et la partie *modélisation* du concours), enseignement auquel il convient d'arriver avec quelques armes. Le MM052 peut aider à acquérir de telles armes.
On peut évidemment suivre l'UE MM052 *sans* penser à l'agrégation.

« Prérequis : aucun... »

Là, il faut décoder ; et un étudiant en M1 se doit de comprendre que les mots « prérequis : aucun » ne l'autorisent pas à ignorer que deux et deux font quatre. Une connaissance correcte de ce qui est enseigné en L1 ($\simeq$ première année de l'ancien deug), par exemple, pourrait rendre service.
Est-ce indispensable d'avoir un cours d'intégration dans son bagage ?
Eh bien, des connaissances en intégration ne feront du mal à personne. Cela dit, même après avoir suivi un cours d'intégration avec amour et passion, peu d'étudiants maîtrisent le sujet, et nous allons devoir faire comme si personne ne connaissait l'intégrale de Lebesgue.

Certainement plus important que la familiarité avec telle théorie ou telle technique spécifique : curiosité, sens mathématique, esprit ouvert.

« Thèmes : lois de probabilités... »

Ce que nous allons voir n'est qu'un échantillon de ce qu'offrirait un cours « complet ».
Nous verrons des *exemples*, nous affronterons des situations *concrètes*, nous calculerons des probabilités et des probabilités *conditionnelles*, des espérances et des espérances *conditionnelles*. Nous étudierons le comportement asymptotique de certaines familles de variables aléatoires. Il nous arrivera de nous intéresser à ce que tel problème a de général, d'abstrait ou de « structurel » ; mais chaque décollage sera suivi d'un atterrissage et, si tourisme il y a, cela se fera plus à pied qu'en car ou en avion. L'accent sera mis sur les aspects authentiquement probabilistes des problèmes rencontrés.

Programme envisageable :
exemples de calculs de probabilités demandant peu de théorie ;
lim sup ;
espaces mesurés, fonctions mesurables, intégrale ; espaces probabilisés, variables aléatoires, espérance ;
conditionnement (et indépendence) ;
Borel-Cantelli ;
lois « usuelles » ;

ensembles aléatoires, familles de variables aléatoires ;
exemples, exemples, exemples (marches aléatoires, Poisson, branchements...) ;
loi zéro-un (de Kolmogorov) ; la martingale $t \mapsto \mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}_t)$;
convergence en probabilité, convergence presque sûre, loi(s) de grands nombres ; théorème ergodique ;
convergence en loi, théorème central ;
chaînes de Markov ;
les mêmes exemples (et d'autres exemples encore) vus avec plus de théorie et de technique ;
tour(s) de cartes ; quelques jeux de hasard avec ou sans hasard ;
plus si affinité (et temps), *moins* dans le bien plus probable cas contraire.

Bon, c'est probablement un peu trop – et encore n'y voit-on pas tout ce que j'ai oublié (ou laissé de côté intentionnellement). Cela dit, loin de moi l'idée de priver les amateurs de listes de quoi que ce soit ; et, puisque j'ai sous la main un livre de probabilités, je vous livre la liste de ses chapitres.

1 Introduction – phénomènes aléatoires
2 Axiomes des probabilités
3 Probabilités conditionnelles et indépendance
4 Probabilités sur un espace fini ou dénombrable
5 Variables aléatoires sur un espace fini ou dénombrable
6 Construction d'une mesure de probabilité
7 Probabilité sur $\mathbb{R}$ et fonction de répartition
8 Variables aléatoires
9 Intégration par rapport à une mesure de probabilité
10 Variables aléatoires indépendantes
11 Lois de probabilité sur $\mathbb{R}$
12 Probabilité sur $\mathbb{R}^n$
13 Fonctions caractéristiques
14 Propriétés des fonctions caractéristiques
15 Sommes de variables aléatoires indépendantes
16 Variables aléatoires gaussiennes
17 Convergence des variables aléatoires
18 Convergence en loi
19 Convergence en loi et fonctions caractéristiques
20 La loi des grands nombres
21 Le théorème limite-central
22 L^2 et les espaces de Hilbert
23 Espérance conditionnelle
24 Martingales
25 Surmartingales et sous-martingales
26 Les inégalités de martingales
27 Les théorèmes de convergence de martingales
28 Le théorème de Radon-Nikodym

Suggestions

Qu'est-ce qu'on tape sur son moteur de recherche préféré quand on veut flâner sur la toile probabiliste ?
On a l'embarras du choix :
« `probabilites` »,
« `"cours de probabilites"` »,
« `agregation probabilites` »,
« `"introduction aux probabilites"` »,
« `proba` »,
« `tribu probabilite` »,
et cætera (et ce sans parler de tout ce que la toile offre en anglais et dans toutes les autres langues).
Faites-le, cliquez ensuite sur quelques-uns des liens qui ne vont pas tarder à s'afficher, et vous allez pouvoir vous amuser (ou souffrir, ou dormir) toute la nuit.

Je recommence.
Le cours ne débute qu'en janvier. Mais si vous avez un peu de temps et l'intention de ne pas le perdre à ne rien faire, vous pouvez chercher des choses sur la toile, imprimer trois ou quatre documents et en étudier deux ou trois. Vous pouvez passer un moment dans une bibliothèque (au pied de la tour 46, par exemple, notamment face aux rayons 519 à 519.223), feuilleter quelques livres, en sélectionner un ou deux et y étudier quelques passages (sans forcément vous limiter aux deux premiers chapitres). Vous pouvez même faire quelques exercices. Etc.

Vous pouvez, bien entendu, ne rien faire de tout cela.

Notes

En ce qui concerne l'attribution de la note du contrôle continu, voici mes intentions (à ne pas confondre avec *engagement*). Au début du semestre, nous tâcherons de fixer des dates pour, disons, deux examens partiels, le partiel 1 arrivant à peu près à mi-course et le pariel 2 portant sur la totalité du semestre. Le partiel i donnant lieu à la note p_i, il aurait été raisonnable de prendre pour note du contrôle continu la moyenne des p_i, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$. Voici un algorithme légèrement plus généreux. À la fin du semestre, vous aurez la joie de passer l'examen. La note de l'examen étant e, nous pouvons poser

$$\pi_1 = \max\{p_1,\, p_2,\, e\}, \qquad \pi_2 = \max\{p_2,\, e\}$$

puis prendre pour note du contrôle continu

$$\frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2).$$

L'attitude et la participation en classe seront prises en compte (positivement) ; mais, pour cela, je n'ai pas de formule.

Questions (et réponses)

Question. J'ai des notes « moyennes ». Ai-je mes chances dans cette unité d'enseignement ?

Réponse. Si vous avez une maîtrise raisonnable de ce qui vous a été enseigné durant les trois ou quatre dernières années, si vous pouvez là, à l'instant, sans aucune préparation (et sans recours à de la fraude), vous en tirer avec une assez bonne note d'à peu près n'importe quel examen de L1 et avec une note pas trop honteuse de deux ou trois examens de L2 ou de L3 et si, en plus, vous êtes disposé à adopter une routine de travail appropriée, alors oui, il y a une chance pour que vous ayez vos chances.

Question. Je suis télé-étudiant. Ai-je mes chances dans cette unité d'enseignement ?

Réponse. Oui – mais probablement un peu moins que les étudiants qui viennent en classe deux fois par semaine (et ce n'est pas une particularité de l'UE MM052).
Les télé-étudiants n'arrivent pas toujours à s'imposer la discipline qui leur permettrait de réussir. Rien n'est plus facile – surtout pour un télé-étudiant – que de remettre tout travail au lendemain ; et le lendemain se déplace de jour en jour ; et les télé-étudiants ont la paix. (Bien entendu, si un étudiant qui n'est *pas* télé-étudiant veut avoir la paix, personne ne va l'en priver.)
Bref, à niveau égal au départ et à intelligence égale, pour qu'il y ait égalité à l'arrivée (c'est-à-dire, le jour de l'examen) avec les autres étudiants, le télé-étudiant doit probablement travailler encore plus qu'eux pour pallier l'absence d'interactivité avec la classe et l'enseignant. Le laisser-aller ne pardonne pas. Il faut une bonne organisation, il faut de la discipline, il faut avoir des dispositions que tout le monde n'a pas.
Cela dit, il m'est arrivé d'avoir des télé-étudiants qui ont réussi, et même bien réussi.

Question. J'ai du temps. Vos suggestions de la pages précédentes, c'est gentil. Mais ne pourriez-vous pas donner quelques référence *précises* ?

Réponse. Vous pouvez lire Loïc Chaumont (cherchez un document intitulé « Présentation de la théorie des probabilités ») et peut-être Alexis Devulder, si vous trouvez son exposé *Probabilités et statistiques : un bref aperçu*.

Voici quelques autres liens cliquables et qui fonctionnent en septembre 2011.

Des étudiants m'ont dit du bien du site bacamaths. On peut y voir ou revoir des choses abordées au lycée, faire un tour du côté de la première et cliquer sur les trois liens en rapport avec les probabilités puis regarder ce qui se fait (ou pas) en terminale et cliquer, là aussi, sur les quelques liens en rapport avec les probabilités.

Pas tout aussi français (so what?), Grinstead and Snell's *Introduction to Probability* est bien plus volumineux. Cela se trouve ici (mais pas là) ou encore sur la page web de Peter Doyle, où l'on trouvera également l'excellent *Random walks and electric networks* de Peter G. Doyle et J. Laurie Snell.

Si vous êtes intéressés par les « fondements » des probabilités (et des statistiques, et par la polémique qui va avec), vous pouvez vous tourner vers les trois premiers chapitres d'un document assez spécial de la plume d'Edwin Thompson Jaynes, *Probability Theory: The Logic of Science*.

Si vous voulez voir des exercices (ou des exercices corrigés), vous pouvez y arriver en suivant Barbara Schapira, par exemple.

Trois livres d'introduction très faciles à lire (quelques trajets dans le metro devraient suffire pour chacun des trois) : Benoît Rittaud, *Hasard et probabilités* ; Richard Isaac, *Une initiation aux probabilités* ; Alan Ruegg, *Probabilités et statistique*.

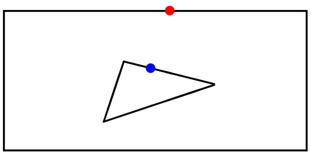
Tout cela est évidemment trop ; mais si vous n'en faites qu'une bouchée et vous en voulez plus, écrivez-moi, je vous ferai d'autres recommandations.

Si vous voulez replonger sur le programme du L1, je vous recommande le site M@ths en L1gne. Les beaux documents qui s'y trouvent ont pour auteurs Bernard Ycart et ses collaborateurs Jean-Pierre Demailly, Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Didier Piau.

« Explication » Revenons, comme promis, au fait mentionné au début de ce document, fait évident n'ayant manifestement rien à voir avec les probabilités.
Manifestement ?
Attention : nous sommes en pays mathématique, pays où le jugement hâtif l'est parfois trop. Avant de déclarer notre assertion officiellement et définitevement étrangère aux probabilités, jetons un rapide coup d'œil sur deux ou trois idées de preuve.

Rapide coup d'œil sur une idée impressionniste d'une première preuve

On fait le tour du triangle avec un point bleu. Pendant ce temps, le bord du rectangle est balayé par un point rouge qui se trouve sur la demi-droite partant du point bleu vers l'extérieur du triangle pérpendiculairement au bord du triangle. Lorsque la perpendiculaire au bord du triangle n'est pas bien définie, ce n'est pas une tragédie, cela ne concerne que les trois sommets, on se débrouille de façon appropriée. On constate que la longueur de tout segment tracé en bleu est majorée par la longueur de l'arc rouge correspondant.



Observant les points colorés évoluer, sauriez-vous dire s'il sont en train de nous jouer le scénario 1 ci-dessus ou s'ils suivent plutôt le scénario 2 ci-après ?

Furtif coup d'œil sur une idée impressionniste d'une deuxième démonstration

Cette fois, un point rouge fait le tour du rectangle. À tout instant, il existe exactement *un* point du triangle à distance minimale du point rouge, un point bleu qui se trouve sur le bord du triangle. Or tout arc rouge est au moins aussi long que l'arc bleu correspondant (pourquoi ?), et un tour rouge complet du rectangle induit un tour bleu complet du triangle.

Idée impressionniste d'une troisème approche

Une ligne droite – appelons-la D – traverse le Sahara de part en part, le coupant en deux parties aussi étendues que parfaitement planes. (La rotondité de la terre, nous n'en avons jamais entendu parler : le terre est plate !) Vous êtes dans un petit monomoteur, à mille mètres au-dessus du grand désert. Votre pilote, Antoine (bien entendu), vous prie gentiment de bien vouloir alléger un peu l'aéroplane, sans quoi vous risquez une chute de cheveux et de tout votre corps avec. Puisque vous êtes en train de lire la page que vous êtes en train de lire imprimée sur une feuille de format A4, soit un seizième ($= (1/2)^4$) de mètre carré pour chacune des deux faces de la feuille, c'est cette feuille que vous allez jeter par la fenêtre, pensant perdre ainsi 5 ($= (1/2)^4 \times 80$) grammes et gagner un peu de vie. Pendant sa douce descente, la feuille tournera en tous sens, et elle finira par se poser à plat sur le sol saharien dans une orientation imprévisible que nous pouvons supposer aléatoire et uniforme. Indépendamment de l'orientation, la feuille se sera déplacée par rapport à la verticale de plusieurs dizaines voire de plusieurs milliers de mètres dans un sens peu prévisible.

La probabilité pour que la feuille tombe sur la droite D est infime. Le nombre de points de rencontre entre la droite D et le segment S que vous avez distraitement tracé sur la feuille sera très probablement nul, il vaudra 1 avec une probabilité toute petite, et la probabilité pour qu'il soit strictement supérieur à 1 vaut zéro. Nommant N_S le nombre aléatoire dont nous venons de parler, son espérance $\mathbb{E}(N_S)$ vaut exactement $\mathbb{P}(N_S = 1)$ et est proportionnelle à la longueur $L(S)$ du segment S.

Notant N_T le nombre de points que le bord de notre triangle aura en commun avec la droite D et $L(T)$ le périmètre du triangle, c'est à dire, la longueur de son bord, on a :

$$\frac{\mathbb{E}(N_T)}{\mathbb{E}(N_S)} = \frac{L(T)}{L(S)}$$

Remplaçons, dans la dernière phrase, le mot « triangle » par le mot « rectangle » et le T par un R, faisons un petit effort pour comprendre ce que sont N_R et $L(R)$ sans que personne n'en aie donné une définition, et observons que

$$\frac{\mathbb{E}(N_R)}{\mathbb{E}(N_S)} = \frac{L(R)}{L(S)}$$

puis, en combinant les deux égalités ci-dessus, déduisons que

$$\frac{\mathbb{E}(N_T)}{\mathbb{E}(N_R)} = \frac{L(T)}{L(R)}$$

Mais, en dehors d'un évènement négligeable, $N_T \leqslant N_R$. (Plus précisément, en dehors d'un évènement négligeable, lorsque $N_T > 0$, on a $N_T = N_R = 2$.) On en déduit que $\mathbb{E}(N_T) \leqslant \mathbb{E}(N_R)$ et, partant, que $L(T) \leqslant L(R)$.

Commentaire

Premièrement, il ne faut pas jeter de papier par la fenêtre. Cela dit, la pollution consécutive à un tel méfait est certainement moindre que celle résultant de la chute de l'avion tout entier avec la feuille en plus (et n'oublions pas que le papier est passablement biodégradable).

Parlons maintenant un instant de N_T et co. Pourquoi n'avoir pas dit explicitement que

$$\mathbb{P}(N_R = N_T = 0 \;\text{ ou }\; N_T = 0 < N_R = 2 \;\text{ ou }\; N_T = N_R = 2) = 1,$$

ou encore que $\mathbb{E}(N_T) = 2\mathbb{P}(N_T > 0)$ et que, de même, $\mathbb{E}(N_R) = 2\mathbb{P}(N_R > 0)$?
Plaidoyer possible : il n'était pas nécessaire de le dire. J'en dirai peut-être quelques mots de plus au cours de l'enseignement. De toute façon, il faudra bien y revenir, puisque toutes ces histoires parlant de N_R comme si c'était une vraie variable aléatoire ayant une espérance bien définie et tout, cela demande à être converti en quelque chose de rigoureux (et nous verrons deux formalisations possibles).

L'énoncé que nous avons considéré parle d'un rectangle et d'un triangle, vous pouvez sûrement inventer des énoncés tout aussi valides mais un peu plus généraux portant, par exemple, sur le bord de n'importe quel convexe non vide inclus dans tel ensemble plan borné (convexe également, si cela vous rassure). Vous pouvez aussi imaginer une adaptation de tout cela à l'espace euclidien de dimension 3 (ou 17) – et vous pouvez même tenter de vous affranchir du cadre euclidien.

Il est temps de conclure : un éléphant et un boa, pardon, un triangle et un rectangle, c'est on ne peut plus probabiliste, surtout quand l'autre inclut l'un. L'affirmation « la probabilité est partout » est certes discutable, mais il est indéniable que la probabilité se manifeste souvent là où on ne l'attend pas ; et, quand elle ne se manifeste pas, elle est fréquemment là quand-même, cachée – mais bien présente.

Omer Adelman

`http://www.proba.jussieu.fr/~adelman`

`x@upmc.fr   (x = omer.adelman)`