

## CHAINES de MARKOV

*Durée 3 heures. Les trois parties sont indépendantes. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Tous documents autorisés, pas les téléphones!*



### EXERCICE

Soient  $a, b \in ]0, 1[$  et la matrice stochastique

$$Q = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

1. Calculer les coefficients d'ergodicité  $\beta(Q)$  et  $\alpha(Q)$ , vérifier qu'ils sont égaux; on notera  $\beta$  leur valeur commune.
2. Vérifier que

$$Q^n = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix} + \rho^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -1+p & 1-p \end{pmatrix}$$

pour des constantes  $p$  et  $\rho$  que l'on exprimera en fonction de  $a, b$ . Comparer  $\beta$  et  $\rho$ .

3. Calculer la valeur de  $\|Q^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{var}}$ . L'inégalité du couplage (qui majore cette quantité en terme de  $\beta$ , cf le cours) est-elle précise dans le cas présent? (Distinguer deux cas)

### PROBLEME I

Une machine se met en marche à l'instant 0 et possède une durée de vie aléatoire  $X_1$  qui est une variable aléatoire entière  $> 0$  de loi  $(p(x); x \geq 1)$ . On suppose  $p(x) > 0 \forall x \geq 1$ . À l'instant où elle tombe en panne, la machine est remplacée par une seconde machine de durée de vie  $X_2$ , et ainsi de suite. Les durées de vie successives  $X_1, X_2, \dots$  sont supposées indépendantes et de même loi. On posera  $S_0 = 0$  et pour tout  $n > 0$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

On désigne par  $A_t$  l'âge de la machine en fonctionnement à l'instant  $t \in \mathbb{N}$ . On convient que si une machine tombe en panne précisément à l'instant  $t$ ,  $A_t$  désigne alors l'âge de sa remplaçante et vaut donc 0. Notons que  $A_0 = 0$ .

1. On définit  $\nu_t$  le numéro (aléatoire) de la machine en fonctionnement à l'instant  $t$ . Pour  $n \geq 1$ , exprimer l'événement  $\{\nu_t = n\}$  à l'aide des variables  $S = (S_n)_n$  et en déduire l'expression de  $A_t$  en fonction des variables  $S$  et de  $\nu_t$ .
2. Montrer que la suite  $(A_t, t \geq 0)$  est une chaîne de Markov, et déterminer ses probabilités de transition.
3. Montrer que cette chaîne est irréductible, récurrente. Existence et valeur de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq t \leq n} \mathbf{1}_{\{A_t = k\}} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

## PROBLEME II

On se donne un réel  $p_x \in ]0, 1[$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , et on pose

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \prod_{i \in \{1, \dots, x\}} \frac{1 - p_i}{p_i} \quad \text{pour } x \geq 1, & \gamma_0 &= 1, \\ \gamma_x &= \prod_{i \in \{x+1, \dots, 0\}} \frac{1 - p_i}{p_i} \quad \text{pour } x \leq -1 \end{aligned}$$

On considère la chaîne de Markov  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  avec pour tout  $x$ ,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x + 1 | X_n = x) = p_x, \quad \mathbf{P}(X_{n+1} = x - 1 | X_n = x) = 1 - p_x$$

1. Déterminer l'unique mesure réversible  $\pi$  telle que  $\pi(0) = \frac{1}{p_0}$ . Dans la représentation en réseau électrique, donner la conductance  $C_{x, x+1}$  de l'arête  $(x, x + 1)$  en fonction de  $(\gamma_z)_z$ .
2. Pour  $a, b > 0$ , quelle est la valeur de la probabilité pour la chaîne démarrant en 0 d'atteindre  $-a$  avant d'atteindre  $b$ ? (on pourra, par exemple, remplacer le réseau entre 0 et  $b$  par une unique arête dont on calculera la conductance équivalente.)
3. Condition nécessaire et suffisante sur la suite  $\gamma$  pour que la chaîne soit récurrente?

On considère aussi une marche aléatoire simple  $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = y + 1 | Y_n = y) = 1/2 = \mathbf{P}(Y_{n+1} = y - 1 | Y_n = y) = 1/2$$

On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes.

4. Montrer que le couple  $Z_n = (X_n, Y_n)$  est une chaîne de Markov réversible sur  $\mathbb{Z}^2$ , et exprimer la conductance  $\mathbf{C}_{(x,y), (x',y')}$  correspondantes des arêtes  $(|x - x'| = 1, |y - y'| = 1)$  en fonction de  $C_{x, x'}$ .
5. Donner une condition suffisante sur la suite  $\gamma$  pour que cette chaîne  $Z$  soit récurrente. (On pourra par exemple agréger des sommets du réseau de manière astucieuse.)