Université Paris 7 - Denis Diderot — **UFR de Mathématiques**
Master 2ème année — **Examen de Novembre 2005**
"modélisation aléatoire" — **Francis Comets**

CHAINES de MARKOV

Durée 3 heures. Les trois parties sont indépendantes. dans la notation. Tous documents autorisés, pas les téléphones!

♣

EXERCICE: Automate Cellulaire

Chacune des N^2 cases d'un damier "périodique" (voir ci-après) de taille $N \times N$ est coloré d'une couleur: soit bleue (b), soit rouge (r), soit verte (v). Le coloriage évolue selon une chaine de Markov à valeur dans l'espace $E = \{b, r, v\}^{N^2}$ de la manière suivante: à chaque instant entier, on choisit au hasard une case puis on remplace sa couleur par celle d'une des 4 cases voisines que l'on tire aussi au hasard (ces tirages sont uniformes, indépendants entre eux et indépendants du passé). Le damier est périodique, de sorte que chaque case a exactement 4 voisines, comme indiqué par la figure.

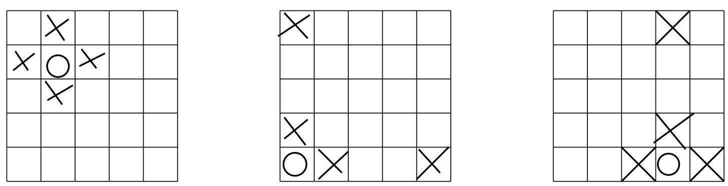

Figure 1: Les **X** sont les 4 cases voisines de **O** sur le damier périodique avec ici $N = 5$ fig1

On démarre la chaine d'un coloriage avec $m^{(b)}$ cases bleues, $m^{(r)}$ cases rouges, $m^{(v)}$ cases vertes ($m^{(b)} + m^{(r)} + m^{(v)} = N^2$).

1. Trouver les états absorbants. Notant $Y_n^{(b)}, Y_n^{(r)}$ et $Y_n^{(v)}$ les proportions de chaque couleur à l'instant n, vérifier que $(Y_n^{(b)})_n$ est une martingale.

2. En déduire que $Y_n^{(b)}$ converge p.s. quand $n \to \infty$. Que dire de sa limite ? Calculer les probabilités d'absorbtion dans chacun des états absorbants.

PROBLÈME 1

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov sur E dénombrable, qu'on suppose irréductible récurrente positive de probabilité invariante π. Soient $x, y \in E$ deux états distincts. On définit le temps d'atteinte de y, $T_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}$, et S le temps de retour en x après être passé en y:

$$S = \inf\{n \geq T_y : X_n = x\}$$

1. Montrer que $\mathbf{E}_x[S] = \mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x]$

2. Montrer que
$$\mathbf{E}_x\left[\sum_{n=0}^{S-1} \mathbf{1}\{X_n = z\}\right] = \mathbf{E}_x[S]\pi(z) \quad \forall z \in E$$
(On pourra s'inspirer de la preuve du théorème ergodique, et considérer les temps aléatoires $S_1 = S$, $S_{k+1} = \inf\{n \geq S_k : X_n = x, \exists k \in [S_k + 1, n-1]\ X_k = y\}$).

3. En déduire que
$$\mathbf{P}_x(T_y < T_x) = \frac{1}{\pi(x)(\mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x])}$$

PROBLÈME 2

Soit Q une matrice stochastique sur l'ensemble E dénombrable. On suppose que pour tout $a, b \in E$ il existe un couplage X_n^a, X_n^b des chaines partant de a et b et un temps aléatoire T presque sûrement fini tels que
$$\forall n \geq T \quad X_n^a = X_n^b\ .$$

0. Question de cours. Donner une condition suffisante sur les transitions $Q(x, y)$ pour que cette hypothèse soit vérifiée (On choisira la condition la moins restrictive parmi celles vues en cours).

1. Montrer que toute fonction Q-harmonique bornée est constante. (On rappelle que $f : E \to \mathbf{R}$ est Q-harmonique si $\sum_{y \in E} Q(x, y) f(y) = f(x)\ \forall x \in E$.) Indication: on pourra cherche d'abord une propriété remarquable de la suite $f(X_n^a)$.

Une fonction $f : \mathbb{N} \times E \to \mathbf{R}$ est dite "harmonique en temps-espace" si pour tous $m, n \geq 0, x \in E$, on a $\sum_{y \in E} Q^n(x, y) f(m + n, y) = f(m, x)$.

2. Montrer que toute fonction harmonique en temps-espace bornée est constante (bornée signifie que $\sup_{n,x} |f(n, x)| < \infty$).

La tribu postérieure à n est la tribu $\mathcal{T}_n$ sur $E^{\mathbb{N}}$ engendrée par les ensembles $\{(x_n)_{n \geq 0} : x_{n+1} \in B_{n+1}, \ldots x_{n+m} \in B_{n+m}\}$ avec $B_{n+1}, \ldots B_{n+m} \subset E$ et $m \geq 1$. La tribu de queue est $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$.

3. Soit $A \in \mathcal{T}$.

   a) Montrer que $\mathbf{P}(X^a \in A)$ ne dépend pas de $a \in E$.

   b) On note θ l'opérateur de décalage sur $E^{\mathbb{N}}$, $\theta : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$, $(x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots)$. Montrer que la fonction $f(n, x) = \mathbf{P}(X^x \in \theta^n A)$ est harmonique en temps-espace.

   c) Montrer que $\forall A \in \mathcal{T}, a \in E, \quad \mathbf{P}(X^a \in A) = 0$ ou 1.

Corrigé succint

EXERCICE

1. Les 3 coloriages unicolores, soit B (tout bleu), R et V, sont clairement absorbants. Ce sont les seuls, car tant qu'il y a plusieurs couleurs, l'état a probabilité positive de changer.

   On notera $(X_n)_n$ la chaine et $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration propre. Remarquons qu'à chaque instant entier, la case recoloriée et la case voisine donnant la nouvelle couleur sont choisies uniformément sur les $4N^2$ couples (ordonnés) possibles. Mais un couple et celui en ordre inverse donne des variations de $Y_n^{(b)}$ opposées. On a donc

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}^{(b)}|\mathcal{F}_n) = Y_n^{(b)} \ .$$

2. La martingale $(Y_n^{(b)})_n$ est uniformément bornée par 1, elle converge p.s. et dans L^2 vers une limite $Y_\infty^{(b)}$. Comme elle prend des valeurs discretes, elle atteint sa limite. Il en est de même pour les autres proportions: $\exists n_0(\omega)$ fini p.s. tel que $Y_n^{(b)} = Y_\infty^{(b)}, Y_n^{(r)} = Y_\infty^{(r)}, Y_n^{(v)} = Y_\infty^{(v)}$ pour $n \geq n_0$. En raisonnant par l'absurde on voit que X_n est un état unicolore absorbant ($n \geq n_0$). On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \text{absorbé en B}) &= \mathbf{P}(Y_\infty^{(b)} = 1) \\
&= \mathbf{E}Y_\infty^{(b)} \\
&= \lim_n \mathbf{E}Y_n^{(b)} \qquad \text{(convergence } L^1\text{)} \\
&= \mathbf{E}Y_0^{(b)} = \frac{m^{(b)}}{N^2} \qquad \text{(martingale)}
\end{aligned}$$

   et similairement $\mathbf{P}(X \text{absorbé en R}) = \frac{m^{(r)}}{N^2}, \mathbf{P}(X \text{absorbé en V}) = \frac{m^{(v)}}{N^2}$.

PROBLÈME 1

1. Puisque la chaine est irreductible ergodique, les temps T_z sont finis et intégrables pour $\mathbf{P}_x$ $(x, z \in E)$. La propriété forte de Markov affirme que la chaine translatée par T_y a même loi que la chaine partant de y. Appliquons cela au membre de droite ci-dessous:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x[S] &= \mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_x[S - T_y] \\
&= \mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x]
\end{aligned}$$

2. Comme dans la preuve du théorème ergodique, on appelle $T_x^{(k)}$ les temps de passage successifs en x, et $(\mathcal{E}_k)$ les excursions (qui sont i.i.d.). Notons que S_1 est le premier des $T_x^{(k)}$ tel que l'excursion $\mathcal{E}_k$ précédente passe par y (et on notera K_1 l'indice k

correspondant), S_2 est le premier $T_x^{(k)} > S_1$ tel que l'excursion $\mathcal{E}_k$ précédente passe par y (on notera K_2 l'indice k correspondant), etc... Alors, les v.a. $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ définies par

$$\mathcal{C}_1 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \ldots \mathcal{E}_{K_1}) \ , \quad \mathcal{C}_2 = (\mathcal{E}_{S_1+1}, \ldots \mathcal{E}_{K_2}), \ldots$$

sont elles-mêmes indépendantes et de même loi. Par la loi des grands nombres,

$$\begin{aligned} m^{-1} \sum_{n=0}^{S_m - 1} \mathbf{1}_{X_n = z} &= m^{-1} \sum_{l=0}^{m} \sum_{n=S_{l-1}}^{S_l - 1} \mathbf{1}_{X_n = z} \\ &\to \mathbf{E}_x \left[\sum_{n=0}^{S-1} \mathbf{1}\{X_n = z\} \right] \end{aligned}$$

p.s. quand $m \to \infty$. Mais le premier terme s'écrit aussi

$$\frac{\sum_{n=0}^{S_m - 1} \mathbf{1}_{X_n = z}}{S_m} \times \frac{S_m}{m} \to \pi(z) \times \mathbf{E}_x[S]$$

d'aprés le théorème ergodique et la loi des grands nombres.

3. On prend $z = y$. On a

$$\mathbf{E}_x \left[\sum_{n=0}^{S-1} \mathbf{1}\{X_n = y\} \right] = \mathbf{E}_x \left[\sum_{n=T_y}^{S-1} \mathbf{1}\{X_n = y\} \right] = \mathbf{E}_y \left[\sum_{n=0}^{T_x - 1} \mathbf{1}\{X_n = y\} \right]$$

d'après la propriété forte de Markov. Avec la question 2, cela devient

$$\mathbf{E}_y \left[\sum_{n=0}^{T_x - 1} \mathbf{1}\{X_n = y\} \right] = \pi(y) \mathbf{E}_x[S] = \pi(y) \left(\mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x] \right)$$

en utilisant la question 1 pour la dernière ligne. Mais on peut calculer le membre de gauche, qui est égal à

$$\mathbf{E}_y \left[\text{nombre de visites en } y \text{ avant retour en } x \right]$$

La probabilité que x ne soit pas visité entre deux passages consécutifs en y est $\mathbf{P}_y(T_y < T_x)$. Sous $\mathbf{P}_y$, le nombre de visites en y avant T_x suit une loi géométrique de paramètre $\mathbf{P}_y(T_y < T_x)$, et le nombre moyen de visites est

$$\frac{1}{\mathbf{P}_y(T_x < T_y)}$$

Finalement, on obtient

$$\mathbf{P}_y(T_x < T_y) = \frac{1}{\pi(y)(\mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x])} \ ,$$

ce qui est le résultat voulu en échangeant x et y.

Commentaire: La quantité $\mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x]$ s'appelle le temps moyen de commutation entre x et y (pourquoi?). On a donc pour une chaine ergodique

$$\mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x] = \frac{1}{\pi(y)\mathbf{P}_y(T_x < T_y)}\,.$$

D'autre part, pour une chaine reversible avec mesure reversible π, on a vu dans le dernier cours (si, si...) que dans la representation en circuit de conductances ($c_{xy} = \pi(x)Q(x,y)$), la résistance effective entre x et y vaut

$$r_{\text{eff}}^{y\to x} = \frac{1}{\pi(y)\mathbf{P}_y(T_x < T_y)}\,.$$

Ainsi, pour une chaine ergodique reversible, on a l'identité

$$r_{\text{eff}}^{x\to y} = \mathbf{E}_x[T_y] + \mathbf{E}_y[T_x]$$

Donc, $r_{\text{eff}}^{y\to x} = r_{\text{eff}}^{x\to y}$, ce que l'on pouvait déja voir sur le principe de Dirichlet pour une chaine reversible générale.

PROBLÈME 2

0. La positivité du coefficient d'ergodicité de Dobrushin

$$\alpha(Q) := \inf_{a,b\in E} \sum_{y\in E} \min\{Q(a,y), Q(b,y)\} > 0$$

1. Soit f harmonique bornée. Alors, $f(X_n)$ est intégrable et c'est une martingale. Pour tout $a, b \in E$,

$$\begin{aligned}
|f(a) - f(b)| &= \mathbf{E}\left[f(X_n^a) - f(X_n^b)\right] \\
&= \mathbf{E}\left([f(X_n^a) - f(X_n^b)]\mathbf{1}_{\{T>n\}}\right) \\
&\leq 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(T > n)
\end{aligned}$$

et finalement $f(a) = f(b)$ en faisant tendre $n \to \infty$.

2. Si f est une fonction harmonique en temps-espace et bornée, la suite $f(n, X_n)$ est une martingale puisque la définition "harmonique en temps-espace" de l'énoncé s'écrit $\mathbf{E}_x f(n+m, X_n) = f(m,x)$, et l'on a

$$\mathbf{E}\left[f(n+m, X_{n+m})|\mathcal{F}_m^X\right] = f(m, X_m)$$

Ainsi, $f(n, X_n)$ est une martingale. De même, $f(m+n, X_n)$ est une martingale. Pour tout $a, b \in E$,

$$\begin{aligned}
|f(m,a) - f(m,b)| &= \mathbf{E}\left[f(m+n, X_n^a) - f(m+n, X_n^b)\right] \\
&= \mathbf{E}\left([f(m+n, X_n^a) - f(m+n, X_n^b)]\mathbf{1}_{\{T>n\}}\right) \\
&\leq 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(T > n)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $f(m,x)$ ne dépend pas de x. Puisque f est harmonique en temps-espace, cela entraine que $f(m,x)$ ne dépend pas non plus de m. Elle est donc constante.

3. a) On écrit à l'aide du couplage

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X^a \in A) - \mathbf{P}(X^b \in A) &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{X^a \in A\}} - \mathbf{1}_{\{X^b \in A\}}) \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{1}_{\{X^a \in A\}} - \mathbf{1}_{\{X^b \in A\}})(\mathbf{1}_{\{T \le n\}} + \mathbf{1}_{\{T > n\}})] \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{1}_{\{X^a \in A\}} - \mathbf{1}_{\{X^b \in A\}})\mathbf{1}_{\{T > n\}}]\end{aligned}$$

où la dernière égalité a lieu dès que $A \in \mathcal{T}_n$. Donc,

$$|\mathbf{P}(X^a \in A) - \mathbf{P}(X^b \in A)| \le \mathbf{P}(T > n)$$

pour tout n. En faisant tendre $n \to \infty$, on voit que le membre de gauche est nul.

b) On observe d'abord que la suite translatée s'écrit $(X^x_m, X^x_{m+1}, \ldots) = \theta^m X^x$. Pour tout événement $A \subset E^{\mathbb{N}}$ on a l'inclusion

$$\{X^x \in \theta^n A\} \subset \{(X^x_m, X^x_{m+1}, \ldots) \in \theta^{m+n} A\}\} ,$$

mais si $A \in \mathcal{T}_{m+n}$, on a même égalité. Donc, notant $\mathcal{F}_m$ la tribu engendrée par $X^x_0, \ldots X^x_m$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X^x \in \theta^n A) &= \mathbf{P}((X^x_m, X^x_{m+1}, \ldots) \in \theta^{m+n} A) \\ &= \mathbf{E}\mathbf{P}((X^x_m, X^x_{m+1}, \ldots) \in \theta^{m+n} A | \mathcal{F}_m) \\ &= \mathbf{E} f(m+n, X^x_m)\end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov. Finalement, $f(n,x) = \mathbf{E} f(m+n, X^x_m)$, soit f est harmonique en temps-espace.

c) D'après le 2), f est constante. Par ailleurs, $f(n, X^x_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$-martingale bornée: par les théorèmes des martingales, elle converge donc p.s. et dans L^1 vers une limite Y_∞. La limite est caractérisée par (i) Y_∞ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable (ii) $f(n, X^x_n) = \mathbf{E}(Y_\infty | \mathcal{F}_n)$. Mais ces deux points sont vérifiés par la a v.a. $\mathbf{1}_{\{X^x \in A\}}$, en particulier

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{X^x \in A\}} | \mathcal{F}_n) &= \mathbf{P}(X^x \in A | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{P}(\theta^n X^x \in \theta^n A | \mathcal{F}_n) \qquad (A \in \mathcal{T}) \\ &= \mathbf{P}(X^z \in \theta^n A)_{|z = X^x_n} \qquad (X^x \text{ Markov}) \\ &= f(n, X^x_n)\end{aligned}$$

Finalement, puisque f est constante,

$$f(0,x) = f(n, X^x_n) = \lim_n f(n, X^x_n) = \mathbf{1}_{\{X^x \in A\}} \in \{0,1\}$$

Commentaire: Il y a une réciproque: l'hypothèse (existence d'un couplage réussi) en fait équivaut à la conclusion de la question 2. ou encore à celle de 3.a)+c). Cf chapitre 6 de H.Thorisson "Coupling, stationarity, and regeneration", Springer-Verlag, New York, 2000.