Université Paris 7 - Denis Diderot | **UFR de Mathématiques**
Master 2ème année | **Examen de Novembre 2006**
"modélisation aléatoire" | **Francis Comets**

CHAINES de MARKOV

Durée 3 heures. Les trois parties sont indépendantes. Tous documents autorisés, pas les téléphones!

♣

PROBLEME : Partie A

Soit $X_0, Y_0, Y_1, Y_2 \dots$ des variables aléatoires indépendantes entières avec les Y_i de même loi sur $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $F(k) = \mathbf{P}(Y_i \leq k)$ et on suppose

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) > 0 , \qquad F(k) < 1 \quad \forall k \geq 1.$$

On considère la suite recurrente aléatoire

$$X_{n+1} = \max\{X_n, Y_n\} - 1 , \quad n \geq 1$$

1. Montrer que $X = (X_n)_n$ est une chaine de Markov irreductible à valeur dans $\mathbb{N}$. Quelle est sa matrice de transition Q ?

2. Montrer que
$$\mathbf{P}(X_{n+1} \leq k) = \mathbf{P}(X_n \leq k+1) F(k+1)$$
En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X_n \leq k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_0 \leq n+k)$ et de F. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leq k) = \prod_{j=k+1}^{\infty} F(j)$$

3. Vérifier que
$$\prod_{j=1}^{\infty} F(j) = 0 \iff \sum_{j=1}^{\infty} [1 - F(j)] = \infty , \qquad \text{et que} \quad \mathbf{E}Y_1 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y_1 > j) ,$$
et en déduire que
$$\mathbf{E}Y_1 = \infty \iff \prod_{j=1}^{\infty} F(j) = 0$$

4. Montrer que si $\mathbf{E}Y_1 = \infty$ alors X est transiente.

5. Montrer que si $\mathbf{E}Y_1 < \infty$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \pi(k) , \quad \text{avec } \pi(k) = [1 - F(k)] \prod_{j=k+1}^{\infty} F(j) \tag{1}$$

où π est une probabilité invariante pour la chaine qui est donc recurrente positive.

Partie B

On suppose dans cette partie que $\mathbf{E}Y_1 < \infty$, de sorte que π donnée par (1) est probabilité invariante.

1. Calculer les coefficients $\beta(Q), \alpha(Q)$ de Doeblin et de Dobrushin de la chaine.
2. Calculer $Q^n(x, y)$ en fonction de F, suivant que $y > x - n$ ou non. On pourra procéder comme à la question 2 de la partie précédente.
3. En déduire la valeur de $Q^n(x, y) - \pi(y)$. Quelle est la vitesse de convergence de $Q^n(x, \cdot)$ vers π ? Comparez avec les résultats du chapitre 6 du cours.

Exercice: Promenade aléatoire sur l'arbre binaire enraciné

Considérons l'arbre binaire infini $\mathcal{T} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{a, b\}^k$, dont les sommets sont numérotées par les suites finies non vides $x = w_1 w_2 \dots w_k$ de longueur $|x| = k(k \geq 1,\ w_i \in \{a, b\})$. La racine est la suite vide $\emptyset$, elle a longueur 0. Dans la figure 1 on a représenté l'arbre jusqu'à la profondeur 4, c'est-à-dire le sous-ensemble des sommets numérotées par les suites de longueur inférieure ou égale à 4, ainsi que les arêtes qui les joignent.

Soit λ un paramètre positif. On considère la chaine de Markov X sur $\mathcal{T}$ de transition donnée pour $x = w_1 w_2 \dots w_k$ avec $k \geq 1$ par

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = xu | X_n = x) = \frac{1}{2+\lambda} , \quad u = a, b, \qquad \mathbf{P}(X_{n+1} = w_1 w_2 \dots w_{k-1} | X_n = x) = \frac{\lambda}{2+\lambda} ,$$

et donné à la racine par

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = u | X_n = \emptyset) = \frac{1}{2} , \quad u = a, b.$$

1. Vérifier que $\pi(x) = \lambda^{-|x|}(x \neq \emptyset), \pi(\emptyset) = (2+\lambda)^{-1}$, est mesure reversible pour la chaine. En déduire que X est recurrente positive lorsque $\lambda > 2$.
2. Calculer la résistance effective $r_{\text{eff}}^{\emptyset \to A_n}$ entre la racine $\emptyset$ et $A_n = \{x \in \mathcal{T}; |x| = n\}$. En déduire que X est transiente si $\lambda < 2$ et recurrente nulle si $\lambda = 2$.

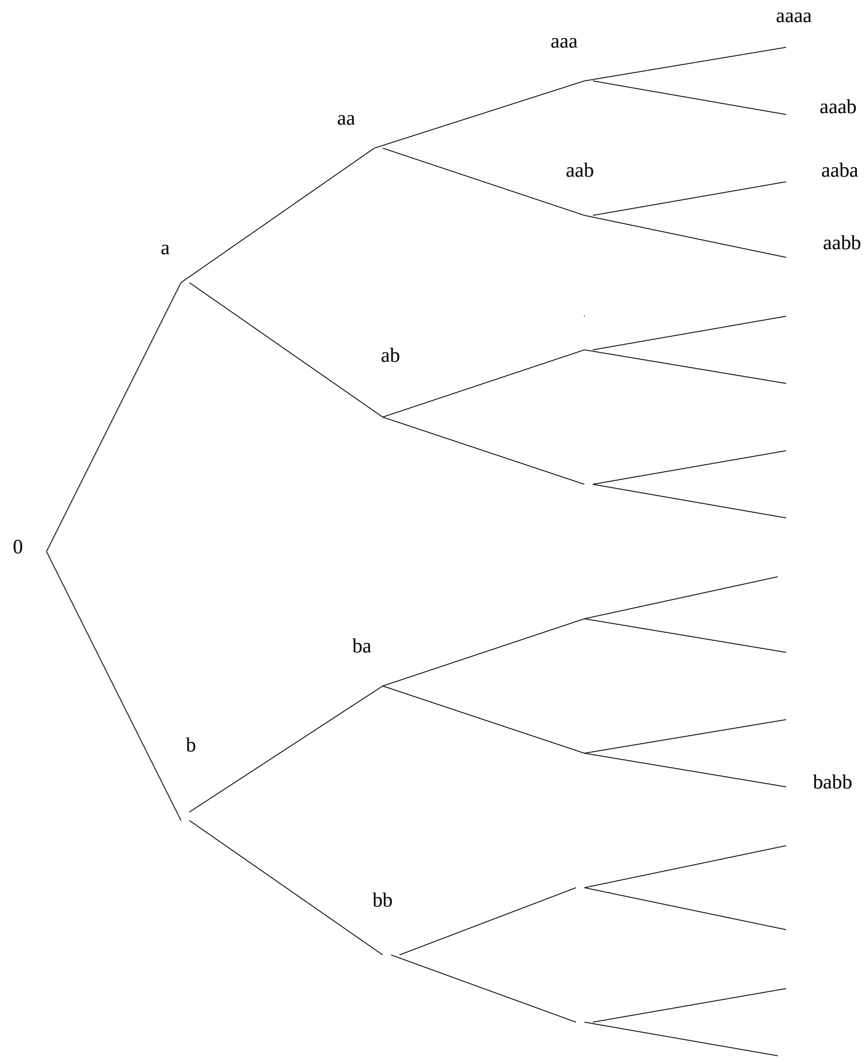

Figure 1: L'arbre binaire jusqu'à la profondeur 4

3. Vérifier que

$$|X_n| - \frac{2-\lambda}{2+\lambda}n - \frac{2\lambda}{2+\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{X_i=\emptyset}$$

   est une martingale.

4. On suppose $\lambda < 2$. Montrer que $|X_n|/n$ converge p.s. quand $n \to \infty$ vers une limite à preciser. (Rappel: la loi des grands nombres pour une martingale M dit que $M_n / <M>_n \to 0$ p.s. sur l'evenement $\{<M>_n \to \infty\}$.)