

Exercices de Probabilités Supplément 9

Exercice 1. Soit X_n ($n \geq 1$) des variables aléatoires strictement positives de même loi et ayant un moment d'ordre 2 ; soit U_n et V_n ($n \geq 1$) des variables aléatoires prenant seulement les valeurs 0 et 1 et telles que

$$\mathbb{P}[U_n = 1] = \alpha, \quad \mathbb{P}[V_n = 1] = \beta \quad (0 < \alpha, \beta < 1).$$

On suppose que toutes les variables aléatoires X_m, U_n, V_p ($n, m, p \geq 1$) sont indépendantes.

On définit, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} U_k X_k$, $T_n = \sum_{1 \leq k \leq n} V_k X_k$.

- 1) Etablir que, lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{S_n}{T_n}$ tend presque sûrement vers une constante a que l'on déterminera.
- 2) Etablir que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - aT_n)\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 2. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que, pour tout k :

$$\mathbb{P}[X_k = k] = \mathbb{P}[X_k = -k] = \frac{1}{2k^2} \quad \text{et, si } k > 1, \quad \mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \leq k \leq n} X_k$. Montrer que $\text{var}(V_n) \rightarrow 2$ tandis que (V_n) converge en loi vers une gaussienne centrée réduite.

Exercice 3. Soit X_n une suite de variables réelles indépendantes, de même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Etudier la convergence en loi de la suite $\left(n^{-1} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{X_k}\right)$. Montrer en particulier :

$$\mathbb{P} \left[\left| \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{X_k} \right| > n \frac{\pi}{2} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

(Indication : fonction caractéristique).

Exercice 4. Soient X_n ($n \geq 1$) des variables aléatoires indépendantes de même loi et ayant un moment d'ordre 2. On note $\mathbb{E}X_n = m$ et $\text{Var}X_n = \sigma^2$. On définit, pour $n \geq 1$:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 \right)^{1/2}.$$

et l'on note $Y_n = \sqrt{n} S_n^{-1} (\bar{X}_n - m)$ la déviation empirique dont on étudie la convergence en loi.

1. Montrer que \bar{X}_n et S_n convergent p.s. Vers quoi?

2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une v.a. Y_∞ de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. En utilisant le lemme de Slutsky (voir plus loin), trouver la limite en loi de la suite (Y_n) .

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel on ait : $\mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = \mathbb{P}(X_n = -n^\alpha) = 1/2$. On pose $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

1. Montrer que, pour $\alpha < 1/2$, la suite (Y_n) converge dans L^2 .
2. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que la suite (Y_n) converge en loi si et seulement si $\alpha \leq 1/2$.
3. On veut montrer que, pour $\alpha < 1/2$, la suite (Y_n) converge p.s. Montrer qu'il existe, pour tout $u > 0$, une constante C telle que, pour tout n assez grand :

$$(a) \mathbb{P}(Y_n > \epsilon) \leq \exp(-u\epsilon) \mathbb{E}(\exp uY_n) \leq \exp\left(-u\epsilon + \frac{3u^2}{(2\alpha + 1)n^{1-2\alpha}}\right) \quad \epsilon, u > 0.$$

$$(b) \mathbb{P}(Y_n > \epsilon) \leq C \exp(-\epsilon\sqrt{n^{1-2\alpha}})$$

et conclure.

Exercice 6. (Slutsky)

Soient $V_n (n \in \mathbb{N})$ des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . On suppose que (V_n) converge en loi vers a où a est une constante. Montrer que (V_n) converge en probabilité vers a .

Soient $U_n, V_n (n \in \mathbb{N})$ des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . On suppose que U_n (resp. V_n) converge en loi vers U (resp. a) où a est une constante. Montrer que le couple (U_n, V_n) converge en loi vers (U, a) . (Utiliser les fonctions caractéristiques.)

Exercice 7. Soient $M_n = (M_{n,1}, \dots, M_{n,d}), N_n = (N_{n,1}, \dots, N_{n,d})$ des vecteurs aléatoires indépendants de lois multinomiales de paramètres n, p_1, \dots, p_d .

1. Loi limite de $(\frac{M_{n,1} - N_{n,1}}{\sqrt{M_{n,1} + N_{n,1}}}, \dots, \frac{M_{n,d} - N_{n,d}}{\sqrt{M_{n,d} + N_{n,d}}})$?
2. Montrer que $\sum_1^d \frac{(M_{n,i} - N_{n,i})^2}{M_{n,i} + N_{n,i}}$ converge en loi vers $\chi^2(d-1)$.

Exercice 8. (Contre-exemples)

Soient X une v.a de loi de Bernoulli $b(1/2)$ et $Y = 1 - X$. On note (X_n) la suite stationnaire sur X . Montrer que (X_n) converge en loi mais non en probabilité vers Y

Avec les mêmes notations, et en appelant (Y_n) la suite stationnaire sur Y , montrer que (X_n) et (Y_n) convergent en loi vers X mais que $(X_n - Y_n)$ ne converge pas en loi vers 0.

Exercice 9. Soient (X_n) une suite de v.a. i.i.d. centrées, ayant un moment d'ordre 2 et $S_n = \sum_1^n X_i$.

En utilisant TCL et la loi $(0, 1)$, montrer que $\limsup S_n/\sqrt{n} = \infty$.

En raisonnant par l'absurde, montrer que (S_n/\sqrt{n}) ne converge pas en probabilité.

Exercice 10. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes, à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , de même loi μ , définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; N est une variable entière, indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$, de fonction génératrice G .

Pour $A \in \mathcal{E}$ et $\omega \in \Omega$, soit $N_A(\omega) = 1_{\{N(\omega) > 0\}} \sum_{1 \leq i \leq N(\omega)} 1_A(X_i(\omega))$.

- 1) Quelle est la fonction génératrice de N_A ?
- 2) Expliciter, pour $|u| \leq 1, |v| \leq 1, \mathbb{E}[u^{N_A} v^{N_{A^c}}]$.
- 3) Soit $A \in \mathcal{E}$ avec $0 < \mu[A] < 1$;

montrer que N_A et N_{A^c} sont indépendantes si et seulement si N suit une loi de Poisson.

Exercice 11. Soit (X_n) une suite de variables indépendantes. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et on suppose que la suite (S_n) converge en probabilité. On va montrer que la suite (S_n) converge presque sûrement. (Théorème de Levy).

1. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe m_0 tel que :
 $\forall n, m \geq m_0, \mathbb{P}(|S_n - S_m| \geq \epsilon) \leq \epsilon$.
2. On pose $\tau = \inf\{n > 0 \mid |S_{n+m_0} - S_{m_0}| > 2\epsilon\}$ ($\inf \emptyset = \infty$). Montrer que :
 $\{\tau \leq p\} \cap \{|S_{p+m_0} - S_{\tau+m_0}| < \epsilon\} \subset \{|S_{p+m_0} - S_{m_0}| > \epsilon\}$.
3. Montrer que :
 $\epsilon \geq \mathbb{P}(\{|S_{p+m_0} - S_{m_0}| > \epsilon\}) \geq \sum_1^k \mathbb{P}(\tau = k) \mathbb{P}(\{|S_{p+m_0} - S_{k+m_0}| < \epsilon\})$
 puis que $\mathbb{P}(\tau \leq p) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$.
4. Montrer que, si une suite (Y_n) n'est pas p.s. convergente, il existe $a, \alpha > 0$ tels que
 $\forall q \quad \mathbb{P}(\{\sup_{n, m \geq q} |Y_n - Y_m| \geq \alpha\}) \geq a$.
5. Dédire de 3. que : $\mathbb{P}(\{\sup_{n, m \geq m_0} |S_n - S_m| \geq 4\epsilon\}) \leq \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}$ et conclure.