Université Paris 7 - Denis Diderot
Probabilités
Année 08/09

Feuille d'exercices 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note A_n l'ensemble des multiples de n dans $\mathbb{N}$.

a) Soit $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par les A_n. Montrer que chaque singleton $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, est élément de $\mathcal{A}$ et en déduire $\mathcal{A}$.

b) Soit $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par les A_p où p est un entier premier.

Pour tout ensemble I fini de nombres premiers, on note $B_I = (\cap_{p \in I} A_p) \cap (\cap_{p \notin I} A_p^C)$.

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}$ on a $B_I \subset A$ ou $B_I \subset A^C$ (on dit que B_I est un "atome" de la tribu $\mathcal{B}$).

$\mathcal{B}$ est-elle égale à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

2. Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies à valeurs dans $\{0,1\}$ (c'est l'espace des épreuves correspondant à une suite infinie de lancers à pile ou face). Ses éléments seront notés $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \{(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega / \omega_n = 1\}$ et $\mathcal{B}_\backslash$ l'ensemble des parties de Ω de la forme $\{(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega / (\omega_0, \ldots, \omega_n) \in B\}$ où B est une partie quelconque de $\{0,1\}^{n+1}$.

a) Montrer que les $\mathcal{B}_n$ sont des tribus sur Ω. ($\mathcal{B}_n$ est la tribu des événements dont on peut dire s'ils sont réalisés ou non au vu des $n+1$ premiers lancers.)

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n = \sigma(A_0, \ldots, A_n)$.

c) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$.

d) L'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est-il élément de $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$? $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ est-elle une tribu ?

3. On tire successivement sans remise r objets parmi n objets numérotés de 1 à n ($r \leq n$).
Quelle est la probabilité d'obtenir une suite croissante de numéros ?

4. On tire sans remise r éléments d'un ensemble qui en contient n ($r \leq n$).

a) Quelle est la probabilité de tirer un élément a fixé à l'avance ?
(Considérez-vous un tirage ordonné ou simultané ? Cela change-t-il le résultat ? Pourquoi ?)

b) Quelle est la probabilité de tirer k éléments fixés ($k \leq r$) ? Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n et r tendent vers l'infini avec $\lim \frac{r}{n} = \lambda$.

5. On tire avec remise r éléments d'un ensemble à n éléments.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k fois un élément fixé ($k \leq r$) ?

6. Quelle est la probabilité que dans une donne de bridge :
a) chaque joueur ait un as ?
b) 2 joueurs donnés possèdent tous les piques ?

7. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On les tire une à une sans remise.

a) Calculer la probabilité que la première boule rouge soit obtenue au k-ième tirage.

Peut-on faire ce calcul indifféremment dans l'ensemble des permutations de $b+r$ objets ou dans celui des suites possibles de $b+r$ couleurs dont b "bleu" et r "rouge" (munis de la probabilité uniforme) ? Pourquoi ?

b) Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit rouge ?

c) Montrer que pour tous p et s dans $\mathbb{N}$ on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{p+s}{p} = \binom{p+s+1}{p+1}$$

à l'aide de la relation de Pascal : $\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}$ vraie pour n et p quelconques dans $\mathbb{N}$. On peut aussi déduire la formule du résultat de a).

d) On suppose $r \geq 2$. Calculer la probabilité que la boule obtenue juste après la première boule rouge soit bleue.

8. Six tasses et six soucoupes sont associées par paires : 2 bleues, 2 blanches et 2 rouges. On dispose les tasses au hasard sur les soucoupes, quelle est la probabilité qu'aucune tasse ne soit posée sur une soucoupe de la même couleur ?

9. Soit Ω l'ensemble des configurations que l'on peut obtenir en répartissant r boules indiscernables dans n cases numérotées.

a) Montrer que le cardinal de Ω est égal au nombre de solutions $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}^n$ à l'équation $r_1 + \ldots + r_n = r$.

b) Montrer que ce nombre vaut $\binom{n+r-1}{r}$ de 3 façons différentes :

i) par récurrence sur n à l'aide de l'identité de l'exercice 7 c)

ii) en développant en série les 2 membres de l'identité : $\frac{1}{(1-t)^n} = (\sum_{k=0}^{\infty} t^k)^n$

iii) en identifiant Ω à l'ensemble des façons d'ordonner en ligne r boules indiscernables et $n-1$ parois (indiscernables aussi).

c) On répartit au hasard r boules indiscernables dans n cases. En supposant toutes les configurations équiprobables, calculer la probabilité qu'aucune case ne soit vide.

10. Dans un tournoi à élimination directe (comme Roland Garros) à 2^n participants (donc n tours), le tableau initial étant spécifié, représenter d'une façon simple l'espace des épreuves.

11. A et B étant 2 événements de probabilités $P(A) = \frac{3}{4}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$ montrer que $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

Trouver les bornes analogues pour $P(A \cup B)$.

12. Etablir la formule suivante, dite de Poincaré, où $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements quelconques d'un espace probabilisé :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

.

13. On tire simultanément 13 cartes d'un jeu de 52. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une carte de chaque couleur.

14. Une personne écrit n lettres à n correspondants différents. Elle écrit les adresses au hasard sur les enveloppes une fois celles-ci fermées.

a) Calculer la probabilité qu'aucun des correspondants ne reçoive la lettre qui lui était destinée.

b) Calculer la probabilité que k lettres exactement parviennent à leurs destinataires. Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini ?