Université Paris 7 - Denis Diderot
Probabilités
Année 08/09

Feuille d'exercices 12

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par une partition finie où dénombrable $(B_i)_{i\in I}$ constituée d'éléments de $\mathcal{A}$.

a) Caractériser les v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurables sur Ω.

b) Montrer que pour toute v.a.r. Y de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on a : $E(Y \mid \mathcal{B}) = \sum_{i\in I} \frac{E(Y 1\!\!1_{B_i})}{P(B_i)} 1\!\!1_{B_i}$.

c) Que vaut en particulier $E(Y \mid X)$ si X est une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

d) Vérifier sur l'exemple précédent que $E(Y \mid X)$ coïncide avec $\int y d\mu_X(y)$ où (μ_x) est la famille des lois conditionnelles de Y sachant $X = x$.

2. On considère 2 variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé, l'une, X , à valeurs dans $\mathbb{N}$ et l'autre, Y , à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $P(X = x) \neq 0$, la loi conditionnelle μ_x de Y sachant $X = x$ est la loi de densité f_x sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que Y admet la densité $f(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X = x) f_x(y)$.
En déduire que les lois μ_x sont absolument continues par rapport à P_Y.

b) Montrer l'existence d'une famille de lois conditionnelles $(\nu_y)_{y\in\mathbb{R}}$ de X sachant $Y = y$, où ν_y peut être choisie arbitrairement pour y tel que $f(y) = 0$.

c) i) Déterminer f et $(\nu_y)_{y\in\mathbb{R}}$ si X est de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ et, sachant $X = x$, Y est de loi $\Gamma(2, x + 1)$, c'est-à-dire que $f_x(y) = \frac{2^{x+1}}{x!} e^{-2y} y^x 1\!\!1_{]0,+\infty[}(y)$.

ii) Calculer dans ce cas $E(\frac{1}{Y^X} \mid X)$ puis $E(\frac{1}{Y^X})$.

3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. et de carré intégrable ($\mu = E(X_1)$ et $\sigma^2 = Var X_1$). Soit d'autre part N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et indépendante de la suite (X_n).
On pose $S = \sum_{1\leq i\leq N} X_i$.
Déterminer $E(S \mid N)$. En déduire l'espérance et la variance de S.

4. Soit (X, Y) un couple de v.a. définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans un espace $(E, \mathcal{E})$ et soit g une fonction mesurable telle que $g(X, Y)$ soit intégrable.

a) On suppose l'existence d'une famille $(\mu_x)_{x\in E}$ de lois conditionnelles de Y sachant X.
Montrer que :

$$E(g(X, Y) \mid X) = f(X) \quad \text{où} \quad f(x) = \int g(x, y) d\mu_x(y)$$

b) En déduire que, dans le cas où X et Y sont indépendantes,

$$E(g(X, Y) \mid X) = f(X) \quad \text{où} \quad f(x) = E[g(x, Y)] \ .$$

5. Soient X, Y deux v.a. définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ respectivement. On suppose qu'il existe une famille $(\mu_x)_{x\in E}$ de probabilités sur $(F, \mathcal{F})$ vérifiant :

$$E[g(Y) \mid X] = \int g(y) d\mu_X(y) \text{ pour toute fonction } g \text{ telle que } g(Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P).$$

Montrer que (μ_x) constitue une famille de lois conditionnelles de Y sachant $X = x$.
[On pourra commencer par exprimer $E[\phi(X, Y)]$ pour une fonction ϕ de la forme produit : $\phi(x, y) = \phi_1(x)\phi_2(y)$ puis étendre à ϕ quelconque par classe monotone.]