

Feuille d'exercices 2

1. On lance un dé 3 fois de suite et on suppose tous les triplets de chiffres possibles équiprobables. Déterminer la loi de la variable aléatoire égale au nombre de chiffres distincts obtenus.

2. On lance un dé 2 fois de suite et on suppose tous les couples de résultats équiprobables. On désigne par X le plus grand des 2 chiffres obtenus et par Y leur écart.

- a) Déterminer la loi de la variable aléatoire (X, Y) .
- b) En déduire les lois de X et de Y .

3. On tire sans remise r boules d'une urne qui contient n boules noires et b boules blanches. On note X le nombre de boules noires obtenues.

- a) Déterminer la loi de X et sa moyenne.
- b) Déterminer la limite de cette loi lorsque n et b tendent vers l'infini avec $\lim \frac{n}{n+b} = p$. Interpréter ce résultat.
- c) Retrouver $E(X)$ et calculer $Var X$ en écrivant X sous forme de somme :
 - i) de n variables indicatrices,
 - ii) de r variables indicatrices.
- d) Si on suppose maintenant que l'urne contient v boules vertes supplémentaires, déterminer la loi du couple (X_1, X_2) où X_1 est le nombre de boules noires obtenues et X_2 le nombre de boules blanches.

4. On place r boules indiscernables dans n cases et toutes les configurations possibles sont supposées équiprobables. Déterminer la loi du nombre de cases occupées. De quelle loi s'agit-il?

5. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ sans utiliser sa décomposition en somme de variables indicatrices.

6. Un chapeau contient n tickets numérotés de 1 à n . On en tire k au hasard et on additionne leurs numéros. Déterminer la moyenne et la variance du total.

9. On tire avec remise r éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Quelle est la loi et la moyenne du nombre d'éléments différents obtenus ?

Donner une expression du nombre de surjections d'un ensemble à r éléments dans un ensemble à k éléments.

Un autre calcul est donné dans la feuille supplément 1, exercice 1.

10. Un groupe de $2n$ personnes est constitué de n couples mariés; r personnes sont tirées au sort parmi le groupe.

Déterminer la loi de la variable aléatoire égale au nombre de couples mariés obtenus.

11. On se propose de montrer que, dans la formule de Poincaré (voir l'exercice 12 de la feuille 1), les sommes partielles du membre de droite sont alternativement des majorants ou des minorants de $P(\cup_{i=1}^n A_i)$. Pour cela :

a) Montrer l'identité suivante, où $N, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq N$:

$$\binom{N}{k} - \binom{N}{k+1} + \binom{N}{k+2} + \dots + (-1)^{N-k} \binom{N}{N} = \binom{N-1}{k-1}$$

b) En déduire, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, l'inégalité :

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} - \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k+1}}} + \dots + (-1)^{(n-k)} \mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n} \geq 0$$

[indication : exprimer le premier membre en fonction de la variable $N = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$]

c) Conclure.

12. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

a) Montrer l'identité : $X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X \geq n\}}$.

b) En déduire que : $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

Application : calculer à l'aide du b) l'espérance d'une variable aléatoire de loi géométrique $P(X = k) = (1-p)p^k$ où $0 < p < 1$.

13. Mon voisin a 2 enfants.

a) Quelle est la probabilité que ces enfants soient 2 filles sachant que :

(i) l'aînée est une fille (ii) au moins un des 2 enfants est une fille ?

b) Me rendant chez lui, je suis accueilli par une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?

14. Les nombres entiers de 1 à n sont ordonnés au hasard et tous les ordres sont supposés équiprobables.

Pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$, on note A_I l'événement:

$A_I =$ "les éléments de I se trouvent disposés en ordre croissant".

1) Calculer $P(A_I)$ en fonction du cardinal de I .

2) Montrer que, si I_1, \dots, I_r sont des parties de $\{1, \dots, n\}$ deux à deux disjointes, alors les événements A_{I_1}, \dots, A_{I_r} sont indépendants.