Introduction aux Journées Fractionnaires Parisiennes

par Ivan Nourdin, le 6 juin 2006

Cette note est une introduction aux "Journées Fractionnaires Parisiennes" qui auront lieu les 12 et 13 juin à Chevaleret (voir `http://www.proba.jussieu.fr/jfp06`). Son but est d'énoncer un certain nombres de propriétés vérifiées par le mouvement brownien fractionnaire et d'en donner quelques applications.

Je remercie Nathalie Krell qui m'a invité à parler au "groupe de travail des thésards".

Définition. Le mouvement brownien fractionnaire (mbf en abrégé) $B = (B_t)_{t\geq 0}$ d'indice de Hurst $H \in (0,1)$ est le seul processus à vérifier

1. autosimilarité: $\forall a > 0$, $(a^{-H}B_{at})_{t\geq 0}$ a même loi que $(B_t)_{t\geq 0}$
2. accroissements stationnaires: $\forall h > 0$, $(B_{t+h} - B_h)_{t\geq 0}$ a même loi que $(B_t)_{t\geq 0}$
3. gaussien avec $\mathrm{E}(B_1) = 0$ et $\mathrm{E}({B_1}^2) = 1$.

Sa fonction de covariance est

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \tag{1}$$

En particulier

$$\mathrm{E}|B_t - B_s|^2 = |t-s|^{2H}$$

donc les trajectoires d'un mbf sont p.s. höldériennes d'indice α, pour tout $\alpha \in (0, H)$. Si $H = 1/2$, B est le mouvement brownien standard. Si $H \neq 1/2$, B n'est ni une semimartingale, ni un processus de Markov.

Variation quadratique et estimation statistique de H. Pour tout $H \in (0,1)$, on a, presque sûrement:

$$n^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}\right)^2 \longrightarrow 1$$

quand $n \to \infty$. Autrement dit, on a un équivalent p.s. de la variation quadratique du mbf:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}\right)^2 \sim n^{1-2H}$$

quand $n \to \infty$. On en déduit que $\frac{v_{2n}}{v_n} \to 2^{1-2H}$ p.s. puis l'estimateur consistant pour H:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\left[1 - \log_2 \frac{v_{2n}}{v_n}\right].$$

(remarque: pour la vitesse de convergence, on a normalité asymptotique à la vitesse $\sqrt{n}$ si $H < 3/4$; si $H > 3/4$, en changeant v_n en

$$v'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{\frac{k+1}{n}} + B_{\frac{k-1}{n}} - 2B_{\frac{k}{n}}\right)^2$$

on a aussi normalité asymptotique à la vitesse $\sqrt{n}$: *cf.* Istas et Lang [5]).

Représentations du mbf.

i) Moyenne mobile: Mandelbrot et van Ness [7] ont défini le mbf de la manière suivante:

$$B_t = \frac{1}{c_H} \int_{\mathbb{R}} \left[(t-x)_+{}^{H-1/2} - (-x)_+{}^{H-1/2} \right] dW_x$$

où

$$c_H{}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[(1-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2}\right]^2 dx = \int_0^\infty \left[(1+x)^{H-1/2} - x^{H-1/2}\right]^2 dx + \frac{1}{2H}$$

et W est un mouvement brownien standard[1]. Pour montrer que B est un mbf, on vérifie déjà que B_t est bien défini (exercice!). Ensuite, pour $s < t$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(B_t - B_s)^2] &= \tfrac{1}{c_H{}^2} \int_{\mathbb{R}} \left[(t-x)_+{}^{H-1/2} - (s-x)_+{}^{H-1/2} \right]^2 dx \\
&= \tfrac{1}{c_H{}^2} \int_{\mathbb{R}} \left[(t-s-x)_+{}^{H-1/2} - (-x)_+{}^{H-1/2} \right]^2 dx \\
&= |t-s|^{2H} \times \underbrace{\frac{1}{c_H{}^2} \int_{\mathbb{R}} \left[(1-u)_+{}^{H-1/2} - (-u)_+{}^{H-1/2} \right]^2 dx}_{=1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, B est gaussien, centré et a pour fonction de covariance la fonction R_H donnée par (1): c'est donc un mbf!

ii) Processus de Volterra: On $B_t = \int_0^t K_H(t,s) dW_s$ avec

$$K_H(t,s) = \Gamma(H+\frac{1}{2})^{-1}\ (t-s)^{H-\frac{1}{2}}\ F\left(H-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-H, H+\frac{1}{2}, 1-\frac{t}{s}\right), \tag{2}$$

[1]Dans toute la suite, W désignera toujours un mouvement brownien standard

où F est la fonction hypergéométrique de Gauss (*cf.* Decreusefond et Üstünel [3]).

Intégrer contre un mbf. On aimerait pouvoir étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par un mbf. Mais quel sens donner à $\int_0^T u_s dB_s$ (rappelons que B n'est pas une semimartingale si $H \neq 1/2$)?

i) trajectoire par trajectoire. Le problème est plus général. Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction α-höldérienne avec $0 < \alpha < 1$. À quelle(s) condition(s) sur $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ peut-on donner un sens (raisonnable) à $\int_0^T f dg$? La première idée est de considérer

$$\sum_{t_i \in \Delta} f_{t_i}(g_{t_{i+1}} - g_{t_i}) \text{ avec } \Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T\} \tag{3}$$

et de regarder ce qu'il se passe quand $|\Delta| \to 0$. Traitons le cas particulier où $T = 1$ (pour simplifier) et

$$\Delta = \Delta_n = \{k\, 2^{-n},\, k = 0, \ldots, 2^n - 1\} \text{ (dyadiques d'ordre } n \text{ de } [0,1]).$$

Si $t \in \Delta_n$, on note $t' = t + 2^{-n}$ son successeur et $\tau = \frac{t+t'}{2}$ le milieu de t et t'. Posons

$$u_n = \sum_{t \in \Delta_n} f_t(g_{t'} - g_t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \textstyle\sum_{t \in \Delta_n} f_t(g_\tau - g_t) + f_\tau(g_{t'} - g_\tau) - \sum_{t \in \Delta_n} f_t(g_{t'} - g_\tau) + f_t(g_\tau - g_t) \\ &= \textstyle\sum_{t \in \Delta_n} (f_\tau - f_t)(g_{t'} - g_\tau). \end{aligned}$$

D'où, si f est β-höldérienne:

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \|f\|_\beta \|g\|_\alpha \sum_{t \in \Delta_n} 2^{-n\beta} 2^{-n\alpha} = \|f\|_\beta \|g\|_\alpha \, 2^{n(1-\alpha-\beta)}.$$

En particulier, si $\alpha + \beta > 1$ alors (u_n) converge (vers un objet noté $\int_0^1 f dg$, et appelé *intégrale de Young* [15]).

Si $\alpha > 1/2$, on a la formule de changement de variables: si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathrm{C}^{1,1}$ et si $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ est C^1 alors, pour tout $t \in [0,1]$, l'intégrale de Young $\int_0^t \frac{\partial F}{\partial g}(g_s, a_s) dg_s$ existe et vérifie

$$F(g_t, a_t) = F(g_0, a_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial g}(g_s, a_s) dg_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial a}(g_s, a_s) a'_s ds.$$

Que faire si $\alpha < 1/2$? On peut utiliser la théorie des "rough paths" (trajectoires rugueuses) de Lyons [6]. L'idée est que, pour faire converger la somme de Riemann (3), il faut ajouter un terme correctif, construit à partir d'aires de Lévy (voir aussi Nourdin et Simon [10]).

ii) calcul de Malliavin. Deux bonnes références sont les articles de survol de Coutin [1] et de Nualart [11]. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert défini comme étant la fermeture de $\mathcal{E}$ pour le produit scalaire

$$\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t,s),$$

avec R_H défini par (1). On a vu que $B_t = \int_0^t K_H(t,s)dW_s$ avec W un mouvement brownien standard et K_H le noyau de Volterra défini par (2). Définissons $K_H^* : \mathcal{E} \to \mathrm{L}^2([0,T])$ par

$$(K_H^* \mathbf{1}_{[0,t]})(s) = K_H(t,s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s).$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} \langle K_H^* \mathbf{1}_{[0,t]}, K_H^* \mathbf{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathrm{L}^2} & = & \langle K_H(t,\cdot)\mathbf{1}_{[0,t]}, K_H(s,\cdot)\mathbf{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathrm{L}^2} \\ & = & \int_0^{s\wedge t} K_H(t,u)K_H(s,u)du \\ & = & R_H(t,s) \\ & = & \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}}. \end{array}$$

Donc K_H^* se prolonge en une isométrie de $\mathcal{H}$ sur un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2([0,T])$ et on a $\mathcal{H} = (K_H^*)^{-1}(\mathrm{L}^2([0,T]))$.

Remarque. On peut exprimer K_H^* en utilisant les intégrales dites fractionnaires: par exemple, si $H > 1/2$, on a

$$(K_H^* \varphi)(s) = \left[\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-1/2)} \right]^{1/2} \Gamma(H-1/2)\, s^{1/2-H}\, I_{T-}^{H-1/2} s^{H-1/2} \varphi(s)$$

où

$$I_{T-}^{H-1/2} f(t) = \Gamma(H-1/2)^{-1} \int_t^T (s-t)^{H-3/2} f(s) ds.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des variables aléatoires de la forme

$$F = f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$$

où $n \geq 1$ et $f \in \mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $F \in \mathcal{S}$, on définit la dérivée de Malliavin de F par

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \partial_i f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \mathbf{1}_{[0,t_i]}(t).$$

L'espace $\mathbb{D}^{1,2}$ est la fermeture de $\mathcal{S}$ par rapport à la norme

$$\|F\|_{1,2}^2 = \mathrm{E}|F|^2 + \mathrm{E}\|DF\|_{\mathcal{H}}^2.$$

L'opérateur divergence δ (aussi appelé: intégrale de Skorohod) est l'adjoint de D au sens suivant: s'il existe $c_u > 0$ tel que

$$|\mathrm{E}\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}| \leq c_u \|F\|_{\mathrm{L}^2}, \quad \forall F \in \mathcal{S}$$

alors $\delta(u)$ est défini par:

$$\mathrm{E}(F\delta(u)) = \mathrm{E}\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Habituellement, on écrit $\int_0^1 u_t \delta B_t$ au lieu de $\delta(u)$. Pourquoi? (c'est-à-dire pourquoi a-t-on envie de noter $\delta(u)$ comme une intégrale?) Essayons de répondre à cette question. On a, par une régression linéaire gaussienne:

$$\mathrm{E}(\varphi(B_t)B_s) = \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]}\rangle_{\mathcal{H}}\, \mathrm{E}(\varphi(B_t)B_t)\, t^{-2H}$$

et, par une intégration par parties (rappelons que $B_t \sim \mathrm{N}(0, t^{2H})$):

$$\mathrm{E}(\varphi'(B_t)) = \mathrm{E}(\varphi(B_t)B_t)\, t^{-2H}.$$

D'où, pour $F = \varphi(B_t)$ avec $\varphi \in \mathrm{C}_b^1$:

$$\mathrm{E}(F \sum u_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})) = \mathrm{E}\langle DF, \sum u_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{4}$$

si les u_i sont des réels non aléatoires. En fait, on a (en faisant un calcul similaire pour $F \in \mathcal{S}$ et en utilisant un argument de densité) que (4) est vraie pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Autrement dit:

$$\delta\left(\sum u_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}]}\right) = \sum u_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

La définition de l'intégrale de Skorohod des fonctions étagées est donc naturelle. D'autre part, quand u n'est plus déterministe, le fait que $\delta(u)$ est une intégrale peut être justifié par le fait suivant, quand $H > 1/2$: pour un processus u suffisamment régulier (au sens du calcul de Malliavin), on a que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^1 u_s(B_{s+\varepsilon} - B_s)ds$$

existe (la limite s'appelle alors *l'intégrale de Russo-Vallois* [12]) et vaut

$$\delta(u) + H(2H-1)\int_0^1 \int_0^1 D_s u_t |t-s|^{2H-2} ds dt.$$

L'intégrale de Skorohod apparait donc comme la somme d'une intégrale naturelle (à savoir l'intégrale de Russo-Vallois) et d'un terme dit de trace.

EDS dirigées par un mbf (pour simplifier, en dimension 1). Considérons

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds,\ t \in [0,1], \tag{5}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Problème: quel sens donner à $\int \sigma(X_s)dB_s$?

i) Cas "simple": $H > 1/2$. En choisissant l'intégrale de Young, on a existence et unicité d'une solution de (5) - sous des conditions raisonnables et classiques sur σ et b - dans la classe des processus à trajectoires α-höldériennes avec $\alpha > 1 - H$ (voir par exemple Ruzmaikina [13]). De plus, on a une représentation à la Doss-Sussmann [4, 14] de la solution:

$$X_t = \phi(B_t, Y_t)$$

avec

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sigma \circ \phi \quad \text{et} \quad \phi(0, y) = y,\ y \in \mathbb{R}$$

et

$$Y_t = x_0 + \int_0^t \frac{b \circ \phi}{\partial \phi / \partial y}(B_s, Y_s)ds,\ t \in [0,1].$$

En effet: en appliquant la formule de changement de variables, il vient

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x}(B_s, Y_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial y}(B_s, Y_s)dY_s \\ &= x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds. \end{aligned}$$

ii) Cas $H < 1/2$. Il faut utiliser les rough paths. En dimension quelconque, il n'est aujourd'hui possible de donner un sens à (5) qu'à condition que $H \in (1/4, 1)$ (résultat classique dû à Coutin et Qian [2]). Mais comme nous avons choisi ici de travailler en dimension un, on peut en tirer profit et utiliser les intégrales dites de Newton-Côtes (voir Nourdin et Simon [10]) pour obtenir l'existence et l'unicité dans (5) sans restriction sur H (le "seul" prix à payer est que plus H est proche de 0, plus la définition de l'intégrale de Newton-Côtes est compliquée).

Schémas d'approximation (tiré de Neuenkirch et Nourdin [8]). Une manière de contourner le problème de définir $\int \sigma(X_s)dB_s$ dans (5) est de regarder des schémas, par exemple celui d'Euler:

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{X}^{(n)}_{(k+1)/n} &= \widehat{X}^{(n)}_{k/n} + \sigma(\widehat{X}^{(n)}_{k/n})\Delta B_{k/n} + b(\widehat{X}^{(n)}_{k/n})\tfrac{1}{n} \\ \widehat{X}^{(n)}_0 &= x_0 \end{aligned} \right.$$

(dans toute cette section, on note $\Delta B_{k/n} = B_{(k+1)/n} - B_{k/n}$).

Question: $(\widehat{X}^{(n)})$ converge-t-il? (dans quel sens?) Si oui, vers quoi et à quelle vitesse?

Cette question est un peu difficile mais commençons par un cas d'école, celui où $\sigma(x) = x$, $b(x) = 0$ et $x_0 = 1$. Dans ce cas

$$\widehat{X}^{(n)}_{(k+1)/n} = \widehat{X}^{(n)}_{k/n} \left[1 + \Delta B_{k/n}\right],$$

autrement dit:

$$\widehat{X}^{(n)}_1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left[1 + \Delta B_{k/n}\right].$$

Mais $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$ donc

$$\widehat{X}^{(n)}_1 \approx \exp\left\{ B_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_{k/n})^2 \right\}.$$

Or, on a le bien-connu (*cf.* Section "Variation quadratique"):

Lemme. Quand $n \to \infty$:

$$n^{2H-1} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_{k/n})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} 1.$$

On en déduit que $(\widehat{X}^{(n)}_1)$ converge p.s. si et seulement si $H \geq 1/2$. Dans ce cas, quand $n \to \infty$:

$$\widehat{X}^{(n)}_1 \xrightarrow{\text{p.s.}} X_1 = \begin{cases} e^{B_1} & \text{si } H > 1/2 \\ e^{B_1 - 1/2} & \text{si } H = 1/2 \end{cases}$$

et, si $H > 1/2$:

$$n^{2H-1} \left[\widehat{X}^{(n)}_1 - X_1\right] \xrightarrow{\text{p.s.}} -\frac{X_1}{2} \neq 0.$$

Dans le cas général, c'est-à-dire pour σ et b quelconques, on peut démontrer que, lorsque $n \to \infty$:

$$n^{2H-1} \left[\widehat{X}^{(n)}_1 - X_1\right] \xrightarrow{\text{p.s.}} -\frac{1}{2} \int_0^1 \sigma'(X_s) D_s X_1 ds$$

où $D.X_1$ désigne la dérivée de Malliavin de X_1 par rapport à B.

Que faire quand $H < 1/2$? Il faut considérer d'autres schémas, plus compliqués. Un exemple est le schéma (implicite) dit de Crank-Nicholson:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{X}^{(n)}_{(k+1)/n} & = & \overline{X}^{(n)}_{k/n} + \frac{1}{2}\left(\sigma(\overline{X}^{(n)}_{k/n}) + \sigma(\overline{X}^{(n)}_{(k+1)/n})\right)\Delta B_{k/n} + b(\overline{X}^{(n)}_{k/n})\frac{1}{n} \\ \overline{X}^{(n)}_0 & = & x_0 \end{array} \right. .$$

Reprenons notre "cas d'école" (c'est-à-dire $\sigma(x) = x$, $b(x) = 0$ et $x_0 = 1$) avec ce nouveau schéma. On a

$$\overline{X}^{(n)}_{(k+1)/n} = \overline{X}^{(n)}_{k/n} \times \frac{1 + \frac{1}{2}\Delta B_{k/n}}{1 - \frac{1}{2}\Delta B_{k/n}},$$

autrement dit:

$$\overline{X}^{(n)}_1 = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \frac{1}{2}\Delta B_{k/n}}{1 - \frac{1}{2}\Delta B_{k/n}}.$$

Mais $\ln\left(\frac{1+x/2}{1-x/2}\right) \approx x + x^3/12$ donc

$$\overline{X}^{(n)}_1 \approx \exp\left\{B_1 + \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{k/n})^3\right\}. \tag{6}$$

Or, on a le bien-connu:

Lemme. Quand $n \to \infty$:

$$n^{3H-1/2}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{k/n})^3 \xrightarrow{\text{Loi}} \mathrm{N}(0, \sigma_H^2).$$

La difficulté vient ici du fait qu'on a aussi B_1 dans l'expression (6) et qu'il faut, pour pouvoir conclure, connaitre en fait la loi limite du *couple* $(B_1, n^{3H-1/2}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{k/n})^3)$:

Lemme. Quand $n \to \infty$:

$$\left(B_1, n^{3H-1/2}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{k/n})^3\right) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathrm{N}(0,1) \otimes \mathrm{N}(0, \sigma_H^2)$$

Remarquez qu'on obtient un phénomène intéressant d'indépendance à l'infini.

On en déduit que $(\overline{X}^{(n)}_1)$ converge en probabilité si et seulement si $H > 1/6$. Dans ce cas, quand $n \to \infty$:

$$\overline{X}^{(n)}_1 \xrightarrow{\text{Prob}} X_1 = \mathrm{e}^{B_1}$$

et

$$n^{3H-1/2}\left[\overline{X}_1^{(n)} - X_1\right] \xrightarrow{\text{Loi}} \sigma_H \, \frac{1}{12} \, \mathrm{e}^{B_1} \, G,$$

où $G \sim \mathrm{N}(0,1)$ est indépendante de B_1.

En général (avec $b = 0$ pour simplifier), on a le résultat suivant:

Theorem 1 *Supposons que $H \in (1/3, 1/2)$. Alors la suite $\{\overline{X}_1^{(n)}\}$ converge en probabilité vers X_1 quand $n \to \infty$ et, de plus,*

- *si σ est de la forme $\sigma(x)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (ce qui est en particulier vérifié par notre "cas d'école"), alors*

$$n^{3H-1/2}\left[\overline{X}_1^{n} - X_1\right] \xrightarrow{\text{Loi}} \sigma_H \, \frac{\alpha}{12} \, \sigma(X_1) \, G, \qquad \textit{quand } n \to \infty, \tag{7}$$

  avec $G \sim \mathrm{N}(0,1)$ indépendante de X_1.

- *si $\sigma \in \mathcal{C}_b^\infty$ est bornée, on a*

$$\textit{pour tout } \alpha < 3H - 1/2, \quad n^{\alpha}\left[\overline{X}_1^{(n)} - X_1^x\right] \xrightarrow{\text{Prob}} 0, \qquad \textit{quand } n \to \infty. \tag{8}$$

Dans le deuxième cas (cas général), on a certainement aussi convergence en loi, mais le problème reste ouvert. Avis aux amateurs(trices)!

References

[1] L. Coutin (2006), *An introduction to (stochastic) calculus with respect to fractional Brownian motion,* À paraitre au Séminaire de Probabilités (2006).

[2] L. Coutin and Z. Qian (2002), *Stochastic analysis, rough paths analysis and fractional Brownian motion,* Probab. Theory Rel. Fields **122**, 108-140.

[3] L. Decreusefond and A.S. Üstünel (1998): *Stochastic Analysis of the fractional Brownian motion.* Potential Analysis **10**, 177-214.

[4] H. Doss (1977): *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires.* Ann. Inst. Henri Poincaré **13**, 99-125.

[5] J. Istas and G. Lang (1997): *Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process.* Ann. Inst. Henri Poincaré **4**, 407-436.

[6] T. J. Lyons (1998): *Differential equations driven by rough signals.* Rev. Mat. Iberoamericana **14** (2), 215-310.

[7] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness (1968): *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*. SIAM Review **10** (4), 422-437.

[8] A. Neuenkirch and I. Nourdin (2006): *Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fBm*. À paraitre au J. of Theoret. Probab. Disponible sur ArXiv.

[9] I. Nourdin and T. Simon (2006): *On the absolute continuity of one-dimensional SDEs driven by a fractional Brownian motion.* Stat. and Probab. Letters **76** (9), 907-912.

[10] I. Nourdin and T. Simon (2006): *Correcting Newton-Côtes integrals by Lévy areas.* À paraître à Bernoulli. Disponible sur ArXiv.

[11] D. Nualart (2003): *Stochastic calculus with respect to the fractional Brownian motion and applications.* Contemporary Mathematics **336**, 3-39.

[12] F. Russo and P. Vallois (2005): *Elements of stochastic calculus via regularisation.* À paraître au Séminaire de Probabilités. Disponible sur ArXiv.

[13] A. Ruzmaikina (2000): *Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractional Brownian motion.* J. Statist. Phys. **100** (5-6), 1049-1069.

[14] H. J. Sussmann (1977): *An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on a sample point*. Bull. Amer. Math. Soc. **83**, 296-298.

[15] Young, L. C. (1936): *An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration.* Acta Math. **67**, 251-282.