EXAMEN 18 mai 2010

Probabilités approfondies MM011

Durée 3 heures. Documents interdits

Exercice 1 On considère une chaîne de Markov X_n sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, avec matrice de transition

$$Q(x,y) = \begin{cases} (1-p)p^y & x = 0,\ y \geq 0 \\ 1 & x > 0,\ y = x-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $p \in]0,1[$.

Sous $\mathbb{P}_x$, (X_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ avec probabilité de transition Q et état initial déterministe $X_0 = x \in \mathbb{N}$. Soient $S_0 := 0$, $S_{n+1} := \inf\{i > S_n : X_i = 0\}$, les retours successifs à l'état 0.

1. Quelles sont les classes de communication de la chaîne de Markov (X_n) ?
2. Montrer que $\mathbb{P}_0(S_1 = n) = (1-p)p^{n-1}$, $n \geq 1$ et dire si $\mathbb{E}_0(S_1)$ est fini ou infini. En déduire la classification des états en classes récurrentes/transitoires et récurrentes nulles/positives.
3. Montrer que la mesure $f(x) = (1-p)p^x$, $x \in \mathbb{N}$, est la seule mesure de probabilité invariante pour Q.
4. Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.
5. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$. Montrer que $(t_i)_{i\geq1}$ est sous $\mathbb{P}_0$ une suite indépendante et calculer $\mathbb{P}_0(t_i = n)$, $n \geq 1$.

Exercice 2 Soit $X = (X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, où $p \in]0,1[$. On considère la marche aléatoire simple $S = (S_n, n \geq 0)$ définie par $S_0 = 0 \in \mathbb{Z}$, et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \cdots, S_n)$, $n \geq 0$, la filtration naturelle de S.

Pour $a < -1 < 1 < b \in \mathbb{Z}$, on note $\tau_{a,b}$ (resp. τ_b) le temps de sortie de $]a,b[$ (resp. de $]-\infty, b[$) pour la marche aléatoire

$$\tau_{a,b} = \inf\{n \geq 0 :\ S_n = b \text{ ou } S_n = a\} \quad \text{et} \quad \tau_b = \inf\{n \geq 0 :\ S_n = b\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. De façon analogue, on note $\tau_a := \inf\{n \geq 0 :\ S_n = a\}$, temps de sortie de $]a, +\infty[$.

1. Montrer que $\tau_{a,b}$, τ_a et τ_b sont des temps d'arrêt et que $\tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b$.
2. Vérifier que $\tau_a \geq |a|$ et que $\tau_{a,b} \to \tau_b$ p.s. en croissant si $a \downarrow -\infty$.

On suppose dorénavant que $p \neq 1/2$. On pose $q = 1 - p$.

3. Montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que $\tau_{a,b}$ est p.s. fini. Montrer que $\tau_{a,b}$ n'est pas p.s. borné.
4. Pour $t \geq 0$ soit $s := pe^t + qe^{-t}$. Montrer que $M_n := e^{tS_n} s^{-n}$, $n \geq 0$, est une martingale. Si $s > 1$, calculer, en considérant d'abord les temps d'arrêt $\tau_{a,b} \wedge n$,

$$e^{at}\,\mathbb{E}\left(s^{-\tau_{a,b}} \mathbb{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=a\}}\right) + e^{bt}\,\mathbb{E}\left(s^{-\tau_{a,b}} \mathbb{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=b\}}\right).$$

On suppose maintenant que $p > q$.

5. Pour $t \geq 0$ soit $s(t) := pe^t + qe^{-t}$. Montrer que $[0, +\infty[\ni t \mapsto s(t) \in [1, +\infty[$ est une bijection croissante. Calculer l'inverse $[1, +\infty[\ni s \mapsto t(s) \in [0, +\infty[$ de cette bijection.
6. En prenant avec soin la limite $a \downarrow -\infty$ dans la formule trouvée au point 4, calculer la fonction génératrice de τ_b, définie par

$$g_b(s) := \mathbb{E}(s^{-\tau_b}\, \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}), \qquad s > 1.$$

7. Calculer $\mathbb{P}(\tau_b < +\infty)$ et, en dérivant g_b, $\mathbb{E}(\tau_b)$.

On suppose maintenant que $p < q$.

8. Pour $t \geq 0$ soit $s(t) := pe^t + qe^{-t}$. Montrer qu'il existe un réel positif t_1 tel que la restriction de $t \mapsto s(t)$ à $[t_1, \inf[$ est une bijection croissante sur $[1, +\infty[$. Calculer l'inverse $[1, +\infty[\ni s \mapsto t(s) \in [t_1, +\infty[$ de cette bijection.
9. En prenant avec soin la limite $a \downarrow -\infty$ dans la formule trouvée au point 4, calculer la fonction génératrice de τ_b, définie par

$$g_b(s) := \mathbb{E}(s^{-\tau_b}\, \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}), \qquad s > 1.$$

10. Calculer $\mathbb{P}(\tau_b < +\infty)$ et $\mathbb{E}(\tau_b)$.

Corrigé (MM011 Probabilités approfondies, 18 mai 2010)

Correction de l'exercice 1 On note $f(x) := (1-p)p^x$, $x \geq 0$.

1. L'état 0 conduit à tout état $x > 0$ car $Q(0, x) = f(x) > 0$; tout état $x > 0$ conduit à $x - 1$ et donc à 0 après x étapes. La chaîne est donc irréductible.
2. Par les définitions, on voit que

   $$\mathbb{P}_0(S_1 = n) = \mathbb{P}_0(X_n = 0, X_{n-1} = 1, \ldots, X_1 = n-1) = \mathbb{P}_0(X_1 = n-1) = f(n).$$

   Donc $\mathbb{P}_0(S_1 < +\infty) = \sum_n f(n) = 1$ et la chaîne est irréductible récurrente. En outre

   $$\mathbb{E}_0(S_1) = \sum_{n \geq 0} n\, \mathbb{P}_0(S_1 = n) = \sum_{n \geq 0} n\, (1-p)p^n < +\infty$$

   donc la chaîne est récurrente positive.
3. On voit que

   $$\sum_x f(x)\, Q(x, y) = f(y+1) + f(0)\, f(y) = (1-p)p^y(p + 1 - p) = f(y)$$

   donc f est invariante. La mesure de probabilité invariante est unique car la chaîne est irréductible récurrente positive.
4. La chaîne est irréductible, récurrente positive et apériodique, car $Q(0, 0) = 1 - p > 0$. Donc

   $$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = f(y)$$

   pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.
5. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$. On peut voir que $t_{i+1} = S_1 \circ \theta_{S_i}$, c'est à dire le premier temps de retour à 0 après S_i, pour tous $i \geq 0$. Par la propriété forte de Markov, on sait que la suite $(t_i)_{i \geq 1}$ est sous $\mathbb{P}_0$ une suite iid et

   $$\mathbb{P}_0(t_i = n) = \mathbb{P}_0(t_1 = n) = \mathbb{P}_0(S_1 = n) = f(n), \qquad n \geq 1.$$

Correction de l'exercice 2 Soit $X = (X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, où $p \in]0, 1[$. On considère la marche aléatoire simple $S = (S_n, n \geq 0)$ définie par $S_0 = 0 \in \mathbb{Z}$, et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On note $(\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \cdots, S_n), n \geq 1)$ la filtration naturelle de S.

1. Nous avons $\{\tau_a = n\} = \{X_i \neq a, \forall i < n, X_n = a\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{\tau_{a,b} = n\} = \{X_i \notin \{a, b\}, \forall i < n, X_n \in \{a, b\}\} \in \mathcal{F}_n$.

2. Puisque la chaîne fait des sauts de taille 1, pour arriver à a il faut au moins $|a|$ sauts car on part de 0, donc $\tau_a \geq |a|$. On peut aussi remarquer que $|S_n| \leq n$ et donc $|a| = |S_{\tau_a}| \leq \tau_a$. Donc $\tau_a \to +\infty$ si $a \downarrow -\infty$. Or forcément $X_i > a-1$ pour tout $i \leq \tau_a$ et donc $\tau_{a-1} > \tau_a$. On obtient que $\tau_{a,b} \to \tau_b$ p.s. en croissant si $a \downarrow -\infty$.

On suppose dorénavant que $p \neq 1/2$. On pose $q = 1-p$.

3. Si $p > 1/2$ alors par la loi forte des grands nombres $S_n/n \to 2p-1 > 0$ p.s. quand $n \to +\infty$. Donc $\tau_b < +\infty$ p.s. et $\tau_{a,b} \leq \tau_b$. Si $p < 1/2$ alors par la loi forte des grands nombres $S_n/n \to 2p-1 < 0$ p.s. quand $n \to +\infty$. Donc $\tau_a < +\infty$ p.s. et $\tau_{a,b} \leq \tau_a$.
   D'autre côté $\tau_{a,b}$ n'est pas p.s. borné car $\mathbb{P}(\tau_{a,b} \geq 2n) > 0$ for all $n \geq 0$, car $\{\tau_{a,b} \geq 2n\} \supset \{X_{2i} = 1, X_{2i-1} = -1, i = 1, \ldots, n\}$ et $\mathbb{P}(X_{2i} = 1, X_{2i-1} = -1, i = 1, \ldots, n) = (pq)^n > 0$. Donc il n'existe aucune constante $M > 0$ t.q. $\mathbb{P}(\tau_{a,b} \leq M) = 1$.
4. Puisque $\mathbb{E}(e^{tX_1}) = pe^t + qe^{-t} = s$, on a

$$\mathbb{E}(e^{tS_{n+1}} s^{-n-1} \,|\, \mathcal{F}_n) = e^{tS_n} s^{-n-1} \mathbb{E}(e^{tX_{n+1}}) = e^{tS_n} s^{-n}.$$

   Soit $s > 1$. Le temps d'arrêt $\tau_{a,b} \wedge n$ est borné, donc par le Théorème d'arrêt borné
$$1 = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{\tau_{a,b}\wedge n}) = \mathbb{E}\left(e^{tS_{\tau_{a,b}\wedge n}} s^{-\tau_{a,b}\wedge n}\right).$$

   Remarquons que $|S_{\tau_{a,b}\wedge n}| \leq |a| \vee b$, $\tau_{a,b}$ est p.s. fini et $s > 1$, donc par convergence dominée

$$1 = \mathbb{E}\left(e^{tS_{\tau_{a,b}\wedge n}} s^{-\tau_{a,b}\wedge n}\right) \to \mathbb{E}\left(e^{tS_{\tau_{a,b}}} s^{-\tau_{a,b}}\right).$$

   Puisque $S_{\tau_{a,b}} \in \{a, b\}$, on obtient

$$1 = e^{at}\, \mathbb{E}\left(s^{-\tau_{a,b}} \mathbb{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=a\}}\right) + e^{bt}\, \mathbb{E}\left(s^{-\tau_{a,b}} \mathbb{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=b\}}\right). \tag{1}$$

On suppose maintenant que $p \geq q$.

5. Pour $t \geq 0$ soit $s(t) := pe^t + qe^{-t}$. Si on dérive on obtient $s'(t) = pe^t - qe^{-t} \geq (p-q)e^{-t} > 0$, avec $s(0) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} s(t) = +\infty$. Donc pour tout $t \geq 0$ on a $s \geq 1$ et $[0, +\infty[\ni t \mapsto s \in [1, +\infty[$ est une bijection croissante.
6. Si $s := pe^{t(s)} + qe^{-t(s)}$, alors $pe^{2t(s)} - se^{t(s)} + q = 0$ et donc

$$e^{t(s)} \in \left\{ \frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}, \frac{s - \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p} \right\}, \qquad s \geq 1,$$

et on obtient que

$$e^{t(s)} = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}, \qquad s \geq 1,$$

car on peut voir que l'autre solution est inférieure à 1 et on veut $e^{t(s)} \geq 1$. On peut aussi remarquer que $s(t) = pe^t + qe^{-t} \geq 2\sqrt{pq}$, et donc le terme sous la racine est bien toujours positif. En prenant la limite $a \downarrow -\infty$ dans (1), on obtient

$$1 = e^{bt(s)}\, \mathbb{E}\left(s^{-\tau_b} \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}\right), \qquad s > 1,$$

et donc

$$g_b(s) := \mathbb{E}(s^{-\tau_b}\, \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}) = e^{-t(s)b} = \left(\frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}\right)^{-b}, \qquad s > 1.$$

7. Si on fait tendre $s \downarrow 1$ dans l'expression de $g_b(s)$, on obtient $\mathbb{P}(\tau_b < +\infty) = 1$, car $e^{t(s)} \downarrow 1$. En dérivant g_b on obtient

$$g_b'(s) = \frac{d}{ds}\, \mathbb{E}(e^{-\tau_b \log s}\, \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}) = -\frac{1}{s}\, \mathbb{E}(\tau_b\, s^{-\tau_b}\, \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}), \qquad s > 1$$

et en prenant la limite $s \downarrow 1$, par convergence monotone

$$\lim_{s \downarrow 1} g_b'(s) = -\mathbb{E}(\tau_b\, \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}) = \mathbb{E}(\tau_b)$$

car $\mathbb{P}(\tau_b < +\infty) = 1$. Or

$$g_b'(s) = -b \left(\frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}\right)^{-b-1} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 - 4pq}}\right), \qquad s > 1$$

et on obtient

$$\mathbb{E}(\tau_b) = b \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4pq}}{2p}\right)^{-b-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 4pq}}\right) = b\, \frac{2p}{2p-1},$$

car $q = 1 - p$, $p > 1/2$ et

$$\sqrt{1 - 4pq} = \sqrt{1 - 4p(1-p)} = \sqrt{(2p-1)^2} = |2p - 1| = 2p - 1.$$

On suppose maintenant que $p < q$.

8. Pour $t \geq 0$ soit $s := pe^t + qe^{-t}$. Si on dérive on obtient $s'(t) = pe^t - qe^{-t} \geq 0$ ssi $e^{2t} \geq q/p$, i.e. ssi $t \geq t_1 := \frac{1}{2}\log(q/p)$, avec $s(t_1) = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} s(t) = +\infty$. Donc pour tout $t \geq t_1$ on a $s \geq 1$ et $[t_1, +\infty[\ni t \mapsto s \in [1, +\infty[$ est une bijection croissante.

9. Comme au point 6, on trouve

$$e^{t(s)} = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}, \qquad s \geq 1,$$

En prenant la limite $a \downarrow -\infty$ dans (1), on obtient

$$1 = e^{bt(s)} \, \mathbb{E}\left(s^{-\tau_b} \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}\right), \qquad s > 1,$$

et donc

$$g_b(s) := \mathbb{E}(s^{-\tau_b} \, \mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}}) = e^{-t(s)b} = \left(\frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}\right)^{-b}, \qquad s > 1.$$

10. Si on fait tendre $s \downarrow 1$ dans l'expression de $g_b(s)$, on obtient $\mathbb{P}(\tau_b < +\infty) = (p/q)^{b/2}$, car $e^{t(s)} \downarrow (q/p)^{1/2}$. Puisque $\mathbb{P}(\tau_b = +\infty) = 1 - (p/q)^{b/2} > 0$, alors $\mathbb{E}(\tau_b) = +\infty$.