

EXAMEN 7 janvier 2011

Finance 1

Durée 2 heures

Exercice 1 On considère un modèle de marché de type arbre binomial à trois étapes avec un actif risqué S et un actif non risqué. On suppose $S_0 = 2000\$$ et à chaque étape la valeur de S peut être multipliée par $u = 1.1$ ou $d = 0.9$. Le rendement non risqué sur chaque période est tel que $e^r = 1.02$.

On considère dans cet exercice des options vanilles avec strike $K = 1900\$$.

1. Un put européen avec un tel prix d'exercice est-il *at-*, *out-of-* ou *in-the-money*?
2. Un trader vend un tel put européen d'échéance $N = 3$. Calculer la prime encaissée au temps 0 (avec un seul calcul).
3. Calculer le prix $(P_t^A)_{t=0,\dots,3}$ du put européen pour tout temps jusqu'à l'échéance.
4. Calculer le prix C_0^E au temps $t = 0$ d'un call européen avec mêmes prix d'exercice $K = 1900\$$, et échéance $N = 3$.
5. Détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture du put européen au temps $t = 0$.
6. Un autre trader vend un put américain avec mêmes strike et échéance. Calculer le prix du put américain au temps 0.
7. Calculer le temps minimal d'exercice du put américain et sa loi.

Exercice 2 On se place dans un marché qui satisfait les hypothèses de Black-Scholes avec un seul actif risqué S et un actif non risqué avec rendement fixe $r > 0$. Un trader, partant d'un capital nul, crée au temps $t = 0$ un portefeuille en achetant une unité de l'actif S , en vendant un call européen avec S comme sous-jacent, échéance T et strike $K > 0$ (*call couvert*), et en empruntant ou en plaçant des sommes d'argent si nécessaire.

1. Déterminer la valeur de ce portefeuille pour tout $t \in [0, T]$.
2. Calculer la perte maximale et le gain maximal que peut enregistrer le trader à l'échéance.
3. Calculer le point mort de cette stratégie, c'est-à-dire la valeur de S_T à l'échéance telle que le trader n'enregistre ni gains ni pertes.
4. En déduire le prix au temps $t \in [0, T]$ d'une option européenne avec payoff $f(S_T) = \min\{S_T, K\}$ et échéance T .
5. En déduire le portefeuille de couverture de la même option.

Corrigé (Finance 1, 16 mai 2009)

Correction de l'exercice 1 Sous la mesure risque-neutre \mathbb{P}^* , les probabilités de hausse/baisse sont respectivement

$$p = \frac{e^r - d}{u - d} = \frac{3}{5}, \quad q = \frac{u - e^r}{u - d} = \frac{2}{5}.$$

1. Puisque au temps $t = 0$ on a $K - S_0 = -100\$ < 0$, le put est out-of-the money, mais pas loin d'être at-the money.
2. La valeur du put au temps $t = 0$ est donnée par le calcul de l'espérance

$$P_0 = e^{-rN} \mathbb{E}^*((K - S_N)^+) = \frac{1}{(1.02)^3} \left(118 + \binom{3}{1} \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 442 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \right) = 58.68.$$

3. Le put est calculé facilement avec l'arbre binomial.
4. Par la formule de parité Call-Put on a

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(N-t)},$$

et donc pour $t = 0$

$$C_0 = P_0 + S_0 - Ke^{-rN} = 58.68 + 2000 - 1900 * (1.02)^{-3} = 268.26.$$

5. Au temps $t = 0$, le trader vend l'option put et reçoit la somme 58.68\$. Il crée un portefeuille constitué de α_1 unités d'actif risqué et β_1 unités d'actif non risqué. Les contraintes sont

$$58.68 = \alpha_1 * 2000 + \beta_1, \quad 122.40 = \alpha_1 * 1800 + \beta_0 * 1.02;$$

si on multiplie la première équation par 1.02 et on soustrait la seconde on obtient $\alpha_1 = -0.26$ et $\beta_1 = 578.8$. Donc le trader doit vendre à découvert 0.26 unités d'actif risqué, recevoir pour cette vente 520\$ et placer à la banque la somme de 578.8\$ égale à la prime sommée au prix des 0.26 unités d'actif risqué.

6. Le prix du put américain au temps $t = 0$ est 64.4\$.
7. La loi du premier temps d'exercice est $\mathbb{P}(\nu_0 = 2) = (3/5)^2 + (2/5)^2 = 0.52$, $\mathbb{P}(\nu_0 = 3) = 2(3/5)^2 2/5 + 2(2/5)^2 3/5 = 0.48$.

Correction de l'exercice 2 Le trader veut acheter une unité d'actif risqué au prix de S_0 et vendre un call au prix de $C_0 = S_0 N(d_1) - e^{-rT} N(d_2)$. Puisque $S_0 - C_0 = S_0(1 - N(d_1)) + e^{-rT} N(d_2) > 0$, cela signifie que l'unité d'actif risqué est plus chère que le call, et pour créer ce portefeuille partant d'un capital nul le trader doit emprunter la somme $S_0 - C_0 = S_0 N(-d_1) + e^{-rT} N(d_2)$.

1. Au temps $t \in [0, T]$, le portefeuille a une valeur $S_t - C_t - e^{rt}(S_0 - C_0)$, où C_t est la valeur d'un call européen donnée par la formule de Black-Scholes.
2. A l'échéance, le portefeuille vaut

$$S_T - C_T - e^{rT}(S_0 - C_0) = S_T - (S_T - K)^+ - e^{rT}(S_0 - C_0).$$

Or, $S_T - (S_T - K)^+ = \min\{S_T, K\}$, comme on l'a vu plusieurs fois en cours. Donc la valeur du portefeuille est $\min\{S_T, K\} - e^{rT}(S_0 - C_0)$. La fonction $f(x) = \min\{x, K\} - y$, $x \geq 0$, admet comme valeur maximum $f(K) = K - y$ et comme valeur minimum $f(0) = -y$. Ces valeurs constituent respectivement le gain et la perte maximum à l'échéance.

3. Pour calculer le point mort de cette stratégie, il suffit d'imposer $f(x) = 0$, et on trouve que $x = y = e^{rT}(S_0 - C_0)$. Il faut juste vérifier que $f(K) \geq 0$, i.e. $K \geq e^{rT}(S_0 - C_0)$. Or par l'inégalité de Jensen

$$\mathbb{E}^*((S_T - K)^+) \geq (\mathbb{E}^*(S_T) - K)^+ = (e^{rT}S_0 - K)^+$$

et donc $e^{rT}(S_0 - C_0)$ est égal à

$$e^{rT}S_0 - \mathbb{E}^*((S_T - K)^+) \leq e^{rT}S_0 - (e^{rT}S_0 - K)^+ = \min\{e^{rT}S_0, K\} \leq K.$$

4. Une option avec payoff $g(S_T) = \min\{S_T, K\}$ aura comme prix au temps $t \in [0, T]$ la valeur $V_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} \min\{S_T, K\} | \mathcal{F}_t)$. Puisque $\min\{S_T, K\} = S_T - (S_T - K)^+$, on trouve

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} \min\{S_T, K\} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}(S_T - (S_T - K)^+) | \mathcal{F}_t) \\ &= S_t - C_t. \end{aligned}$$

5. Il faut d'abord déterminer le processus prévisible α_t tel que $\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \alpha_u d\tilde{S}_u$. Par les résultats du cours sur le portefeuille de couverture d'un call européen nous avons

$$\tilde{V}_t = \tilde{S}_t - \tilde{C}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t d\tilde{S}_u - \tilde{C}_0 - \int_0^t N(d_1(S_u)) d\tilde{S}_u.$$

Nous donc trouvons que

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t (1 - N(d_1(S_u))) d\tilde{S}_u = \tilde{V}_0 + \int_0^t N(-d_1(S_u)) d\tilde{S}_u$$

i.e. $\alpha_u = N(-d_1(S_u))$ et par conséquent $\beta_u = \tilde{V}_u - \alpha_u \tilde{S}_u$.