PARTIEL 25 octobre 2007

Probabilités approfondies MM011

Durée 2 heures. Documents interdits

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la correction. Toute application d'un résultat prouvé ou énoncé pendant le cours doit être signalée et justifiée avec précision.

Exercice 1 Soit (X_n) une suite indépendante de variables aléatoires exponentielles avec loi

$$\mathbb{P}(X_n > x) = e^{-\lambda_n x}, \qquad \forall\, x > 0,$$

où $\lambda_n > 0$. On rappelle que $\mathbb{E}(X_n) = 1/\lambda_n$.

1. Prouver que X_n tend vers 0 dans L^1 ssi $\lambda_n \to +\infty$.
2. Prouver que X_n tend vers 0 en probabilité ssi X_n tend vers 0 dans L^1.
3. Donner, à l'aide du Lemme de Borel-Cantelli, une condition nécessaire et suffisante (du type "pout tout $\varepsilon > 0$ la série...") sur la suite (λ_n) pour que X_n converge vers 0 presque sûrement. Donner un exemple d'une suite (λ_n) pour laquelle X_n converge vers 0 presque sûrement.
4. Prouver que si $\lambda_n \to +\infty$ et $\sup_n(\lambda_n/\log n) < +\infty$, alors X_n ne converge pas presque sûrement.

Exercice 2 Soient X et Y deux variables réelles gaussiennes indépendantes, avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$, et soit $Z = X + Y$.

1. Soit $W = (X - \frac{1}{3}Z)$. Prouver que $X = \frac{1}{3}Z + W$ et que le couple (W, Z) est indépendant.
2. En déduire l'espérance conditionnelle et la loi conditionnelle de X sachant Z.
3. En écrivant $Y = Z - X = \frac{2}{3}Z - W$, calculer $\mathbb{E}(XY \mid Z)$ et $\mathbb{E}(XYZ \mid Z)$.

(tourner la page ⟶)

Exercice 3 On considère un jeu de hasard où à chaque partie la probabilité de gagner pour le joueur décroît fortement, mais au même temps en cas de victoire le gain croît aussi fortement. Plus précisément, la suite des gains est une suite indépendante (Y_n) telle que :

$$\mathbb{P}(Y_n = e^n - 1) = e^{-n}, \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - e^{-n}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Soient X_n, S_n définis par

$$X_0 = 0, \qquad X_n = Y_1 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 1,$$

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}, \quad n \geq 1.$$

X_n est donc le capital du joueur après l'énième partie.

1. Montrer que (X_n) est une martingale et calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n \{Y_n \neq -1\}) = 0$.
3. Montrer que

$$\liminf_n \,\{Y_n = -1\} \subset \left\{\lim_n S_n = -1\right\} \subset \left\{\lim_n X_n = -\infty\right\}$$

   et en déduire que p.s. S_n converge vers -1 et X_n converge vers $-\infty$.
4. La loi des grands nombres est-elle valide pour la suite (Y_n) ? Pourquoi ?
5. Calculer pour tout $n \geq 1$ la distance entre S_n et -1 dans L^1 et dans L^2 (remarquer que $Y_n \geq -1$ p.s.).
6. Remarquer que $\lim_n S_n \in L^1$ mais $\mathbb{E}(\lim_n S_n) \neq \lim_n \mathbb{E}(S_n)$ et commenter. Les suites (S_n) et (X_n) sont-elles uniformément intégrables ?
7. Quelle est l'interprétation des résultats précédents pour le joueur ? Le jeu est-il "équitable" ?

Correction

Solution de l'exercice 1 (6 points sur 20)

1. Puisque $X_n > 0$ p.s. on a $\mathbb{E}(|X_n - 0|) = \mathbb{E}(X_n) = 1/\lambda_n$. Donc $\mathbb{E}(|X_n - 0|) \to 0$ ssi $1/\lambda_n \to 0$ et donc ssi $\lambda_n \to \infty$.
2. X_n tend vers 0 en probabilité ssi pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) \to 0$. Mais $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = e^{-\varepsilon\lambda_n} \to 0$ ssi $\lambda \to +\infty$, donc ssi $X_n \to 0$ dans L^1 par la réponse à la question précédante.
3. X_n converge vers 0 presque sûrement ssi
$$\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n - 0| > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\limsup_n \{X_n > \varepsilon\}) = 0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$
Un condition suffisante pour cette propriété est, par le Lemme de Borel-Cantelli, que
$$\sum_n \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \sum_n e^{-\varepsilon\lambda_n} < +\infty, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$
Par l'indépendance des (X_n), cette condition est aussi nécessaire. En effet, si pour un $\varepsilon > 0$
$$\sum_n \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \sum_n e^{-\varepsilon\lambda_n} = +\infty,$$
alors par le Lemme de Borel-Cantelli et l'indépendance on trouve
$$\mathbb{P}(\limsup_n \{X_n > \varepsilon\}) = 1.$$
Nous avons donc trouvé qu'une condition sur (λ_n) nécessaire est suffisante pour que X_n converge vers 0 presque sûrement est :
$$\sum_n e^{-\varepsilon\lambda_n} < +\infty, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$
Un exemple est $\lambda_n = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Puisque $\lambda_n \to +\infty$, alors X_n converge vers 0 en probabilité. Puisque $\sup_n(\lambda_n/\log n) =: M < +\infty$, alors
$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = e^{-\varepsilon\lambda_n} \geq e^{-\varepsilon M \log n} = n^{-\varepsilon M}.$$

Donc si $\varepsilon = 1/M > 0$, alors

$$\sum_n \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \geq \sum_n n^{-1} = +\infty,$$

et par la réponse à la question précédante, X_n ne converge pas vers 0 presque sûrement. Puisque X_n converge vers 0 en probabilité, X_n ne peut pas converger p.s. vers une variable Y telle que $\mathbb{P}(Y \neq 0) > 0$. Donc, X_n ne converge pas p.s.

Solution de l'exercice 2 (4.5 points sur 20)
Soient X et Y deux variables réelles gaussiennes indépendantes, avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$, et soit $Z = X + Y$.

1. Le couple $(W, Z) = (\frac{2}{3}X - \frac{1}{3}Y, X + Y)$ est gaussien car fonction linéaire du couple gaussien (X, Y). Un couple gaussien est indépendant ssi sa covariance est nulle. Or

   $$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(W, Z) = \mathrm{Cov}(\frac{2}{3}X - \frac{1}{3}Y, X + Y) = \\ &= \frac{2}{3}\mathrm{Var}(X) - \frac{1}{3}\mathrm{Cov}(Y, X) + \frac{2}{3}\mathrm{Cov}(X, Y) - \frac{1}{3}\mathrm{Var}(Y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}2 = 0. \end{aligned}$$

   On peut remarquer que la loi de W est gaussienne avec moyenne et variance

   $$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(X - \frac{1}{3}Z) = 0,$$

   $$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(\frac{2}{3}X - \frac{1}{3}Y) = \frac{4}{9}\mathrm{Var}(X) + \frac{1}{9}\mathrm{Var}(Y) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

2. Puisque $X = \frac{1}{3}Z + W$ avec W indépendant de Z, on a que

   $$\mathbb{E}(X|Z) = \mathbb{E}(\frac{1}{3}Z + W|Z) = \frac{1}{3}Z + \mathbb{E}(W) = \frac{1}{3}Z.$$

   La loi conditionnelle de X sachant Z est gaussienne avec moyenne $\frac{1}{3}Z$ et variance $\mathrm{Var}(W) = \frac{2}{3}$.

3. On a

   $$XY = (\frac{1}{3}Z + W)(\frac{2}{3}Z - W) = \frac{2}{9}Z^2 - \frac{1}{3}ZW - W^2,$$

donc

$$\mathbb{E}(XY \mid Z) = \frac{2}{9}Z^2 - \frac{1}{3}Z\,\mathbb{E}(W) - \mathbb{E}(W^2) = \frac{2}{9}Z^2 - \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}(XYZ \mid Z) = Z\,\mathbb{E}(XY \mid Z) = \frac{2}{9}Z^3 - \frac{2}{3}Z.$$

On peut remarquer que $\mathbb{E}(XY \mid Z)$ est différent de $\mathbb{E}(X \mid Z)\,\mathbb{E}(Y \mid Z)$, malgré l'indépendance de X et Y ; en effet, sachant Z, on a $Y = Z - X$ et donc X et Y ne sont pas indépendants conditionnellement à Z.

Solution de l'exercice 3 (9.5 points sur 20)

1. On commence par remarquer que pour tout n, Y_n est intégrable, car bornée : $|Y_n| \le e^n$. Donc X_n est intégrable car somme de variables intégrables. En plus

$$\mathbb{E}(Y_n) = -(1 - e^{-n}) + e^{-n}(e^n - 1) = 0,$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Y_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = 0, \quad \mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_n) = 0.$$

Si $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, alors par l'indépendance de Y_{n+1} de $(Y_1, \ldots, Y_n)$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}) = X_n.$$

2. On sait que $\mathbb{P}(Y_n \neq -1) = e^{-n}$, donc

$$\sum_n \mathbb{P}(Y_n \neq -1) = \sum_n e^{-n} < +\infty$$

et par le Lemme de Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\limsup_n \{Y_n \neq -1\}) = 0$.

3. Si $\omega \in \liminf_n \{Y_n = -1\}$ alors il existe $N = N(\omega)$ tel que $Y_k = -1$ pour tout $k \ge N$. Donc pour $n \ge N$

$$S_n(\omega) = \frac{Y_1 + \cdots + Y_N}{n} + \frac{Y_{N+1} + \cdots + Y_n}{n} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_N}{n} - \frac{n - N}{n}$$

qui converge vers -1 si $n \to \infty$. On a prouvé que $\liminf_n \{Y_n = -1\} \subset \{\lim_n S_n = -1\}$.
Si $\omega \in \{\lim_n S_n = -1\}$, alors il est clair que $X_n(\omega) = nS_n(\omega) \to -\infty$ si $n \to \infty$. Donc $\{\lim_n S_n = -1\} \subset \{\lim_n X_n = -\infty\}$.
Puisque $\mathbb{P}(\liminf_n \{Y_n = -1\}) = 1 - \mathbb{P}(\limsup_n \{Y_n \neq -1\}) = 1$, on conclut.

4. Si la loi des grands nombres était valide pour la suite (Y_n), on aurait $\lim_n S_n = \mathbb{E}(Y_1) = 0$ p.s.. En effet, les (Y_n) sont indépendants mais pas identiquement distribués.
5. Puisque $Y_n \geq -1$ p.s. on a $S_n \geq -1$ p.s. et $|S_n + 1| = S_n + 1$ p.s., donc

$$\mathbb{E}(|S_n + 1|) = \mathbb{E}(S_n + 1) = \mathbb{E}(S_n) + 1 = 1.$$

Donc S_n converge vers -1 p.s. mais pas dans L^1.

$$\mathbb{E}((S_n + 1)^2) = \mathbb{E}(S_n^2) + 2E(S_n) + 1 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k^2) + 1$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(e^k - 1) + 1 = \frac{e}{n^2}\frac{e^n - 1}{e - 1} - \frac{1}{n} + 1.$$

La distance entre S_n et -1 dans L^2 tend même vers $+\infty$.
6. $\lim_n S_n = -1 \in L^1$ mais $0 = \mathbb{E}(\lim_n S_n) \neq \lim_n \mathbb{E}(S_n) = -1$. Ceci implique que (S_n) n'est pas uniformément intégrable.

Pour voir que (X_n) n'est pas uniformément intégrable, on peut remarquer que $|X_n| \to +\infty$ p.s. et donc par le lemme de Fatou :

$$+\infty = \mathbb{E}(\liminf_n |X_n|) \leq \liminf \mathbb{E}(|X_n|) \leq \sup_n \mathbb{E}(|X_n|).$$

Donc $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) = +\infty$ et la suite n'est pas bornée dans L^1.
7. Avec probabilité 1, le joueur va perdre toute les parties à partir d'un certain instant. Selon la définition usuelle, un jeu est équitable si le gain attendu de chaque partie est nul. C'est le cas ici, mais il est clair que le jeu est plutôt défavorable au joueur, car son capital converge vers $-\infty$ presque sûrement.