

EXAMEN 14 janvier 2009

Finance 1

Durée 2h30 heures

Exercice 1 On considère un modèle de marché de type arbre binomial à trois étapes avec un actif risqué S et un actif non risqué. On suppose $S_0 = 1000\$$ et à chaque étape la valeur de S peut être multipliée par $u = 1.5$ ou $d = 0.5$ (voir l'image dans le fichier exo.pdf). En particulier, Le rendement non risqué sur chaque période est tel que $e^r = 5/4$.

1. Un trader vend un put européen de prix d'exercice 875\$ et échéance $N = 3$, et commence sa stratégie de couverture du risque. Calculer le prix du put européen $(P_t)_{t=0,\dots,3}$.
2. En déduire les prix au temps 0 d'un call européen et d'un call américain avec mêmes prix d'exercice 875\$ et échéance $N = 3$.
3. Détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture au temps $t = 0$.
4. Un autre trader a acheté le put européen décrit ci-dessus et le finance en vendant le portefeuille de couverture. A la dernière étape un événement imprévu fait augmenter la volatilité du sous-jacent : le facteur de hausse est maintenant $u' = 2$ et le facteur de baisse $d' = 1/5$. Ce changement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du put ? Bien justifier la réponse. Si l'option avait été un Call européen, la réponse aurait-elle été la même ?

Exercice 2 On se place dans un marché qui satisfait les hypothèses de Black-Scholes avec un seul actif risqué S et un actif non risqué. Le rendement non risqué est $r > 0$. On considère une option européenne avec échéance T et payoff

$$C_T := f_1(S_T), \quad f_1(x) := (\log(x/K))^+, \quad x > 0,$$

où $K > 0$ est appelé strike.

1. Dessiner le graphique de f_1 .
2. Calculer la valeur $(C_t)_{t \in [0, T]}$ de l'option et la fonction $F(t, x)$ telle que $C_t = F(t, S_t)$.
3. Calculer le Δ et le Γ de l'option.
4. Calculer le portefeuille de couverture de l'option.
5. Montrer qu'il existe une constante c_0 , un mouvement Brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ et un processus $(\gamma_u)_u$ borné et adapté à la filtration de W tels que

$$(\log(S_T/K))^+ = c_0 + \int_0^T \gamma_u dW_u.$$

6. Si $(P_t)_{t \in [0, T]}$ est la valeur de l'option avec payoff $f_2(x) = (\log(K/x))^+$, $x > 0$, donner une formule de type parité Call-Put pour C et P .

Exercice 3 Dans le cadre de l'exercice 1, calculer le prix $(A_t)_{t=0, \dots, 3}$ d'un put américain avec prix d'exercice 875\$ et échéance $N = 3$ et déterminer le temps d'exercice de l'option.

EXAMEN 16 mai 2009

Finance 1

Durée 2 heures

Exercice 1 On considère un modèle de marché de type arbre binomial à deux étapes avec un actif risqué S et un actif non risqué. On suppose $S_0 = 1000\$$ et à chaque étape la valeur de S peut être multipliée par $u = 1.5$ ou $d = 0.5$. Le rendement non risqué sur chaque période est tel que $e^r = 5/4$.

1. Un trader vend un put européen de prix d'exercice 800\$ et échéance $N = 2$, et commence sa stratégie de couverture du risque. Calculer le prix du put européen $(P_t)_{t=0,\dots,2}$.
2. En déduire les prix au temps 0 d'un call européen et d'un call américain avec mêmes prix d'exercice 800\$ et échéance $N = 2$.
3. Détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture au temps $t = 0$.
4. Calculer le prix $(A_t)_{t=0,\dots,3}$ d'un put américain avec prix d'exercice 800\$ et échéance $N = 2$. Déterminer le temps d'exercice de l'option et sa loi sous la mesure risque neutre.

Exercice 2 On se place dans un marché qui satisfait les hypothèses de Black-Scholes avec un seul actif risqué S et un actif non risqué avec rendement fixe $r > 0$. On considère une option européenne avec échéance T et payoff

$$C_T := f_1(S_T), \quad f_1(x) := (x^2 - K^2)^+, \quad x > 0,$$

où $K > 0$ est appelé strike.

1. Sous la mesure risque-neutre, écrire les équations différentielles stochastiques satisfaites par S_t et S_t^2 et en déduire la moyenne et la variance de S_t .
2. Calculer la valeur $(C_t)_{t \in [0, T]}$ de l'option et la fonction $F(t, x)$ telle que $C_t = F(t, S_t)$.
3. Calculer le Δ de l'option. Dire (sans le calculer explicitement) si le Γ de l'option a un signe constant.
4. Calculer le portefeuille de couverture de l'option.

EXAMEN 13 janvier 2010

Finance 1

Durée 2 heures

Exercice 1 On considère un modèle de marché de type arbre binomial à deux étapes avec un actif risqué S et un actif non risqué. On suppose $S_0 = 1000\$$ et à chaque étape la valeur de S peut être multipliée par $u = 1,4$ ou $d = 0,9$. Le rendement non risqué sur chaque période est tel que $e^r = 1,2$.

On considère dans cet exercice des options put avec strike $K = 990\$$.

1. Ces options sont-elles *at-*, *out-of-* ou *in-the-money*?
2. Un trader vend un tel put européen d'échéance $N = 2$, et commence sa stratégie de couverture du risque. Calculer le prix $(P_t^E)_{t=0,\dots,2}$ du put européen.
3. Calculer les prix au temps $t = 0$, C_0^E et C_0^A , d'un call européen, respectivement américain, avec mêmes prix d'exercice $K = 990\$$, et échéance $N = 2$.
4. Détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture du put européen aux temps $t \in \{0, 1\}$.
5. Un autre trader vend un put américain avec mêmes strike et échéance. Calculer le prix du put américain $(P_t^A)_{t=0,\dots,2}$.
6. Calculer le temps minimal d'exercice du put américain et sa loi.
7. Ecrire les valeurs du prix du put américain réactualisé $U_t := \tilde{P}_t^A$, $t = 0, \dots, 2$. Calculer la décomposition de Doob de $(U_t)_{t=0,\dots,2}$.
8. Calculer le temps maximal d'exercice du put américain et sa loi.

Exercice 2 On se place dans un marché qui satisfait les hypothèses de Black-Scholes avec un seul actif risqué S et un actif non risqué avec taux de rendement $r > 0$. On considère une option européenne avec échéance T et payoff $C_T = S_T^2$. Calculer la valeur $(V_t)_{t \in [0, T]}$ de l'option, le Δ , le Γ et le portefeuille de couverture. Discuter les signes de Δ et Γ .

Exercice 3 On se place dans un marché qui satisfait les hypothèses de Black-Scholes avec un seul actif risqué S et un actif non risqué avec taux de rendement $r > 0$. On considère une option européenne *multistage* : au temps 0, l'acheteur paye une prime V_0 , au temps $T_0 > 0$ il reçoit une option européenne, qui au temps $T_1 > T_0$ donne le droit mais pas l'obligation de vendre une unité d'actif risqué au prix S_{T_0} (il s'agit donc d'un put avec échéance T_1 et strike S_{T_0}).

1. Donner le payoff au temps T_1 .
2. Donner la valeur de l'option V_t pour $t \in [T_0, T_1]$.
3. Donner la valeur de l'option V_t pour $t \in [0, T_0]$.
4. Donner le portefeuille de couverture pour tout $t \in [0, T_1]$.

EXAMEN 14 juin 2010

Finance 1

Durée 2 heures

Exercice 1 On considère un modèle de marché de type arbre binomial à deux étapes avec un actif risqué S et un actif non risqué. On suppose $S_0 = 1000\$$ et à chaque étape la valeur de S peut être multipliée par $u = 1.5$ ou $d = 0.5$. Le rendement non risqué sur chaque période est tel que $e^r = 5/4$.

On considère dans cet exercice des options put avec strike $K = 800\$$.

1. Ces options sont-elles *at-*, *out-of-* ou *in-the-money*?
2. Un trader vend un tel put européen d'échéance $N = 2$, et commence sa stratégie de couverture du risque. Calculer le prix $(P_t^E)_{t=0,\dots,2}$ du put européen.
3. Calculer les prix au temps $t = 0$, C_0^E et C_0^A , d'un call européen, respectivement américain, avec mêmes prix d'exercice $K = 800\$$, et échéance $N = 2$.
4. Détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture du put européen aux temps $t \in \{0, 1\}$.
5. Un autre trader vend un put américain avec mêmes strike et échéance. Calculer le prix du put américain $(P_t^A)_{t=0,\dots,2}$.
6. Calculer le temps minimal d'exercice du put américain et sa loi.
7. Ecrire les valeurs du prix du put américain réactualisé $U_t := \tilde{P}_t^A$, $t = 0, \dots, 2$. Calculer la décomposition de Doob de $(U_t)_{t=0,\dots,2}$.
8. Calculer le temps maximal d'exercice du put américain et sa loi.

Exercice 2 On se place dans un marché qui satisfait les hypothèses de Black-Scholes avec un seul actif risqué S et un actif non risqué avec rendement fixe $r > 0$. On considère une option européenne avec échéance T et payoff

$$C_T := f_1(S_T), \quad f_1(x) := (x^2 - K^2)^+, \quad x > 0,$$

où $K > 0$ est appelé strike.

1. Sous la mesure risque-neutre, écrire les équations différentielles stochastiques satisfaites par S_t et S_t^2 et en déduire la moyenne et la variance de S_t .
2. Calculer la valeur $(C_t)_{t \in [0, T]}$ de l'option et la fonction $F(t, x)$ telle que $C_t = F(t, S_t)$.
3. Calculer le Δ de l'option. Dire (sans le calculer explicitement) si le Γ de l'option a un signe constant.
4. Calculer le portefeuille de couverture de l'option.