**Feuille d'exercices n.1**

1. Une action cotée en bourse vaut aujourd'hui \$20 l'unité. Le taux d'intérêt annuel en dollars est $0.03 = 3\%$ (donc, \$1 placé en banque vaut après un an \$1.03). Un contrat forward donne le droit à un investisseur d'acheter un lot de 100 unités de cette action dans un an au prix total $\$F$. Quel est le prix correct $\$F_0$ ? Si $\$F = \$2100$ ou $\$F = \$2000$, décrire en détails les possibilités d'arbitrage.
2. Pour chacun des portefeuilles suivants, trouver le payoff et le profit associé et en dessiner les graphes, déterminer les gains et pertes maximaux pour le détenteur, et décrire les prévisions du détenteur sur les cours. (Toutes les options sont européennes avec la même échéance)
   (a) *Straddle* : achat d'un Call et d'un Put avec $K_{\text{Call}} = K_{\text{Put}}$.
   (b) *Bullish vertical spread* : achat d'un premier $\text{Call}_1$ et vente d'un deuxième $\text{Call}_2$ avec $K_{\text{Call}_1} < K_{\text{Call}_2}$.
   (c) *Bearish vertical spread* : achat d'un premier $\text{Call}_1$ et vente d'un deuxième $\text{Call}_2$ avec $K_{\text{Call}_1} > K_{\text{Call}_2}$.
   (d) *Strip* : achat d'un Call et de deux Puts avec $K_{\text{Call}} = K_{\text{Put}}$.
   (e) *Strap* : achat de deux Calls et d'un Put avec $K_{\text{Call}} = K_{\text{Put}}$.
   (f) *Strangle* : achat d'un Call et d'un Put avec $K_{\text{Call}} > K_{\text{Put}}$.
   (g) *Butterfly spread* : achat d'un Call avec strike $a$, d'un Call avec strike $b > a$ et de deux Puts avec strike $(a + b)/2$.

   Quelle est la différence entre vendre un Straddle et acheter un Butterfly spread ? Et entre acheter un Straddle et acheter un Strangle ?
3. Aujourd'hui le taux de change entre Dollar et Euro et $\$1.2 = €1$. Un investisseur américain croit que le taux de change dans un an pourra être soit $\$1.5 = €1$ soit $\$1 = €1$. Il achète un Call Européen qui lui permettra de payer \$140 pour recevoir €100 dans un an. On suppose les taux d'intérêt nuls. Il paye l'option \$2. Le prix est-il correct ? Si la réponse est non, construire explicitement une stratégie qui donne une opportunité d'arbitrage. Mêmes questions si l'investisseur paye l'option \$10.
4. Dans la même situation que dans l'exercice précédent, l'investisseur achète un Put Européen avec échéance 1 an et strike \$140. Répondre aux mêmes questions s'il paye l'option \$20 ou \$30.
5. Montrer que si $S_T$ peut prendre seulement les valeurs $S_0u$ et $S_0d$ avec $0 < d < u$ et le taux $r$ est tel que $e^{rT} \notin ]d, u[$, alors il y a opportunité d'arbitrage.

**Feuille d'exercices n.2**

1. Prouver en détail, avec des considérations d'arbitrage, la parité call-put pour option Européennes : si $C_t^E$ et $P_t^E$ dénotent la valeur au temps $t \in [0,T]$ de, respectivement, un Call Européen et un Put Européen avec même strike $K$ et même échéance $T$, alors
$$C_t^E - P_t^E = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$
où $r \geq 0$ est le taux d'intérêt des placements sans risque.
2. Soit maintenant $C_t^A$ la valeur au temps $t \in [0,T]$ d'un Call Américain avec strike $K$ et échéance $T$. Prouver en détail, avec des considérations d'arbitrage, la borne suivante :
$$C_t^A \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$$
3. Déduire de l'exercice précédent que, pour un call américain, on a $e^{-rt}C_t^A > e^{-rt}(S_t - K)^+$ pour tout $t < T$, et qu'il n'est donc jamais optimal d'exercer le Call américain avant l'échéance. En déduire que $C_t^A = C_t^E$.
4. Soit maintenant $P_t^A$ la valeur au temps $t \in [0,T]$ d'un Put Américain avec strike $K$ et échéance $T$. Prouver en détail, avec des considérations d'arbitrage, la borne suivante :
$$C_t^A + K \geq P_t^A + S_t$$
5. Prouver avec des considérations d'arbitrage que $P_t^A \geq P_t^E$.
6. Déduire des exercices précédents que
$$P_t^A \geq C_t^A + Ke^{-r(T-t)} - S_t.$$
7. Déduire des exercices précédents que si $r > 0$ alors
$$S_t - K \leq C_t^A - P_t^A < S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$
Se convaincre qu'on ne peut pas en général obtenir $P_t^A = P_t^E$. Dans le cas $r = 0$, prouver que il n'est jamais optimal d'exercer le Put américain avant l'échéance et que $P_t^A = P_t^E$.
8. Considérer un modèle binomial de marché, avec un actif risqué $(S_n)_n$ qui vaut $S_0 = 1000$ pour $n = 0$ et, pour $n \in \{1,2,3\}$, peut prendre les valeurs $\{S_{n-1} \cdot u, S_{n-1} \cdot d\}$ avec $u = \frac{3}{2}$ et $d = \frac{1}{2}$. Le taux d'intérêt $r$ est tel que $e^r = \frac{5}{4}$ sur chaque période. Calculer le prix d'un Put américain avec strike $K = 925$ et échéance $N = 3$.