Feuille d'exercices n.3

1. Dans l'exercice 7 de la feuille n.2, appeler Z_n le payoff et U_n la valeur de l'option à tout temps $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Considérer le temps d'arrêt $\nu_0 := \min\{n \geq 0 : U_n = Z_n\} \leq 3$ et calculer les lois de ν_0 et Z_{ν_0} sous la mesure risque-neutre $\mathbb{P}^*$. Vérifier la formule $U_0 = \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_{\nu_0})$, où $(\tilde{Z}_n)$ est le payoff actualisé. Calculer aussi le temps d'arrêt $\nu_{\max} := \min\{n \geq 0 : A_{n+1} > 0\} \leq 3$
2. Montrer que, pour $r, \nu \geq 0$ et $\sigma > 0$, quand $\varepsilon \to 0+$:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\exp(r\varepsilon^2) - \exp(\nu\varepsilon^2 - \sigma\varepsilon)}{\exp(\nu\varepsilon^2 + \sigma\varepsilon) - \exp(\nu\varepsilon^2 - \sigma\varepsilon)} - \frac{1}{2}\right) \to \frac{1}{\sigma}\left(\nu - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

3. Montrer que l'absence d'opportunité d'arbitrage entraîne que pour deux portefeuilles autofinancés avec valeurs respectives X_t et Y_t pour $t \in [0, T]$ et $X_T \geq Y_T$, on a $X_t \geq Y_t$ pour tout $t \in [0, T]$.
4. Montrer que l'absence d'opportunité d'arbitrage entraîne que pour deux portefeuilles autofinancés avec valeurs respectives X_t et Y_t pour $t \in [0, T]$ et $X_T = Y_T$, on a $X_t = Y_t$ pour tout $t \in [0, T]$.
5. Soit $\theta := T - t \geq 0$ et

$$d_1 := \frac{\log(x/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}},$$
$$d_2 := \frac{\log(x/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}} = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}.$$

Soit $C(t, x)$ (respectivement $P(t, x)$) le prix au temps t d'un Call (resp. Put) Européen avec strike K et échéance T, si $S_t = x$. Prouver avec la formule de Black-Scholes que

$$C(t, x) = xN(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2),$$
$$P(t, x) = Ke^{-r\theta}N(-d_2) - xN(-d_1),$$

où $N(d) = \mathbb{P}(Z \leq d)$ et $Z \sim N(0, 1)$.

6. Retrouver la parité call-put avec les résultats de l'exercice précédent.

Feuille d'exercices n.4

1. (Options asiatiques) Notre modèle de marché contient un actif sans risque
$$db_t = rb_t\,dt, \quad b_0 = 1,$$
et un actif risqué
$$dS_t = \mu S_t + \sigma S_t dB_t$$
où $(B_t)_t$ est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien standard. On considère deux fonctions $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ et $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$. On pose
$$Z_t := \int_0^t g(u, S_u)\,du, \qquad C_T := \Phi(S_T, Z_T).$$
Une option avec payoff C_T est dite *asiatique*. Un exemple classique est
$$Z_t = \frac{1}{T}\int_0^t S_u\,du, \qquad C_T := \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u\,du - K\right)^+.$$
Sous des hypothèses opportunes on a que la valeur au temps t de l'option avec payoff C_T est
$$V_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*(C_T \mid \mathcal{F}_t)$$
où $\mathbb{P}^*$ est la mesure risque neutre. On suppose d'avoir une solution régulière $F(t,x,z)$ définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de l'équation
$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + rx\frac{\partial F}{\partial x} - rF + g(t,x)\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad F(T,x,z) = \Phi(x,z).$$
Prouver par la formule d'Itô que $V_t = F(t, S_t, Z_t)$ et que la stratégie de réplication de l'actif conditionnel $C_T = \Phi(S_T, Z_T)$ est donnée par
$$\alpha_u = \frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u, Z_u)$$
unités d'actif risqué et par
$$\beta_u = e^{-rt}\left(F(u, S_u, Z_u) - \frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u, Z_u)\cdot S_u\right)$$
unités d'actif non risqué. (Rappel : $\tilde{V}_t := e^{-rt}V_t$ est une $\mathbb{P}^*-$martingale de carré intégrable telle que $\tilde{V}_T = e^{-rT}C_T$ et $\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \alpha_u d\tilde{S}_u$).

2. (Options asiatiques - II) Un cas particulier où des calculs explicites sont encore possibles est le suivant :

$$g(u,x) := \frac{1}{T}\log(S_u), \qquad \Phi(x,z) := (e^z - K)^+ .$$

Calculer explicitement la loi de Z_t sous $\mathbb{P}^*$ et la valeur de l'option

$$V_t = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^*(C_T \,|\, \mathcal{F}_t).$$

Il faudra montrer que si $(W_t)_t$ est un mouvement Brownien standard, alors la variable $\frac{1}{T}\int_0^T W_t\,dt$ est gaussienne avec moyenne nulle et variance $\frac{T}{3}$.

3. Montrer que si une option européenne a payoff $C_T = f(S_T)$ avec f convexe, alors le prix de l'option $F(t,S_t) = V_t$ satisfait

$$\mathcal{V} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \geq 0, \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \geq 0.$$

4. Soit $f(x) := \mathbb{1}_{(x\geq K)}$ le payoff d'un call *digital*. Calculer le prix de l'option, la fonction $F(t,x)$ et les grecques $\mathcal{V}$ et Γ et dire si les conclusions de l'exercice précédent sont toujours valides.
5. Définir un *put digital* et écrire une formule de parité call-put pour les options digitales.
6. (Pay-later options) Une option *pay-later* est une option européenne qui permet de payer une prime seulement à l'échéance et seulement si l'option est dans la monnaie. La prime est choisie de façon à rendre la valeur de l'option nulle au temps $t = 0$. Cette option est équivalente à un portefeuille qui contient une option (par exemple) call européenne avec strike K et échéance T et $(-V)$ options digitales avec mêmes strike et échéance, où V est la prime. Le payoff est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ - V\mathbb{1}_{(S_T\geq K)},$$

avec V constante. Calculer V, remarquer que $V > e^{rT}C(0,x)$, où $C(0,x)$ est le prix d'un call standard, et commenter.

7. Options lookback et barrière : voir §6.3 de [Etheridge]