Université Paris VII. Préparation à l'Agrégation. (François Delarue)

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE FILE D'ATTENTE À UN SERVEUR

Ce texte vise à l'étude du temps d'attente d'un client à la caisse d'un magasin. Plusieurs comportements asymptotiques sont mis en évidence en fonction des paramètres du modèle.

1. Présentation du Modèle

A la caisse d'un magasin arrivent successivement des clients. Le temps d'arrivée du premier d'entre eux est modélisé par une variable aléatoire A_1 à valeurs strictement positives. Plus généralement, l'intervalle de temps entre les arrivées des $n$ème et $n+1$ème clients, n désignant un entier plus grand que 1, est modélisée par une variable aléatoire A_{n+1} à valeurs strictement positives. Raisonnablement, les variables $(A_n)_{n\geq 1}$ sont supposées indépendantes et identiquement distribuées de loi α, portée par $\mathbb{R}_+^*$.

La période de traitement du $n$ème client, $n \geq 1$, est modélisée par une variable aléatoire B_n à valeurs positives. Il s'agit de représenter le temps nécessaire au décompte, à l'emballage et au paiement des achats effectués. A nouveau, les variables $(B_n)_{n\geq 1}$ sont supposées indépendantes et identiquement distribuées de loi commune β, également portée par $\mathbb{R}_+$.

De façon assez naturelle, les suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ sont supposées indépendantes.

Dans la suite de l'exposé, les lois α et β sont supposées de carré intégrable, l'une des deux au moins étant de variance non nulle. La moyenne de α est désignée par λ et celle de β par μ.

Les quantités d'intérêt sont les temps d'attente du $n$ème client (*i.e.* le temps séparant son arrivée dans la file d'attente de son passage en caisse), noté W_n et le nombre de clients en attente de paiement à l'instant t.

Ce texte vise à distinguer trois cas :

(1) Si $\mu < \lambda$, alors la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. W à valeurs (réelles) positives. De plus, $\mathbb{P}$ presque sûrement la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto N_t$ s'annule une infinité de fois.

(2) Si $\mu > \lambda$, alors la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers l'infini. De plus, $\mathbb{P}$ presque sûrement la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto N_t$ tend vers l'infini.

(3) Si $\mu = \lambda$, alors la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers l'infini. De plus, $\mathbb{P}$ presque sûrement la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto N_t$ s'annule une infinité de fois.

Ces distinctions se comprennent aisément : si le temps moyen de service d'un client est inférieur au temps moyen d'inter-arrivée de deux clients, la caisse absorbe sans difficulté le flux entrant. Dans la situation inverse se forme à la caisse du magasin un bouchon dont la taille ne fait qu'empirer au cours du temps. Le cas intermédiaire est plus subtil : les bouchons finissent pas se résorber, mais certains d'entre eux atteignent de très grandes proportions.

Chacune de ces descriptions peut être validées à l'aide de simulations informatiques.

2. Expression des Quantités d'Intérêt

Il s'agit ici de mettre en équation les quantités d'intérêt. A titre d'exemple, $W_1 = 0$: le temps d'attente du premier client est nul. Plus généralement, une récurrence permet d'exprimer W_{n+1} en fonction de W_n, pour $n \geq 1$. Le temps écoulé entre l'arrivée du client n dans la file et sa sortie du magasin est $W_n + B_n$. De fait, le temps d'attente du client suivant est nul si $W_n + B_n < A_{n+1}$ et égal à la différence $W_n + B_n - A_{n+1}$ dans le cas contraire. Dans tous, les cas il vient :

$$\forall n \geq 1,\ W_{n+1} = (W_n + B_n - A_{n+1})_+,\ \text{avec } \forall x \in \mathbb{R},\ x_+ = \max(x, 0).$$

Cette relation suggère de poser :

$$\forall n \geq 1,\ X_n = B_n - A_{n+1}.$$

Une preuve par récurrence permet d'établir une expression plus facile d'emploi de W_n :

Lemme 1. En posant $S_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, il vient pour tout $n \geq 0$, $W_{n+1} = S_n - \inf_{0 \leq k \leq n} S_k$.

En remarquant que les vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(X_n, \cdots, X_1)$ ont même loi, on en déduit une expression en loi de W_n :

Lemme 2. Pour tout $n \geq 0$, $W_{n+1} \sim \sup_{0 \leq p \leq n} S_p$.

Le Lemme 2 est essentiel pour la suite du raisonnement : afin détudier la convergence en loi de la suite $(W_n)_{n \geq 1}$, il suffit de se focaliser sur l'analyse de la suite $(\sup_{0 \leq p \leq n} S_p)_{n \geq 0}$. Celle-ci est croissante et donc converge presque-sûrement vers une v.a. W à valeurs dans $[0, +\infty]$.

De façon plus générale, la connaissance du temps d'attente est également cruciale : elle permet de relier simplement le temps d'entrée dans la file, noté T_n, du $n$ème client à son temps de sortie du magasin, noté U_n. Pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ U_n = T_n + W_n + B_n.$$

Enfin, le nombre de clients en attente de paiement à l'instant t s'exprime sous la forme :

$$\forall t \geq 0,\ N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) - \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n + W_n).$$

3. Cas Récurrent Positif : $\mu < \lambda$

Si μ est plus petit que λ, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge vers $-\infty$ de sorte que $\mathbb{P}\{W < +\infty\} = 1$.

Il reste à montrer que, presque-sûrement, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto N_t$ passe une infinité de fois par zéro. Pour cela, nous introduisons la suite $(\tau_n)_{n \geq 0}$, définie par :

$$\tau_0 = 0,\ \forall\ n \geq 0,\ \tau_{n+1} = \inf\{k \geq \tau_n + 1,\ W_k = 0\} (\text{avec } \inf \emptyset = +\infty).$$

Il est suffisant de démontrer $\mathbb{P}\{\forall n \geq 1,\ \tau_n < +\infty\} = 1$: le cas échéant, la suite $(N_{\tau_n})_{n \geq 1}$ est bien définie et vaut zéro. De fait, nous définissons l'événement $A = \{\forall n \geq 1,\ \tau_n < +\infty\}$.

Supposons $\omega \in \bar{A}$. Alors, il existe $p \geq 1$, tel que pour tout $k \geq p$, $W_k(\omega) > 0$, de sorte que $W_{k+1}(\omega) = W_p(\omega) + \sum_{i=p}^{k} X_i(\omega)$.

La loi des grands nombres permet de conclure : $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$.

4. Cas Récurrent Nul : $\mu = \lambda$

Si μ est plus petit que λ, la loi des grands nombres ne permet plus de conclure. Il s'agit alors d'utiliser le théorème central limite. Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}\{W \geq n^{1/2}\} \geq \mathbb{P}\{n^{-1/2} S_n \geq 1\} \to \mathbb{P}\{Z \geq 1\}$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pour un certain $\sigma > 0$. De sorte que $\mathbb{P}\{W = +\infty\} > 0$.

Mais, $\mathbb{P}\{W = +\infty\} = \mathbb{P}\{\sup_{p \geq 0} S_p = +\infty\}$. La loi du 0-1 de Kolmogorov montre que nécessairement $\mathbb{P}\{W = +\infty\} = 1$. On en déduit que, pour tout $C > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\{W_n > C\} = 1$, ce qui signifie exactement que $W_n \to +\infty$ en probabilité.

Il reste à démontrer, comme dans la section précédente, que, presque-sûrement, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto N_t$ passe une infinité de fois par zéro.

En conservant les notations de la section précédente, il vient pour $\omega \in \bar{A}$, et pour $k \geq p$ (le même p que précédemment), $(k+1)^{-1/2} W_{k+1}(\omega) = (k+1)^{-1/2} S_k(\omega) + (k+1)^{-1/2}[W_p(\omega) - S_{p-1}(\omega)]$. Mais, la positivité des temps d'attente assure que $\liminf_{k \to +\infty} k^{-1/2} W_k(\omega) \geq 0$ de sorte $\liminf_{k \to +\infty} k^{-1/2} S_k(\omega) \geq 0$. Une nouvelle combinaison du théorème central limite et de la loi du 0-1 assure que l'événement $\{\liminf_{k \to +\infty} k^{-1/2} S_k \geq 0\}$ est de mesure nulle.

Il vient finalement $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$.

5. Cas Récurrent Transitoire : $\mu > \lambda$

Commençons par démontrer que $W = +\infty$ avec probabilité 1 : il est clair que, pour tout $n \geq 1$, $W_{n+1} \geq W_n + X_n \geq X_1 + \cdots + X_n$. La loi des grands nombres assure alors le résultat.

Il reste de fait à montrer que la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto N_t$ converge, presque-sûrement, vers $+\infty$. Il est assez facile de commencer par montrer que :

$$\forall t \geq 0, \; N_t \geq \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) - \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}\big(\sum_{k=1}^{n-1} B_k\big). \tag{1}$$

Nous appliquons alors le théorème du Renouvellement, dont la preuve est repoussée en fin de section :

Théorème 1. Étant donnée une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de v.a.i.id. telle que $\mathbb{P}\{Z_1 \geq 0\}$ et $0 < m = \mathbb{E}(Z_1) < +\infty$, on définit :

$$\forall n \geq 1, \; R_n = Z_1 + \cdots + Z_n.$$

Alors, presque-sûrement,

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(R_n) = (\mathbb{E}(Z_1))^{-1}.$$

En appliquant le théorème du renouvellement à chacun des termes de (1), il vient, avec probabilité 1, $\lim_{t \to +\infty} t^{-1} N_t = \lambda^{-1} - \mu^{-1} > 0$, ce qui suffit pour conclure.

Tournons nous vers le théorème du renouvellement lui-même. Son interprétation est simple : en admettant que la durée de vie d'un composant éléctronique soit modélisée par une v.a. positive intégrable (naturellement non réduite à zéro) de moyenne m, le nombre moyen de composants remplacés en temps long est de l'ordre de m^{-1} par unité de temps.

La preuve est assez simple. De l'encadrement $R_{N_t} \leq t < R_{N_t+1}$, vrai pour tout $t > 0$, il vient (en remarquant que N_t est non nul pour t assez grand) :

$$N_t^{-1} R_{N_t} \leq N_t^{-1} t < N_t^{-1} R_{N_t+1}.$$

Mais, la loi des grands nombres assure que le quotient $n^{-1} R_n$ converge, presque-sûrement, vers m lorsque n tend vers l'infini. En remarquant que N_t tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, le résultat est immédiat.

6. Retour sur le Cas Récurrent Positif : Loi de W

Subsite dans le cas récurrent la détermination de la loi de W.

La question étant délicate, nous nous restreignons au contexte suivant : α est une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 1$ et β la masse de Dirac en 1. L'utilisation de la loi exponentielle pour modéliser les temps d'inter-arrive s'explique par les propriétés d'indépendance et de stationnarité des accroissements du processus de Poisson. Le choix de la masse de Dirac est, quant-à lui, adaptée aux caisses automates (serveur vocal, laverie automatique...).

Dans ce contexte, nous admettons le résultat suivant :

Théorème 2.

(1) La suite $(\mathbb{P}\{W_n = 0\})_{n\geq 1}$ décroît vers $\mathbb{P}\{W = 0\} < 1$.

(2) La fonction de répartition de W, notée F, est continue sur $]0, +\infty[$. F est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, et sa dérivée vérifie :

$$\forall t < 0,\ F'(t) = 0,\ \forall t \in]0, +\infty[\setminus\{1\},\ F'(t) = \lambda^{-1}\big(F(t) - F(t-1)\big).$$

(3) La loi de W conditionnée à prendre des valeurs strictement positives admet pour fonction de répartition :

$$\forall t \geq 0,\ G(t) = 0,\ \forall t > 0,\ G(t) = \frac{F(t) - F(0)}{1 - F(0)}.$$

En particulier, G est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$\forall t < 0,\ G'(t) = 0,$$
$$\forall t \in]0, 1[,\ G'(t) = \lambda^{-1}\big(G(t) + \frac{F(0)}{1 - F(0)}\big),\ \forall t > 1,\ G'(t) = \lambda^{-1}\big(G(t) - G(t-1)\big).$$

La fonction G' définit une densité de la loi de W conditionnée à être positive strictement.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1. La suite des lois conditionnelles de W_n sachant $\{W_n > 0\}$ converge en loi vers la loi conditionnelle de W sachant $W > 0$.

Preuve. Commençons par remarquer que, pour n grand, $\mathbb{P}\{W_n > 0\} > 0$. Alors, en s'appuyant sur les points 1 et 2 du Théorème 2, on en déduit :

$$\begin{aligned}\forall t > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{W_n \leq t | W_n > 0\} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{P}\{W_n \leq t\} - \mathbb{P}\{W_n = 0\}}{\mathbb{P}\{W_n > 0\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{W \leq t\} - \mathbb{P}\{W = 0\}}{\mathbb{P}\{W > 0\}} \\ &= \mathbb{P}\{W \leq t | W > 0\}.\end{aligned}$$

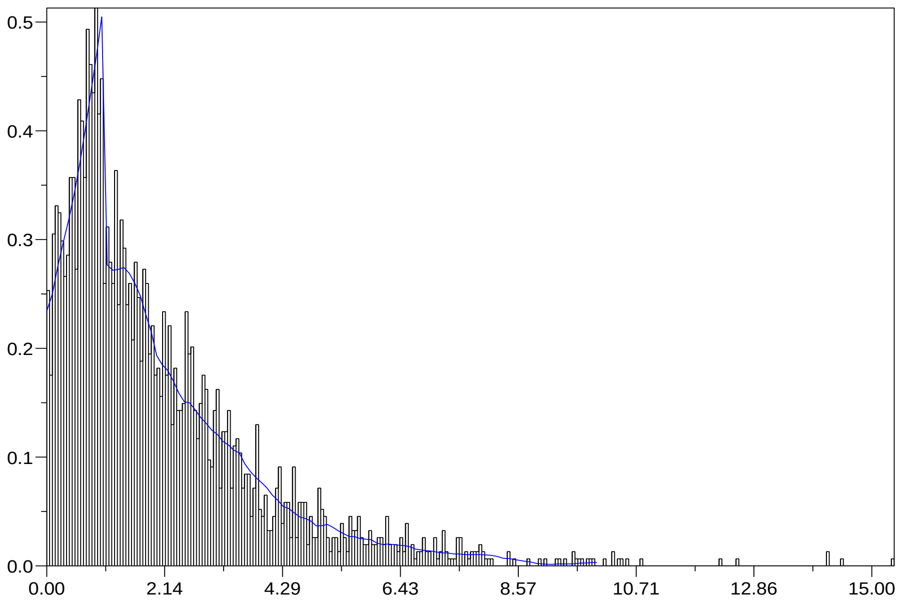
L'exploitation de ces résultats est essentiellement informatique. Le point 1 du Théorème 2 donne un principe d'approximation de $\mathbb{P}\{W = 0\}$: il suffit de calculer un estimation empirique de $\mathbb{P}\{W_n = 0\}$ pour un n grand. A titre d'exemple, dans le cas $\lambda = 1$, nous avons obtenu à partir d'un 1000-échantillon de W_{1000}, une estimation $p \approx ??$ de $\mathbb{P}\{W = 0\}$.

La Proposition 2 permet de représenter l'allure de la densité conditionnelle de W sachant $W > 0$: il suffit de représenter, pour n grand, l'histogramme d'un échantillon, obtenu par simulation, suivant la loi de W_n conditionnée à prendre des valeurs strictement positives.

A nouveau à titre d'exemple, nous avons représenté pour $\lambda = 1$ et $n = 1000$ l'histogramme d'un 3000-échantillon de loi W_{1000} conditionnée à prendre des valeurs strictement positives. Afin de vérifier le point 3 du Théorème 2, nous avons également représenté sur le même dessin les fonctions :

$$t \mapsto G_n(t) + \frac{p}{1-p},\ \text{si } t \in]0, 1], G_n(t) - G_n(t-1) \text{ si } t > 1,$$

où G_n désigne la fonction de répartition empirique de l'échantillon simulé.



Comparaison de l'histogramme empirique et de la différence des fonctions de répartition empiriques.

Suggestion de Développements

(1) Le candidat pourra, dans la Partie 1, illustrer informatiquement les résultats attendus. Il expliquera dans ce contexte le choix des lois α et β.

(2) Le candidat pourra prouver l'un des trois cas présentés en Parties 3, 4 et 5. Les deux autres cas pourront faire l'objet d'une présentation intuitive.

(3) Le candidat pourra illustrer informatiquement la Partie 6. On pourra illustrer la présence d'une masse de Dirac en zéro pour la loi de W à l'aide d'un histogramme avant de retrouver les exemples proposés dans le texte.