

Preuve: Soit  $X_n$  une martingale convergeant dans  $L^1$  vers une v.a.  $X$ . Puisque  $|X_n| \leq |X| + |X - X_n|$ , on a  $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < +\infty$ . Donc (Th. 4.14),  $X_n$  converge p.s. vers  $X$ . On a alors, pour tout  $p$ , pour tout  $A \in \mathcal{F}_n$ ,

$$\int_A X_{n+p} d\mathbb{P} = \int_A X_n d\mathbb{P},$$

et, faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , vu que  $X_{n+p}$  converge dans  $L^1$ ,

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{F}_n, \int_A X d\mathbb{P} = \int_A X_n d\mathbb{P},$$

ce qui signifie que  $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .  $\square$

Un intérêt majeur des martingales régulières est que pour elles le théorème d'arrêt prend une forme particulièrement agréable. Notons d'abord que si  $X_n$  est une martingale régulière de limite  $X_\infty$ , la martingale est fermée en ce sens que  $(X_n, n \in \bar{\mathbb{N}})$  est une martingale i.e. vérifie la définition pour tout  $m \leq n \leq +\infty$ . Alors, si  $\nu$  est un temps d'arrêt à valeurs  $\bar{\mathbb{N}}$ ,  $X_\nu$  est parfaitement définie par  $X_\nu = X_\infty$  sur  $\{\nu = +\infty\}$ .

PROPOSITION 4.19. Soit  $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ ,  $X \in L^1$ , une martingale régulière. Alors,

- (i) si  $\nu$  est un temps d'arrêt,  $X_\nu$  est intégrable et  $X_\nu = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\nu)$ ,
- (ii) si  $\nu_1 \leq \nu_2$  sont deux temps d'arrêt,  $\mathbb{E}(X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}) = X_{\nu_1}$ .

Preuve: On sait que  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\nu) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = X_n$  sur  $\{\nu = n\}$ ,  $n \in \bar{\mathbb{N}}$  et donc  $X_\nu = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\nu) \in L^1$ . Quant à (ii), vu que  $\mathcal{F}_{\nu_1} \subset \mathcal{F}_{\nu_2}$ , on a  $\mathbb{E}(X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{\nu_2}) | \mathcal{F}_{\nu_1}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{\nu_1}) = X_{\nu_1}$ .  $\square$

Ci-après sont reproduits les exercices et problèmes concernant les martingales à temps discret dont la correction peut être trouvée dans le livre "Martingales et Chaines de Markov" de P.Baldi, L.Mazliak et P.Priouret, Editions Hermann, *vademecum* indispensable et économique de l'étudiant de DEA (!).

EXERCICE 4.20. a) Soit  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  une surmartingale telle que  $\mathbb{E}(X_n)$  soit constante. Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale.

b) Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  un processus intégrable adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné  $\tau$  de  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , on a  $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ .

EXERCICE 4.21. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales  $(X_n)_{n \geq 0}$  et  $(Y_n)_{n \geq 0}$  de carré intégrable.

- a) Montrer que, pour  $m \leq n$ , on a  $\mathbb{E}(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$  p.s.
- b) Montrer que  $\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$ .

EXERCICE 4.22. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré sur lequel on considère une martingale réelle  $(M_n)_{n \geq 0}$  telle que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $|M_n| \leq K$ . On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1}).$$

Montrer que  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale qui converge p.s. et dans  $L^2$ .

EXERCICE 4.23. Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes de même loi normale  $N(0, \sigma^2)$ , où  $\sigma > 0$ . On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  et  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ . On rappelle que

$$\mathbb{E}(e^{uY_1}) = e^{u^2 \sigma^2 / 2}. \quad (4.5)$$

1) Soit  $Z_n^u = \exp(uX_n - nu^2 \sigma^2 / 2)$ . Montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $(Z_n^u)_{n \geq 1}$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ -martingale.

2) Montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $(Z_n^u)_{n \geq 1}$  converge p.s. vers une v.a.  $Z_\infty^u$  finie. Que vaut cette limite? Pour quelles valeurs de  $u \in \mathbb{R}$ ,  $(Z_n^u)_{n \geq 1}$  est-elle une martingale régulière?

EXERCICE 4.24. On dit qu'un processus  $(M_n)_{n \geq 0}$  est à accroissements indépendants si, pour tout  $n$ , la v.a.  $M_{n+1} - M_n$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n)$ .

1) Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une martingale de carré intégrable et à accroissements indépendants. On pose  $\sigma_0^2 = \text{Var}(M_0)$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $\sigma_k = \text{Var}(M_k - M_{k-1})$ .

1a) Montrer que  $\text{Var}(M_n) = \sum_{k=0}^n \sigma_k^2$ .

1b) Soit  $(\langle M \rangle_n)_{n \geq 0}$  le processus croissant associé à  $(M_n)_{n \geq 0}$ . Calculer  $\langle M \rangle_n$ .

2) Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une martingale gaussienne (on rappelle que le processus  $(M_n)_{n \geq 0}$  est gaussien si, pour tout  $n$ , le vecteur  $(M_0, \dots, M_n)$  est gaussien).

2a) Montrer que  $(M_n)_{n \geq 0}$  est à accroissements indépendants.

2b) Montrer que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé, le processus

$$Z_n^\theta = e^{\theta M_n - \frac{\theta^2}{2} \langle M \rangle_n} \quad (4.6)$$

est une martingale. Cette martingale converge-t-elle p.s.?

EXERCICE 4.25. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de v.a. à valeurs  $[0, 1]$ . On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ . On suppose que  $X_0 = a \in [0, 1]$  et que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n, \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale qui converge p.s. et dans  $L^2$  vers une v.a.  $Z$ .

2) Montrer que  $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4} \mathbb{E}(X_n(1 - X_n))$ .

3) Calculer  $\mathbb{E}(Z(1 - Z))$ . Quelle est la loi de  $Z$ ?

EXERCICE 4.26. A l'instant 1 une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur que celle tirée, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne à l'instant 2, et ainsi de suite suivant le même procédé.

On note  $Y_n$  et  $X_n = Y_n/(n+1)$  le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant  $n$ . On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ .

1) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une martingale qui converge p.s. vers une v.a.  $U$  et que l'on a, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(U^k)$ .

2) On fixe  $k \geq 1$ . On pose, pour  $n \geq 1$ ,

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1) \dots (Y_n + k - 1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)}.$$

Montrer que  $(Z_n)_{n \geq 1}$  est une martingale. Quelle est sa limite? En déduire la valeur de  $\mathbb{E}(U^k)$ .

3) Soit  $X$  une v.a. réelle telle que  $|X| \leq M < +\infty$  p.s. Montrer que sa fonction caractéristique se développe en série entière

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} t^k \quad (4.7)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

4) Quelle est la loi de  $U$ ?

EXERCICE 4.27. (Une preuve de la loi 0-1 de Kolmogorov par les martingales) Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes. On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \sigma(Y_1, \dots, Y_n), & \mathcal{F}_\infty &= \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n\right) \\ \mathcal{F}^n &= \sigma(Y_n, Y_{n+1}, \dots), & \mathcal{F}^\infty &= \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}^n. \end{aligned}$$

1) Soit  $A \in \mathcal{F}^\infty$ . Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou 1.

(Suggestion:  $Z_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(1_A)$  est une martingale ...).

2) Montrer que, si  $X$  est une v.a.r.  $\mathcal{F}^\infty$ -mesurable,  $X = a$  p.s.

EXERCICE 4.28. (Une preuve par les martingales inverses de la loi forte des grands nombres) Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. réelles, indépendantes, de même loi et intégrables. On pose  $S_0 = 0$ ,  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$  et  $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_1 + \dots + Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots)$ .

1) Montrer que, pour  $1 \leq m \leq n$ ,  $\mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_m) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_1)$  p.s. et en déduire que  $\mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_1) = S_n/n$  p.s.

2) Que peut-on dire de la convergence de  $Z_n = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_1)$ ?

3) Montrer que  $X = \mathbb{E}(Y_1)$  p.s.

EXERCICE 4.29. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (M_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  une martingale de carré intégrable. On note  $A_n = \langle M \rangle_n$  le processus croissant associé et  $A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow A_n$ . On a vu que cette martingale converge p.s. sur l'événement  $\{A_\infty < +\infty\}$ . Dans cet exercice, on précise ce qui se passe sur  $\{A_\infty = +\infty\}$ . On pose

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + A_k}, \quad n \geq 1.$$

1) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale de carré intégrable et que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}[(X_n - X_{n-1})^2] \leq \frac{1}{1 + A_{n-1}} - \frac{1}{1 + A_n}.$$

En déduire que  $\langle X \rangle_n \leq 1$  pour tout  $n$  et que  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge p.s.

2a) Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres strictement positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow a_n = +\infty$  et  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels convergeant vers  $u$ . Montrer que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})u_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u.$$

2b) (Lemme de Kronecker). Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres strictement positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow a_n = +\infty$  et  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels. On pose  $s_n = x_1 + \dots + x_n$ . Montrer que si la série de terme général  $x_n/s_n$  converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{a_n} = 0.$$

3) Montrer que, sur  $\{A_\infty = \infty\}$ ,  $M_n/A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  p.s.

EXERCICE 4.30. Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes telles que  $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$  pour  $i = 1, 2, \dots$ . On pose  $S_0 = 0$ ,  $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ . Soient  $a$  un entier  $> 0$  et  $\tau = \inf\{n \geq 0, S_n = a\}$  le premier temps de passage par  $a$ .

a) Montrer que

$$X_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}$$

est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale. Montrer que, si  $\theta \geq 0$ ,  $(X_{n \wedge \tau}^\theta)_{n \geq 0}$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale bornée.

b1) Montrer que, pour tout  $\theta > 0$ ,  $(X_{n \wedge \tau}^\theta)_{n \geq 0}$  converge p.s. et dans  $L^2$  vers la v.a.

$$W^\theta = \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^\tau} 1_{\{\tau < +\infty\}} \quad (4.8)$$

b2) Montrer que  $\mathbb{P}\{\tau < +\infty\} = 1$  et que, pour tout  $\theta \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[(\cosh \theta)^{-\tau}] = e^{-\theta a}.$$

EXERCICE 4.31. Soit, comme dans l'Exercice 4.30,  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes telles que  $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$  pour  $i = 1, 2, \dots$ . On pose  $S_0 = 0$ ,  $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ . Soient  $a$  un entier  $> 0$  et  $\lambda$  un réel tel que  $0 < \lambda < \pi/(2a)$ . Soit  $\tau = \inf\{n \geq 0, |S_n| = a\}$  le temps de sortie de  $] -a, a[$ .

a) Montrer que  $X_n = (\cos \lambda)^{-n} \cos(\lambda S_n)$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale.

b) Montrer que

$$1 = \mathbb{E}(X_{n \wedge \tau}) \geq \cos(\lambda a) \mathbb{E}((\cos \lambda)^{-n \wedge \tau}).$$

c) En déduire que  $\mathbb{E}((\cos \lambda)^{-\tau}) \leq (\cos(\lambda a))^{-1}$  puis que  $\tau$  est p.s. fini et que la martingale  $(X_{n \wedge \tau})_{n \geq 0}$  est régulière.

d) Que vaut  $\mathbb{E}((\cos \lambda)^{-\tau})$ ? A-t-on  $\tau \in L^p, p \geq 1$ ?

EXERCICE 4.32. Soit  $(S_n)_{n \geq 0}$  une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$ :  $S_0 = 0$ ,  $S_n = U_1 + \dots + U_n$ , où les v.a.  $U_i$  sont indépendantes et de même loi et telles que  $0 < \mathbb{P}\{U_i = 1\} = p < 1$ ,  $\mathbb{P}\{U_i = -1\} = 1 - p := q$ .

a) Soit  $Z_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$ . Montrer que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est une martingale positive.

b)

Déduire d'une inégalité maximale appliquée à la martingale  $(Z_n)_{n \geq 0}$  que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{n \geq 0} S_n \geq k\right\} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

et que, lorsque  $q > p$ ,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{n \geq 0} S_n\right) \leq \frac{p}{q - p}$$

EXERCICE 4.33. On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de v.a. réelles indépendantes de même loi normale  $N(m, \sigma^2)$  avec  $m < 0$  et on pose  $S_0 = 0$ ,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

et

$$\mathcal{B}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n) \quad W = \sup_{n \geq 0} S_n.$$

Le but de cet exercice est de montrer certaines propriétés de la v.a.  $W$ .

1) Montrer que  $\mathbb{P}(W < +\infty) = 1$ .

2) On rappelle que, pour  $\lambda$  réel,  $\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) = e^{\lambda^2 \sigma^2 / 2 + \lambda m}$ . Que vaut  $\mathbb{E}(e^{\lambda S_{n+1}} | \mathcal{B}_n)$ ?

3) Montrer qu'il existe un  $\lambda_0 > 0$  unique tel que  $(e^{\lambda_0 S_n})_{n \geq 0}$  soit une martingale.

4) Montrer que, pour tout  $a > 1$ , on a

$$\mathbb{P}(e^{\lambda_0 W} > a) \leq \frac{1}{a}$$

et que, pour  $t > 0$ ,  $\mathbb{P}(W > t) \leq e^{-\lambda_0 t}$ .

5) Montrer que

$$\mathbb{E}(e^{\lambda W}) = 1 + \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \mathbb{P}(W > t) dt \quad (4.9)$$

et en déduire que, pour tout  $\lambda < \lambda_0$ ,  $\mathbb{E}(e^{\lambda W}) < +\infty$ . En particulier la v.a.  $W$  a des moments de tous les ordres.

EXERCICE 4.34. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (X_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  une sous-martingale telle que  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$ .

1) Montrer que,  $n$  étant fixé, la suite  $(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(X_p^+))_{p \geq n}$  est croissante en  $p$ .

2) On pose  $M_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \uparrow \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(X_p^+)$ . Montrer que  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale positive intégrable.

3) On pose  $Y_n = M_n - X_n$ . Montrer que  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est une surmartingale positive intégrable.

Remarque: On conclut donc que toute sous-martingale bornée dans  $L^1$  s'écrit comme la différence d'une martingale et d'une surmartingale positives intégrables (décomposition de Krickeberg).

EXERCICE 4.35. Soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  une suite de v.a. indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{B}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  et  $S_0 = 0$ ,  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ ,  $n \geq 1$ . On considère le processus défini par

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^n \text{sign}(S_{k-1})Y_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

- 1) Quel est le compensateur de la sous-martingale  $(S_n^2)_{n \geq 0}$ ?
- 2) Montrer que  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale et calculer le compensateur de  $(M_n^2)_{n \geq 0}$ .
- 3) Quelle est la décomposition de Doob de  $(|S_n|)_{n \geq 0}$ ? En déduire que  $M_n$  est mesurable par rapport à la tribu  $\sigma(|S_1|, \dots, |S_n|)$ .

EXERCICE 4.36. Soient  $p$  et  $q$  deux probabilités sur un espace discret  $E$  telles que  $p \neq q$  et  $q(x) > 0$  pour tout  $x \in E$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes à valeurs  $E$  et de même loi  $q$ . Montrer que la suite

$$Y_n = \prod_{k=1}^n \frac{p(X_k)}{q(X_k)}$$

est une martingale positive dont la limite p.s. est 0. La martingale est-elle régulière? (Suggestion: calculer la moyenne de  $\sqrt{Y_n}$ .)

EXERCICE 4.37. Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. positives indépendantes d'espérance 1 et  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_k; k \leq n)$ . On pose  $X_0 = 1$  et  $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$ .

- 1) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  et en déduire que  $(\sqrt{X_n})_{n \geq 0}$  est une surmartingale.
- 2) On suppose que  $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) = 0$ . Étudier la convergence et la limite de  $(\sqrt{X_n})_{n \geq 0}$  et puis de  $(X_n)_{n \geq 0}$ . La martingale  $(X_n)_{n \geq 0}$  est-elle régulière?
- 3) On suppose que  $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) > 0$ . Montrer que  $(\sqrt{X_n})_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2$  et en déduire que la martingale  $(X_n)_{n \geq 0}$  est régulière.

EXERCICE 4.38. Le but de cet exercice est de fournir une version du Lemme de Borel-Cantelli pour une famille de v.a. non nécessairement indépendantes, ce qui est souvent utile. On rappelle que, pour une martingale  $(M_n)_{n \geq 0}$ , les trois conditions

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|M_n|) < +\infty, \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(M_n^+) < +\infty, \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(M_n^-) < +\infty$$

sont équivalentes.

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités filtré et  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. positives, intégrables, adaptées (pas nécessairement indépendantes).

- 1a) On pose  $X_0 = 0$ ,  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale et déterminer le processus croissant associé  $(A_n)_{n \geq 1}$ .
- 1b) Montrer que, pour tout  $a > 0$ ,  $\tau_a = \inf\{n, A_{n+1} > a\}$  est un temps d'arrêt.
- 1c) On pose  $Z_n = X_n - A_n$ . Montrer que, pour tout  $n$ ,  $Z_{n \wedge \tau_a}^- \leq a$ . En déduire que  $(Z_{n \wedge \tau_a})_{n \geq 0}$  converge p.s.
- 1d) Montrer que  $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow A_n < +\infty\} \subset \{\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow X_n < +\infty\}$  p.s. (suggestion: se placer sur  $\{\tau_a = +\infty\}$ ).
- 2) On suppose, de plus, que  $\sup_{n \geq 1} Y_n \in L^1$ . Montrer que

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow X_n < +\infty \right\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow A_n < +\infty \right\} \quad \text{p.s.}$$

(on pourra introduire le temps d'arrêt  $\sigma_a = \inf(n, X_n > a)$  et considérer  $Z_{n \wedge \sigma_a}^+$ ).

3) Soit  $(B_n)_{n \geq 1}$  une suite d'événements adaptés. Montrer que

$$\left\{ \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}^{\mathcal{F}_{n-1}}(B_n) < +\infty \right\} = \left\{ \sum_{n \geq 1} 1_{B_n} < +\infty \right\} \quad p.s..$$

EXERCICE 4.39. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. réelles, de carré intégrable, adaptées, définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ , et  $(\sigma_n^2)_{n \geq 0}$  une suite de nombres positifs. On suppose que p.s., pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(X_n) = 0, \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(X_n^2) = \sigma_n^2 \quad p.s.$$

(cette condition est satisfaite, par exemple, si les v.a.  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes centrées et de variance finie). On pose  $S_0 = 0$ ,  $A_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $A_n = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ ,  $V_n = S_n^2 - A_n$ .

1) Montrer que  $(S_n)_{n \geq 0}$  et  $(V_n)_{n \geq 0}$  sont des martingales intégrables.

2) Montrer que, si  $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < +\infty$ ,  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. et dans  $L^2$ .

3) On suppose que  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. et qu'il existe une constante  $M$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $|X_n| \leq M$  p.s. Pour  $a > 0$ , on pose  $\tau_a = \inf\{n \geq 0; |S_n| > a\}$ .

3a) Montrer que, pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(S_{n \wedge \tau_a}^2) = \mathbb{E}(A_{n \wedge \tau_a})$ .

3b) Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que  $\mathbb{P}(\tau_a = +\infty) > 0$ .

3c) En déduire que  $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < +\infty$ .

Remarque: Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. réelles, centrées, indépendantes, de carré intégrable. Il est clair qu'une telle suite vérifie les hypothèses de cet exercice. On a donc retrouvé les résultats classiques:

(i) si  $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(X_k) < +\infty$ , alors  $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$  converge p.s.,

(ii) si les v.a.  $X_k$  sont uniformément bornées, alors  $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$  converge p.s. si et seulement si  $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(X_k) < +\infty$ .

EXERCICE 4.40. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (M_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  une martingale de carré intégrable et notons  $A_n = \langle M \rangle_n$  le processus croissant associé. On pose  $\tau_a = \inf\{n \geq 0; A_{n+1} > a^2\}$ .

1) Montrer que  $\tau_a$  est un temps d'arrêt.

2) Montrer que  $\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} |M_{n \wedge \tau_a}| > a) \leq a^{-2} \mathbb{E}(A_{\infty} \wedge a^2)$ .

3) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 0} |M_n| > a\right) \leq \mathbb{P}(A_{\infty} > a^2) + \mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 0} |M_{n \wedge \tau_a}| > a\right). \quad (4.10)$$

4) Soit  $X$  une v.a. positive. Montrer, en appliquant le théorème de Fubini, les deux relations

$$\int_0^\lambda \mathbb{P}(X > t) dt = \mathbb{E}(X \wedge \lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \in [0, +\infty],$$

$$\int_0^\infty a^{-2} \mathbb{E}(X \wedge a^2) da = 2\mathbb{E}(\sqrt{X}).$$

5) Montrer que  $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |M_n|) \leq 3\mathbb{E}(\sqrt{A_{\infty}})$ , (on pourra intégrer (4.10) par rapport à  $a$  de 0 à  $+\infty$  ...).

6) Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite v.a. centrées, indépendantes, de même loi et de carré intégrable. On pose  $S_0 = 0$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ . Montrer que si  $\tau$  est un temps d'arrêt tel que  $\mathbb{E}(\sqrt{\tau}) < +\infty$ , alors  $\mathbb{E}(S_\tau) = 0$ .

Remarque: Il est intéressant de comparer le résultat de la question 6) avec celui de la partie A de l'Exercice 4.42 pour  $m = 0$ . On en déduit que le temps de passage  $\tau$  de la partie A4) de l'Exercice 4.42 est de plus tel que  $\mathbb{E}(\sqrt{\tau}) = +\infty$ .

EXERCICE 4.41. Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  on considère des v.a.  $X_n^i, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2$ , indépendantes et de Bernoulli  $B(1, \frac{1}{2})$ . On pose  $S_n^i = \sum_{k=1}^n X_k^i, \nu_i = \inf\{n; S_n^i = a\}$  où  $a$  est un entier  $\geq 1$ . On pose  $\nu = \nu_1 \wedge \nu_2$ .

1) Montrer que  $\mathbb{P}(\nu_i < +\infty) = 1, i = 1, 2$ .

2) On pose, pour  $i = 1, 2$  et tout  $n \geq 0$ ,

$$M_n^i = 2S_n^i - n, \quad M_n^{i,j} = (2S_n^i - n)(2S_n^j - n) - n\delta_{i,j}$$

où  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $= 0$  sinon. Montrer que  $(M_n^i)_n$  et  $(M_n^{i,j})_n$  sont des martingales par rapport à la filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k^i, i = 1, 2, k \leq n).$$

3) Montrer que  $\mathbb{E}(\nu) \leq 2a$ .

4) Montrer que  $\mathbb{E}(M_\nu^{i,j}) = 0$ .

5) Montrer que  $\mathbb{E}(|S_\nu^1 - S_\nu^2|) \leq \sqrt{a}$  (suggestion: considérer la martingale  $M_n^{1,1} - 2M_n^{1,2} + M_n^{2,2}$ ).

EXERCICE 4.42. (Identités de Wald) Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables, de même loi. On pose  $m = \mathbb{E}(Y_1), S_0 = 0, \mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$  et, pour  $n \geq 1, S_n = Y_1 + \dots + Y_n, \mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ . Soit  $\nu$  un temps d'arrêt intégrable.

A1) On pose  $X_n = S_n - nm$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale.

A2) Montrer que, pour tout  $n, \mathbb{E}(S_{n \wedge \nu}) = m\mathbb{E}(n \wedge \nu)$ .

A3) Montrer que  $S_\nu$  est intégrable et que  $\mathbb{E}(S_\nu) = m\mathbb{E}(\nu)$  (considérer d'abord le cas  $Y_n \geq 0$ ).

A4) Supposons  $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$ , pour tout  $n$  et  $\tau = \inf\{n; S_n \geq a\}$ , où  $a$  est un entier  $\geq 1$ . Dans l'Exercice 4.30, on a montré que  $\tau < +\infty$  p.s. Montrer que  $\tau$  n'est pas intégrable.

B) On suppose de plus que  $\mathbb{E}(Y_1^2) < +\infty$  et on note  $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1)$ . On suppose d'abord que  $m = 0$  et on pose  $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$ .

B1) Montrer que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est une  $\mathcal{F}_n$ -martingale.

B2) Montrer que, pour tout  $j < k, \mathbb{E}[Y_j 1_{\{j \leq \nu\}} Y_k 1_{\{k \leq \nu\}}] = 0$  puis que  $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2 1_{\{k \leq \nu\}}] < +\infty$  (suggestion: on utilise A).

B3) Montrer que  $(S_{n \wedge \nu})_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2$ . En déduire que  $S_{n \wedge \nu} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} S_\nu$  dans  $L^2$ .

B4) Montrer que  $\mathbb{E}(S_\nu^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\nu)$ .

B5) On ne suppose plus  $m = 0$ . Montrer que  $\mathbb{E}((S_\nu - m\nu)^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\nu)$ .

EXERCICE 4.43. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré et  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ . On suppose que, pour tout  $n \geq 0, \mathbb{P}$  domine  $\nu$  sur  $\mathcal{F}_n$  et on note  $X_n$  la densité de Radon-Nikodym:  $X_n$  est donc  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et

$$\nu(A) = \int_A X_n d\mathbb{P}$$

pour tout  $A \in \mathcal{F}_n$  (en particulier  $X_n \geq 0$ ).

a) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale.

b) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. vers une variable intégrable  $X$ .

c) Montrer que si  $\mathbb{P}$  domine  $\nu$  sur  $\mathcal{F}_\infty, X$  est la densité de Radon-Nikodym correspondante.

d) On suppose que les deux mesures  $\nu$  et  $\mathbb{P}$  sont étrangères sur  $\mathcal{F}_\infty$ , c'est à dire qu'il existe  $S \in \mathcal{F}_\infty$  tel que  $\mathbb{P}(S) = 1$  et  $\nu(S) = 0$ . Montrer qu'alors  $X = 0$  p.s.

EXERCICE 4.44. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une martingale intégrable définie sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  et soit  $\nu$  un temps d'arrêt vérifiant

$$\mathbb{P}(\nu < +\infty) = 1, \quad \mathbb{E}(|X_\nu|) < +\infty, \quad \int_{\{\nu > n\}} |X_n| d\mathbb{P} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1) Montrer que

$$\int_{\{\nu > n\}} |X_\nu| d\mathbb{P} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2) Montrer que  $\mathbb{E}(|X_{\nu \wedge n} - X_\nu|) \rightarrow 0$ .

3) En déduire que  $\mathbb{E}(X_\nu) = \mathbb{E}(X_0)$ .

EXERCICE 4.45. (Un résultat d'arrêt pour un temps d'arrêt non borné) On considère une surmartingale intégrable  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (X_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ . On suppose qu'il existe une constante  $M$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(|X_n - X_{n-1}|) \leq M \quad \text{p.s.}$$

1) Montrer que, si  $(V_n)_{n \geq 1}$  est un processus positif tel que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $V_n$  soit  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable, on a

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n |X_n - X_{n-1}|\right) \leq M \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n\right).$$

2) Soit  $\nu$  un temps d'arrêt intégrable. On rappelle que  $\mathbb{E}(\nu) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\{\nu \geq n\}$ .

2a) Déduire de 1) que  $\mathbb{E}(\sum_{n \geq 1} 1_{\{\nu \geq n\}} |X_n - X_{n-1}|) < +\infty$ .

2b) Que vaut  $\sum_{n \geq 1} 1_{\{\nu \geq n\}} (X_n - X_{n-1})$ ? En déduire que  $X_\nu$  est intégrable.

3) Montrer que  $(X_{\nu \wedge p})_{p \geq 0}$  tend vers  $X_\nu$  dans  $L^1$  lorsque  $p \rightarrow \infty$

4) En déduire que, si  $\nu_1 \leq \nu_2$  sont deux temps d'arrêt avec  $\nu_2$  intégrable, on a

$$\mathbb{E}(X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}) \leq X_{\nu_1}$$

(on peut se servir du fait suivant: si  $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$ , alors  $A \cap \{\nu_1 \leq k\} \in \mathcal{F}_{\nu_1 \wedge k}$ , après l'avoir prouvé ...).

EXERCICE 4.46. 1) Montrer qu'une martingale est régulière si et seulement si elle est équi-intégrable (Voir Exercice 2.5).

2) Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une martingale vérifiant

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n| \log^+ |X_n|] < +\infty. \quad (4.11)$$

Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale régulière.

Remarque: Le résultat le plus important de cet exercice est le suivant: une martingale est régulière si et seulement si elle est équi-intégrable, c'est-à-dire vérifie la condition

$$\sup_{n \geq 0} \int_{\{|X_n| > a\}} |X_n| d\mathbb{P} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0.$$

EXERCICE 4.47. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. On suppose que la tribu  $\mathcal{F}$  est séparable i.e. qu'il existe une famille dénombrable  $(F_n)_{n \geq 1}$  d'événements tels que  $\mathcal{F} = \sigma(F_n, n \geq 1)$ . Soit  $\mathbb{Q}$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , i.e. vérifiant  $\mathbb{Q}(A) = 0$  si  $\mathbb{P}(A) = 0$ .

1a) Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'événements tels que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$  et vérifiant, pour tout  $n$ ,  $\mathbb{Q}(A_n) \geq \alpha > 0$ . Soit  $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ . Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0$  et  $\mathbb{Q}(A) \geq \alpha$ .

1b) En déduire que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\mathbb{P}(A) < \eta$  implique  $\mathbb{Q}(A) < \varepsilon$ .

2) Montrer qu'il existe une famille dénombrable  $\mathcal{P}_n = (G_{n,k})_{1 \leq k \leq r(n)}$  de partitions finies de  $\Omega$  telle que

$$\mathcal{F}_n = \sigma(F_1, \dots, F_n) = \sigma(\mathcal{P}_n).$$

3) Soit  $I_n = \{k \in \{1, \dots, r(n)\}, \mathbb{P}(G_{n,k}) > 0\}$ . On pose

$$X_n = \sum_{k \in I_n} \frac{\mathbb{Q}(G_{n,k})}{\mathbb{P}(G_{n,k})} 1_{G_{n,k}}.$$

Montrer que  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale qui converge p.s.

4) Montrer que la martingale  $(X_n)_{n \geq 1}$  est équi-intégrable (utiliser 1b)) et en conclure qu'elle converge dans  $L^1$ .

5) Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P}$ , où  $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$ .

Remarque: Cet exercice présente une démonstration du théorème de Radon-Nikodym pour une tribu séparable. On peut, mais c'est assez technique, étendre cette démonstration aux tribus quelconques.

EXERCICE 4.48. Sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  on considère une sous-martingale  $(X_n)_{n \geq 0}$  telle que  $X_0 = 0$ . Soit  $(A_n)_{n \geq 0}$  son compensateur. On a déjà vu comment déduire des informations sur la convergence d'une martingale, à partir du comportement du processus croissant associé. Dans ce problème on va plus à fond sur cette question.

1) On suppose que  $X_n \geq 0$  pour tout  $n$  et on pose, pour  $a > 0$ ,  $\sigma_a = \inf(n \geq 1, A_{n+1} > a)$ .

1a) Montrer que  $\sigma_a$  est un temps d'arrêt.

1b) Montrer que  $\mathbb{E}[X_{n \wedge \sigma_a}] \leq a$ .

1c) En déduire que  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. sur  $\{\sigma_a = +\infty\}$ .

1d) Montrer que, p.s.,

$$\{A_\infty < +\infty\} \subset \{X_n \text{ converge}\} \subset \left\{ \sup_{n \geq 0} X_n < +\infty \right\}.$$

On pose, pour  $a > 0$ ,  $\tau_a = \inf(n \geq 1, X_n > a)$ . On dit que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est de classe  $\mathcal{C}^+$  si, pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{E}[(\Delta_{\tau_a})^+ 1_{\{\tau_a < +\infty\}}] = C_a < +\infty$$

où  $\Delta_n = X_n - X_{n-1}$ ,  $n \geq 1$  (en particulier  $(X_n)_{n \geq 0}$  est de classe  $\mathcal{C}^+$  si  $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |X_n - X_{n-1}|) \leq M < +\infty$  pour tout  $n \geq 0$ ).

2) On suppose que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est de classe  $\mathcal{C}^+$  (on ne suppose plus  $X_n \geq 0$ ).

2a) Montrer que  $\mathbb{E}[X_{\tau_a}^+ 1_{\{\tau_a < +\infty\}}] \leq a + C_a$ , puis que  $\mathbb{E}[X_{n \wedge \tau_a}^+] \leq 2a + C_a$ .

2b) En déduire que  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[X_{n \wedge \tau_a}] < +\infty$ , puis que  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. sur  $\{\tau_a = +\infty\}$  (utiliser l'égalité  $|x| = 2x^+ - x$ ).

2c) En déduire que p.s.  $\{X_n \text{ converge}\} = \{\sup_{n \geq 0} X_n < +\infty\}$ .

2d) Montrer que  $\mathbb{E}[A_{n \wedge \tau_a}] = \mathbb{E}[X_{n \wedge \tau_a}] \leq 2a + C_a$ . En déduire que  $\mathbb{E}[A_{\tau_a}] < +\infty$  et que, p.s.,  $\{\tau_a = +\infty\} \subset \{A_\infty < +\infty\}$ .

2e) Montrer que p.s.  $\{\sup_{n \geq 0} X_n < +\infty\} \subset \{A_\infty < +\infty\}$ .

2f) On suppose de plus que  $X_n \geq 0$  pour tout  $n$ ; montrer que

$$\{X_n \text{ converge}\} = \left\{ \sup_{n \geq 0} X_n < +\infty \right\} = \{A_\infty < +\infty\} \quad \text{p.s.}$$

3) On suppose que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale satisfaisant à la relation  $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |\Delta_n|) < +\infty$ . Montrer que p.s.

$$\Omega = \{X_n \text{ converge}\} \cup \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty \right\}.$$

4) Soit  $(B_n)_{n \geq 1}$  une suite d'événements adaptés. Montrer que p.s.

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^{\mathcal{F}_{n-1}}(B_n) < +\infty \right\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n} < +\infty \right\}.$$

5) Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une martingale de carré intégrable, nulle en 0, et  $(\langle M \rangle_n)_{n \geq 0}$  le processus croissant associé. On pose  $A_n = \langle M \rangle_n$ .

5a) Montrer que la sous-martingale  $X_n = (M_n + 1)^2$  a pour compensateur  $(A_n)_{n \geq 0}$ .

5b) En déduire (utiliser 1)) que p.s.

$$\{A_\infty < +\infty\} \subset \{M_n \text{ converge}\}.$$

5c) On suppose de plus que  $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |M_{n+1} - M_n|^2) < +\infty$ . Montrer que p.s.

$$\{A_\infty < +\infty\} = \{M_n \text{ converge}\}$$

$$\{A_\infty = +\infty\} = \{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty\}.$$

(une inégalité utile:  $|y^2 - x^2| \leq |y - x|^2 + 2|x||y - x|$ ).

EXERCICE 4.49. Dans ce problème on montre, avec une méthode probabiliste, que toute fonction Lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée.

Soient  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction Lipschitzienne de constante de Lipschitz  $L > 0$  et  $X$  une v.a. à valeurs  $[0, 1]$ , de loi uniforme. On pose

$$X_n = \frac{[2^n X]}{2^n} \quad \text{et} \quad Z_n = 2^n (f(X_n + \frac{1}{2^n}) - f(X_n))$$

où  $[x]$  désigne la partie entière du réel  $x$ .

a) Etudier la convergence de  $(X_n)_{n \geq 0}$ .

b) Montrer l'égalité de tribus

$$\bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

c) Déterminer la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant  $(X_k)_{k \leq n}$ . En déduire que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est une martingale bornée.

On note  $Z_\infty$  sa limite p.s. et dans  $L^1$ .

d) Montrer qu'il existe une fonction  $g$  borélienne telle que  $Z_\infty = g(X)$ .

e) Calculer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $X_n$  et montrer que p.s.,

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + \frac{1}{2^n}} g(u) du.$$

f) Déduire que pour tout  $k, n, 0 \leq k \leq 2^n - 1$ ,

$$f\left(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} g(u) du$$

et conclure que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(u) du. \quad (4.12)$$

EXERCICE 4.50. Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , indépendantes et de même loi  $\mu$ . On suppose que  $\mathbb{E}(Y_i) = m < 0$  et  $\mathbb{P}(Y_i = 1) > 0, \mathbb{P}(Y_i \geq 2) = 0$ . On pose  $X_0 = 0, X_n = Y_1 + \dots + Y_n$  et

$$W = \sup_{n \geq 0} X_n.$$

Le but de ce problème est de trouver la loi de  $W$ .

a) Montrer que  $W < +\infty$  p.s.

b1) Soit  $X$  une v.a. réelle. On note  $M(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$  sa transformée de Laplace (éventuellement  $M(\lambda) = +\infty$ ) et  $\psi(\lambda) = \log M(\lambda)$ . Montrer que  $\psi$  est une fonction convexe (suggestion: on utilise l'inégalité de Hölder).

b2) On pose  $M(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda Y_1})$  et  $\psi(\lambda) = \log M(\lambda)$ . Montrer que  $\psi(\lambda) < +\infty$  pour tout  $\lambda \geq 0$ . Que vaut  $\psi'(0+)$ ? Montrer que  $\psi(\lambda) \rightarrow +\infty$  pour  $\lambda \rightarrow +\infty$  et qu'il existe un  $\lambda_0 > 0$  unique tel que  $\psi(\lambda_0) = 0$  et que de plus  $\psi'(\lambda_0) > 0$ .

c) On considère la mesure sur  $\mathbb{Z}$

$$\nu(k) = e^{\lambda_0 k} \mu(k).$$

Montrer que  $\nu$  est une probabilité. Soit  $(\tilde{Y}_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes et de même loi  $\nu$  et  $\tilde{X}_0 = 0, \tilde{X}_n = \tilde{Y}_1 + \dots + \tilde{Y}_n$ . Montrer que  $\mathbb{E}(\tilde{Y}_n) > 0$ . Montrer que, si  $\mathcal{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)$  et  $\tilde{\mathcal{Y}}_n = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$ , on a, pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y}_n \in A) = \mathbb{E}(1_{\{\tilde{\mathcal{Y}} \in A\}} e^{-\lambda_0 \tilde{X}_n}). \quad (4.13)$$

d) Montrer que  $(e^{\lambda_0 X_n})_{n \geq 0}$  (resp.  $(e^{-\lambda_0 \tilde{X}_n})_{n \geq 0}$ ) sont des martingales par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  (resp.  $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$ ).

e) On pose  $\tau_k = \inf\{n; X_n \geq k\}, \tilde{\tau}_k = \inf\{n; \tilde{X}_n \geq k\}$ . Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_k \leq n) &= \mathbb{E}(1_{\{\tau_k \leq n\}} e^{-\lambda_0 \tilde{X}_n}) = \mathbb{E}(1_{\{\tilde{\tau}_k \leq n\}} e^{-\lambda_0 \tilde{X}_{\tilde{\tau}_k}}) = \\ &= e^{-\lambda_0 k} \mathbb{P}(\tilde{\tau}_k \leq n). \end{aligned} \quad (4.14)$$

f) Montrer que  $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_k < +\infty) = 1$  et que  $W$  a une loi géométrique de paramètre  $1 - e^{-\lambda_0}$ . Déterminer  $\lambda_0$  dans le cas  $\mathbb{P}(Y_i = -1) = q, \mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ , avec  $0 < p < q < 1$ .

EXERCICE 4.51. Sur  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ , on considère une probabilité  $\mathbb{Q}$  dominée localement par  $\mathbb{P}$ : pour tout  $n \geq 0$ , il existe une variable aléatoire  $\xi_n \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_n$ -mesurable telle que pour tout  $A \in \mathcal{F}_n$ ,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(\xi_n \mathbf{1}_A).$$

On a vu dans l'Exercice 4.43 que  $(\xi_n)_{n \geq 0}$  est une martingale, d'espérance 1. Le but de cet exercice est de déterminer certaines transformations qui changent les martingales par rapport à  $\mathbb{P}$  en des martingales par rapport à  $\mathbb{Q}$ . On notera  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$  et  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  les espérances par rapport à  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  respectivement.

On pose  $\alpha_n = \xi_n \xi_{n-1}^{-1} \mathbf{1}_{\{\xi_{n-1} > 0\}}$ . On suppose que pour tout  $n$ , les variables  $\xi_n$  et  $\alpha_n$  sont bornées  $\mathbb{P}$ -p.s. Ceci implique en particulier que toute variables aléatoire  $Y$   $\mathcal{F}_n$ -mesurable et  $\mathbb{P}$ -intégrable est également  $\mathbb{Q}$ -intégrable.

Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une  $\mathbb{P}$ -martingale. On pose

$$M'_n = M_n - \sum_{p=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{p-1}}(\alpha_p (M_p - M_{p-1}))$$

(cette expression a un sens en vertu des hypothèses précédentes).

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{\xi_n = 0\} \subset \{\xi_{n+1} = 0\}$   $\mathbb{P}$ -p.s.

b) Soit  $Y$  une v.a. positive  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Calculer  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_n} (Y)$ . En déduire  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_n} (Y)$  si  $Y$  est  $\mathbb{P}$ -intégrable et  $\mathcal{F}_n$ -mesurable.

c) Montrer que  $(M'_n)_{n \geq 0}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.

d) On reprend la martingale de l'Exercice 4.30,

$$\xi_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n},$$

où  $(S_n)_{n \geq 0}$  est la marche aléatoire symétrique simple ( $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ , où les  $(U_i)_{i \geq 1}$  forment une suite de variables indépendantes à valeurs  $+1$  ou  $-1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ). Soit  $\mathbb{Q}$  une probabilité sur  $\Omega$  telle que sa restriction à  $\mathcal{F}_n$ , notée  $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n}$ , satisfait à

$$\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n} = \xi_n^\theta \cdot \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}.$$

Expliciter la  $\mathbb{Q}$ -martingale  $(S'_n)_{n \geq 0}$  associée à  $(S_n)_{n \geq 0}$ .

EXERCICE 4.52. Dans ce problème on applique un résultat de convergence de surmartingales positives à l'étude d'un algorithme stochastique.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré.

A ) (lemme de Robbins-Siegmund) On considère  $(Z_n, \beta_n, \xi_n, \eta_n)_{n \geq 0}$ , des v.a. positives, adaptées, finies p.s. On suppose que, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Z_{n+1}) \leq (1 + \beta_n)Z_n + \xi_n - \eta_n \quad p.s.$$

On va établir un critère de convergence p.s. pour la suite  $(Z_n)_{n \geq 0}$ .

A1 ) On pose

$$\alpha_{-1} = 1, \quad \alpha_n = \prod_{k=0}^n (1 + \beta_k)^{-1},$$

$$Z'_n = \alpha_{n-1}Z_n, \quad \xi'_n = \alpha_n \xi_n, \quad \eta'_n = \alpha_n \eta_n.$$

Montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Z'_{n+1}) \leq Z'_n + \xi'_n - \eta'_n$$

et que  $U_n = Z'_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\xi'_k - \eta'_k)$  est une surmartingale.

A2 ) Soit  $a > 0$ . On considère le temps d'arrêt

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} (\xi'_k - \eta'_k) > a\}.$$

Montrer que, sur  $\{\tau_a = +\infty\}$ ,  $(U_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. vers une v.a. finie.

A3 ) Soit  $\Gamma = \{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n < +\infty, \}$ .

i ) Montrer que, sur  $\Gamma$ ,  $\alpha_n$  converge vers  $\alpha_\infty > 0$  et que  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n < +\infty$ .

ii ) Montrer que, sur  $\Gamma$ ,  $(Z_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. vers une v.a.  $Z_\infty$  finie et que  $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < +\infty$  p.s.

B ) (Algorithmes de Robbins-Monro) On considère maintenant une suite adaptée de vecteurs aléatoires  $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$  à valeurs  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 0}$  de v.a. positives, adaptées telles que

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_n Y_{n+1}.$$

On suppose qu'il existent une fonction borélienne  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , une constante  $K < +\infty$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  tels que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Y_{n+1}) = f(X_n), \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(|Y_{n+1}|^2) \leq K(1 + |X_n|^2),$$

et que,

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty$ .

(ii)  $f$  est continue,  $f(x_0) = 0$  et  $\langle x - x_0, f(x) \rangle < 0$  pour  $x \neq x_0$ .

B1 ) On pose  $Z_n = |X_n - x_0|^2$ . Montrer qu'il existe une constante  $\bar{K}$  telle que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Z_{n+1}) \leq (1 + \bar{K}\gamma_n^2)Z_n + \bar{K}\gamma_n^2 + 2\gamma_n \langle X_n - x_0, f(X_n) \rangle.$$

B2 ) Dédurre de A) que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. vers une v.a.  $Z$  et que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \langle X_n - x_0, f(X_n) \rangle$  converge p.s.

B3 ) Montrer que  $Z = 0$  p.s. i.e. que  $X_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} x_0$  p.s.