Université Paris VII - Agrégation de Mathématiques (François Delarue)

MÉTHODE DE MONTE-CARLO

Ce texte vise à présenter l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo dans le calcul du prix d'une option.

1. Position du problème

Le juste prix d'une option d'achat ou de vente s'exprime comme l'espérance d'une variable aléatoire de loi connue. Se pose de fait en pratique la question du calcul explicite de cette quantité. Une stratégie naturelle, bien que peu pertinente dans le cadre d'un marché constitué d'un seul actif, consiste à recourir à la méthode de Monte-Carlo. Comme expliqué en fin de texte, cette approche prend tout son sens lorsque l'option est construite à partir d'un panier d'actifs de type CAC 40.

La méthode de Monte-Carlo, utilisée pour le calcul numérique d'intégrales, repose essentiellement sur les principes fondamentaux de la loi des grands nombres et du Théorème Central Limite. En comparaion des méthodes numériques, cette approche compte deux atouts majeurs :

(1) La régularité de la fonction à intégrer n'affecte pas la qualité de l'approximation.

(2) La dimension de l'espace sur lequel évolue la fonction n'influence que de façon relativement limitée la qualité de l'approximation.

D'un point de vue informatique, l'analyse de la qualité de l'approximation est indissociable du coût algorithmique de la méthode : s'attarder sur l'un sans considérer l'autre est dépourvu de sens. Nous tâcherons de fait d'analyser ces deux quantités au cours du texte.

2. Fondements de la méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo vise à interpréter une intégrale comme une espérance mathématique d'une v.a. sur un espace de probabilité adéquat. Par exemple, une intégrale de la forme :

$$\int_{[0,1]^d} f(x)dx, \ f \text{ étant intégrable},$$

peut s'interpréter comme $\mathbb{E}f(U)$, où U est un vecteur de d-v.a.i.id de loi uniforme sur $[0,1]$. Dans ce contexte, la loi des grands des nombres assure que pour une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de v.a.i.id de loi uniforme sur $[0,1]^d$:

$$\mathbb{P}-\text{p.s.}, \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \to \mathbb{E}\big(f(U)\big).$$

Plus généralement, une intégrale de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx, \ \text{correctement définie},$$

avec f densité sur $\mathbb{R}^d$, peut s'écrire sous la forme $\mathbb{E}(g(X))$, où X désigne un v.a. dont la loi admet f pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Là encore, la loi des grands nombres assure, que pour une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.i.id de même loi que X :

$$\mathbb{P}-\text{p.s.}, \ \overline{G}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \to \mathbb{E}\big(g(X)\big).$$

Motivations. Les questions pratiques sont les suivantes :

(1) Sous quelles conditions est-il possible de mettre en place la méthode de Monte-Carlo ?

(2) Peut-on avoir une idée de la vitesse de convergence et du coût algorithmique ?

(3) Comment choisir de la meilleure façon possible la loi de X ?

3. Coût Algorithmique et Vitesse de Convergence

3.1. **Simulation.** D'un point de vue pratique, il est nécessaire de pouvoir simuler informatiquement la loi de X afin de procéder à un tirage d'un grand échantillon de même loi que X et de calculer une réalisation $\overline{\gamma}_n$ de l'estimateur $\overline{G}_n$. Bien entendu, la réalisation $\overline{\gamma}_n$ fournit l'approximation recherchée de l'espérance théorique $\mathbb{E}(g(X))$.

Le coût de la simulation de n vecteurs aléatoires indépendants de même loi que X est de l'ordre de $O(nd)$. De même, le calcul de la moyenne empirique de rang n est lui aussi de l'ordre de $O(nd)$. Le coût algorithmique de la méthode de Monte-Carlo est donc de l'ordre de $O(nd)$.

3.2. **Théorème Central Limite.** En reprenant les notations précédentes, nous supposons en supplément que la variable aléatoire $g(X)$ est de carré intégrable. De fait, nous pouvons noter : $\sigma^2 = \mathbb{V}(g(X))$. L'erreur, de nature aléatoire, entre l'estimateur et l'espérance est donnée par :

$$\varepsilon_n = \mathbb{E}\big(g(X)\big) - \frac{1}{n}\big(g(X_1) + ... + g(X_n)\big).$$

Le Théorème Central Limite nous assure que, pour un tirage $(x_1, ..., x_n)$ donné, l'ensemble :

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) - 1,960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) + 1,960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

est un intervalle de confiance asymptotique de $\mathbb{E}(g(X))$ de niveau de confiance 0,95.

La vitesse de convergence est donc de l'ordre de $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}$ pour un coût algorithmique de $O(nd)$: cela signifie que, pour un algorithme comptant n opérations élémentaires, la précision est de l'ordre de $\sigma\sqrt{\dfrac{d}{n}}$. On en déduit les points suivants :

(1) La méthode de Monte-Carlo est sans intérêt pour le calcul d'intégrales en petite dimension ou d'intégrales de fonctions régulières.

(2) Il est crucial de minimiser la variance σ. Si l'intégrale admet plusieurs écritures de type $\mathbb{E}(g(X))$, on aura tout intérêt à choisir la forme assurant la plus faible variance.

La variance σ^2 est donnée par $\mathbb{V}(\sigma) = \mathbb{E}(g^2(X)) - (\mathbb{E}(g(X)))^2$. L'objectif étant de déterminer une estimation de $\mathbb{E}\big(g(X)\big)$, supposée inconnue, il paraît vraisemblable que le calcul explicite de la variance soit, dans les cas pertinents, impossible. La stratégie est alors de remplacer la variance par l'estimateur sans biais, appelé variance empirique, et donné par :

$$\forall\ n \geq 2,\ \overline{\Gamma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\big(g(X_i) - \overline{G}_n\big)^2.$$

Le lemme de Slutsky permet d'établir que, pour un tirage $(x_1, ..., x_n)$ donné, conduisant à une réalisation notée $\overline{g}_n$ de $\overline{G}_n$ et une réalisation notée $\overline{\gamma}_n$ de $\overline{\Gamma}_n$, l'ensemble :

$$\left[\overline{g}_n - 1,960\frac{\overline{\gamma}_n}{\sqrt{n}}, \overline{g}_n + 1,960\frac{\overline{\gamma}_n}{\sqrt{n}}\right],$$

est un intervalle de confiance asymptotique de $\mathbb{E}(g(X))$ de niveau de confiance 0,95.

4. Prix d'une option européenne sur un actif financier

Nous commençons par nous familiariser avec la méthode de Monte-Carlo avec quelques calculs d'intégrales de dimension 1. Dans cette perspective, nous nous focalisons sur le calcul pratique du prix d'une option liée à un marché constitué d'une seule action. Nous serons en mesure de proposer à la fin du texte une extension au cas d'un panier d'actifs.

Etant donné un marché financier constitué d'une action de cours $(S_t)_{t\geq 0}$ et d'une épargne de taux d'intérêt mathématique ρ, une option d'achat (*call* en anglais) de prix d'exercice K et d'échéance T est un contrat conclu à l'instant 0, au terme duquel son acquéreur détient le droit, mais non l'obligation, d'acheter un nombre M fixé d'actions à l'instant T et au prix K préalablement choisis, et ce quel que soit le prix de l'actif S_T à l'instant T.

De la même façon qu'il existe des options d'achat, il existe des options de vente (*put* en anglais). Dans ce cas, le détenteur de l'option peut, s'il le souhaite, vendre (et non plus acheter) une action à la date d'échéance T et au prix d'exercice K, et ce quel que soit le cours S_T de l'action à l'instant T.

Le modèle de Black-Scholes conduit à établir pour les prix C de l'option d'achat et P de l'option de vente les relations suivantes :

$$C = \mathbb{E}\Big(S_0 \exp\big(-\sigma\sqrt{T}N - \frac{1}{2}\sigma^2 T\big) - K\exp(-\rho T)\Big)^+,$$
$$P = \mathbb{E}\Big(K\exp(-\rho T) - S_0 \exp\big(-\sigma\sqrt{T}N - \frac{1}{2}\sigma^2 T\big)\Big)^+,$$

N suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 1. *Les prix C et P peuvent se calculer de la façon suivante. Étant données les fonctions :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt,$$
$$d_1(x) = T^{-1/2}\sigma^{-1}\left[\ln(K^{-1}x) + (\rho + \sigma^2/2)T\right]$$
$$d_2(x) = d_1(x) - \sigma T^{1/2}$$

alors,

$$C = S_0\Phi\big(d_1(S_0)\big) - K\exp(-\rho T)\Phi(d_2(S_0)),$$
$$P = K\exp(-\rho T)\Phi(-d_2(S_0)) - S_0\Phi(-d_1(S_0)),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La Proposition 1 fournit une méthode de calcul numérique du prix de l'option d'achat et de vente et de fait un moyen de vérification de la méthode de Monte-Carlo. Il est par exemple possible de programmer une fonction `option1` permettant de déterminer en fonction de σ, T, K, ρ et S_0 les prix Black et Scholes de l'option d'achat et de l'option de vente.

Voici quelques valeurs avec lesquelles travailler :

(1) $S_0 = 15$.

(2) $T = 1/2$.

(3) $\rho = \ln(1,03)$.

5. Premier calcul de type Monte-Carlo

De notre côté, nous avons écrit deux fonctions `call` et `put` permettant :

(1) De calculer, pour un $n \geq 1$ donné une réalisation de la moyenne empirique associée aux prix C et P.

(2) De calculer la variance empirique associée à cette réalisation.

(3) De renvoyer un intervalle de confiance au niveau 0,95 pour les prix C et P.

(4) De donner le temps nécessaire au calcul.

Avec $K = 20$ et $\sigma = 0.2$ puis $\sigma = 0.5$, nous avons obtenu les résultats suivants (les résultats sont de la forme (valeur théorique, temps de simulation, estimation,variance, intervalle), les paramètres de la fonction donnent tout d'abord la taille de l'échantillon, puis sont ordonnées comme dans la Proposition 1 :

Première série.

```
-->[P,C]=blscholes(10000,0.2,0.5,20,log(1.03),15)
     C =
     ! 0.0248242 0. 0.0254728 0.2279236 0.0210055 0.0299401 !
     P =
     ! 4.7314098 0. 4.7569755 2.0647223 4.7165069 4.7974441 !

-->[P,C]=blscholes(10000,0.2,0.5,20,log(1.03),20)
     C =
     ! 1.2719723 0.01 1.2737212 1.9203858 1.2360816 1.3113608 !
     P =
     ! 0.9785578 0.01 0.9821467 1.4263642 0.9541900 1.0101035 !

-->[P,C]=blscholes(10000,0.2,0.5,20,log(1.03),25)
     C =
     ! 5.3532204 0. 5.3527727 3.4732757 5.2846965 5.4208489 !
     P =
     ! 0.0598060 0.01 0.0627034 0.3353658 0.0561302 0.0692766 !
```

Deuxième série.

```
-->[P,C]=blscholes(10000,0.5,0.5,20,log(1.03),15)
     C =
     ! 0.7606462 0.01 0.7322648 2.3673635 0.6858644 0.7786651 !
     P =
     ! 5.4672318 0. 5.4235467 3.9137702 5.3468368 5.5002566 !

-->[P,C]=blscholes(10000,0.5,0.5,20,log(1.03),20)
     C =
     ! 2.9348542 0.01 2.7958513 5.0014674 2.6978225 2.89388 !
     P =
     ! 2.6414398 0.01 2.690484 3.2887037 2.6260254 2.7549426 !

-->[P,C]=blscholes(10000,0.5,0.5,20,log(1.03),25)
     C =
     ! 6.4567477 0.01 6.4324984 7.9631893 6.2764199 6.5885769 !
     P =
```

```
! 1.1633332 0.01 1.1340899 2.2408692 1.0901689 1.1780109 !
```

Nous constatons des variations significatives de la variance dans chacune des séries et entre les deux séries.

6. Principal général de la réduction de variance

Nous avons vu dans le troisième paragraphe que la méthode de Monte-Carlo s'avérait d'autant plus performante que la variance de la variable sous-jacente était petite. Ceci nous pousse à envisager plusieurs techniques, plus ou moins générales, afin de réduire la variance des estimateurs utilisés.

L'idée principale est la suivante. Imaginons que nous souhaitions déterminer une intégrale pouvant se mettre sous la forme $\mathbb{E}(g(X))$, nous cherchons alors une variable aléatoire Y facilement simulable et une fonction h, de sorte que :

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \mathbb{E}\big(h(Y)\big),$$

avec $\mathbb{V}(h(Y)) < \mathbb{V}(g(X))$. Attention, il ne faut pas oublier que le changement de la variable aléatoire sous-jacente entraîne une modification du coût de l'algorithme. Un faible gain de précision entraînant une augmentation démesurée du coût de l'algorithme est sans intérêt !

Nous présentons dans la suite du texte quelques méthodes de réducation de la variance.

7. Variables de Contrôle

La technique dite de variables de contrôle vise à écrire la quantité $\mathbb{E}(g(X))$ sous la forme :

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \mathbb{E}\big(g(X) - h(X)\big) + \mathbb{E}\big(h(X)\big),$$

pour une fonction h telle que :

(1) $\mathbb{E}\big(h(X)\big)$ soit calculable de façon explicite.
(2) $\mathbb{V}\big(f(X) - h(X)\big) < \mathbb{V}\big(f(X)\big)$.

Il reste à savoir si le coût de l'algorithme sera ou non profondément modifié par cette opération.

Voici un exemple fondé sur la proposition suivante :

Proposition 2. *Les Prix P et C sont liés par la relation :*

$$C - P = S_0 - \exp(-\rho T)K.$$

Au regard des exemples de la Partie 6, la Proposition 2 permet de réduire la variance du calcul de C ou celle du calcul de P en se fondant sur le calcul préalable de l'une de ces deux quantités.

8. Méthode dite d'échantillonnage préférentiel

Principe. Considérons le cas d'une espérance de la forme $\mathbb{E}(g(X))$, avec X de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, de densité notée f. Dans ces conditions, il est possible, pour une nouvelle densité $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}^d$, strictement positive sur le support de f, d'écrire l'espérance à estimer sous la forme :

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \int \frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \tilde{f}(x)dx.$$

Ceci signifie que l'on vise à écrire :

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \mathbb{E}\big(\frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)}\big),$$

pour une variable aléatoire Y admettant $\tilde{f}$ pour densité sur $\mathbb{R}^d$. Si la variable aléatoire Y est aisément simulable, il est envisageable d'utiliser l'estimateur traditionnel de $g(Y)f(Y)/\tilde{f}(Y)$, cons-

-truit à partir d'un échantillon de loi Y.

L'idéal serait d'obtenir finalement que :

$$\mathbb{V}\Big(\frac{f(Y)g(Y)}{\tilde{f}(Y)}\Big) = \int \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)}dx - \big(\mathbb{E}(g(X))\big)^2 < \mathbb{V}(g(X)),$$

pour peu que le coût de l'algorithme reste raisonnable en comparaison de la précision apportée. Dans ces conditions, le cas idéal serait donnée pour $g > 0$ par :

$$\widetilde{f}(x) = \frac{g(x)f(x)}{\mathbb{E}(g(X))},$$

qui annulerait la variance du nouvel estimateur. Mais, un tel cas est irréaliste : on ne connaît pas $\mathbb{E}(g(X))$! Néanmoins, l'idée est là : choisir $\widetilde{f}$ aussi proche que possible de la fonction $|fg|$ et normaliser.

Exemple 1. Nous savons que le prix d'un *call* est donné par la relation :

$$C = S_0 \exp(-\frac{\sigma^2}{2}T)\mathbb{E}\Big(\exp\big(\sigma\sqrt{T}N\big) - S_0^{-1}K\exp(-\rho T + \frac{\sigma^2}{2}T)\Big)^+.$$

Supposons que $K = S_0\exp\big(\rho T - \frac{\sigma^2}{2}T\big)$. Alors, le prix du *call* est ramené à :

$$C = S_0\exp(-\frac{\sigma^2}{2}T)\mathbb{E}\Big(\exp\big(\sigma\sqrt{T}N\big) - 1\Big)^+.$$

Nous avons donc à estimer une quantité de la forme $\Delta = \mathbb{E}\big(\exp(\beta N) - 1\big)^+$, pour un réel $\beta > 0$.

Nous savons que pour x proche de 0, $\exp(\beta x) - 1$ est proche de βx. Ceci nous pousse à écrire Δ sous la forme :

$$\begin{aligned}
\Delta = \mathbb{E}\big(\exp(\beta N) - 1\big)^+ &= \int_{\mathbb{R}^+}\big(\exp(\beta x) - 1\big)^+\exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\big(\exp(\beta x) - 1\big)^+}{\beta x}\beta x\exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\big(\exp(\beta\sqrt{y}) - 1\big)^+}{\sqrt{y}}\exp\big(-\frac{y}{2}\big)\frac{dy}{2\sqrt{2\pi}} = \mathbb{E}\Big(\frac{\big(\exp(\beta\sqrt{Y}) - 1\big)^+}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Y}}\Big),
\end{aligned}$$

où Y désigne une v.a. de loi exponentielle de paramètre 0,5.

Exemple 2. La méthode se généralise au cas où l'égalité $K = S_0\exp\big(\rho T - \frac{\sigma^2}{2}T\big)$ n'est plus vérifiée à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 3. *En notant :*

$$k = S_0^{-1}\big(K\exp(-\rho T + \frac{\sigma^2 T}{2})\big),\ \beta = \sigma\sqrt{T},$$

le prix C peut s'écrire :

$$C = S_0\exp(-\frac{\sigma^2}{2}T)\mathbb{E}\Big(\frac{\big(\exp(\beta\sqrt{Y}) - k\big)^+ + \big(\exp(-\beta\sqrt{Y}) - k\big)^+}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Y}}\Big),$$

où Y suit une loi exponentielle de paramètre $1/2$.

9. Dimension supérieure : prix d'une option sur un panier d'actifs

Ce dernier paragraphe illustre l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo en dimension $d > 1$ à travers le calcul numérique d'une formule de prix d'option sur un panier d'actifs (typiquement CAC 40 ou autres).

9.1. **Prix des Options.** Dans la pratique, les marchés financiers sont constitués de plusieurs actifs risqués. Par exemple, le CAC 40 regroupe les cotations des quarante plus grosses entreprises françaises.

Dans ce contexte, il est envisageable d'acheter une option sur un panier d'actifs, c'est-à-dire sur une combinaison d'actions côtées sur le marché. Le cours de chacune des actions est modélisé par un processus $(S_t^i)_{t\geq 0}$, i variant de 1 à d ($d = 40$ si le panier considéré coïncide avec les valeurs du CAC 40).

La valeur du panier à l'instant T s'écrit comme une combinaison des variables $(S_T^i)_{1\leq i\leq d}$. Quitte à renormaliser la combinaison, il est possible de supposer qu'elle s'écrit comme un barycentre :

$$X = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_T^i, \text{ avec } \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = 1.$$

La question se pose du juste prix d'une option (d'achat ou de vente) sur le panier. Le principe est le même que précédemment : par exemple, l'acheteur de l'option d'achat détient le droit d'acheter la combinaison $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ d'actions (*i.e.* α_1 actions de type 1, α_2 actions de type 2 et ainsi de suite) au prix d'exercice K et à la date d'échéance T.

Dans ce cadre, nous admettons que le prix est de la forme $\exp(-\rho T)\mathbb{E}[(X - K)^+]$, où $\mathbb{P}$ désigne une probabilité équivalente à la probabilité du marché. La loi de $(S_1, \dots, S_d)$ sous $\mathbb{P}$ est une loi log-normale de matrice de covariance notée σ^2 (σ^2 est donc une matrice symétrique positive de taille d et σ sa racine carrée symétrique positive, appelée matrice de *volatilité*). Concrètement,

$$(S_1, \dots, S_d) \sim \big(S_0^i \exp(\rho T - \frac{1}{2}|\sigma_{i,\cdot}|^2 T - T^{1/2}\langle \sigma_{i,\cdot}, Z\rangle)\big)_{1\leq i\leq d},$$

où $Z \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\sigma_{i,\cdot}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^d$ formé par la i ème ligne de σ. Les quantités $(S_0^i)_{1\leq i\leq d}$ désignent les cours initiaux.

Nous obtenons finalement (en suivant un raisonnement analogue pour le *put*) :

$$C = \mathbb{E}\bigg(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_0^i \exp\big(-\frac{|\sigma_{i,\cdot}|^2}{2}T + T^{1/2}\langle \sigma_{i,\cdot}, Z\rangle\big) - K\exp(-\rho T)\bigg)^+,$$

$$P = \mathbb{E}\bigg(K\exp(-\rho T) - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_0^i \exp\big(-\frac{|\sigma_{i,\cdot}|^2}{2}T + T^{1/2}\langle \sigma_{i,\cdot}, Z\rangle\big)\bigg)^+.$$

Il est maintenant impossible de recourir comme en dimension 1 à une formule fermée, de sorte que la méthode de Monte-Carlo est particulièrement pertinente.

Dans la suite, on suppose que $d = 3$ et que la matrice σ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 1.3 & -0.5 \\ -0.2 & -0.5 & 1.3 \end{pmatrix}$$

On choisit $T = 0.5$, $K = 20$, $\rho = 0.05$, $\alpha = (1/2, 1/4, 1/4)$, $s_0 = (15, 15, 15)$.

Voici un exemple de résultat obtenu pour C et $n = 10000$ (ordonné de la façon suivante : temps de calcul, moyenne empirique, variance empirique, intervalle de confiance).

```
-->blscholesd(10000)
      ans =
      ! .16 1.3242559 24.48308 .8443875 1.8041242 !
```

9.2. **Réduction de la Variance.** En établissant, comme dans la Proposition 2, une relation de parité entre les prix C et P, il serait possible de mettre en place une méthode de variables de contrôle comme dans la Section 7.

Une autre méthode consiste à remarquer que le calcul de C conduit à estimer une quantité de la forme :

$$(\star) \qquad \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \exp(H^i) - K'\Big)^+$$

On envisage comparer cette quantité avec la suivante :

$$(\star\star) \qquad \mathbb{E}\Big(\beta \exp\big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\beta_i}{\beta} H^i\big) - K'\Big)^+,$$

avec la convention $\beta = \sum_{i=1}^{d} \beta_i$.

Dans notre cas, $\beta_i = \alpha_i S_0^i \exp(-\frac{|\sigma_{i,\cdot}|^2}{2} T)$, $H^i = T^{1/2}\langle \sigma_{i,\cdot}, Z\rangle = T^{1/2}(\sigma Z)_i$, et $K' = K \exp(-\rho T)$.

Remarquons que la quantité $(\star\star)$ peut être calculée directement avec la formule de Black et Scholes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\beta \exp\big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\beta_i}{\beta} H^i\big) - K'\Big)^+ \\
&= \mathbb{E}\Big(\beta \exp\big(\frac{|\sigma(\beta_1, \ldots, \beta_d)^t|}{\beta} T^{1/2} N\big) - K'\Big)^+, \quad N \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \Gamma \Phi(d_1(\Gamma)) - K' \Phi(d_2(\Gamma)),
\end{aligned}$$

où $\Gamma = \beta \exp((2\beta^2)^{-1} |\sigma(\beta_1, \ldots, \beta_d)^t|^2 T)$ (σ dans les définitions de $d1$ et de $d2$ devient dans ce contexte $|\sigma(\beta_1, \ldots, \beta_d)^t|/\beta$, les valeurs de K, T et ρ restant inchangées). Il reste alors à calculer à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo la quantité :

$$\mathbb{E}\Big(\big(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \exp(H^i) - K'\big)^+ - \big(\beta \exp\big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\beta_i}{\beta} H^i\big) - K'\big)^+\Big).$$

Voici un résultat de cette approche (mêmes valeurs que précédemment) :

```
-->blscholesd2(10000)
      ans =
      ! .22 1.2506945 17.700894 .9037570 1.597632 !
```

Fin de Texte.

10. Suggestions de Développement

(1) Dans la Section 3, le candidat pourra rappeler le lemme de Slutsky et détailler le cas échéant la construction de l'intervalle de confiance.

(2) Toujours dans la Section 3, le candidat pourra expliquer les déductions (1) et (2).

(3) Dans la Section 4, le candidat pourra démontrer la Proposition 1 et/ou mettre en place la fonction `option1` mentionnée par le texte. Il expliquera en quoi les calculs de C et P par cette approche fournissent un bon moyen de vérification de la méthode de Monte-Carlo.

(4) Dans la Section 5, le candidat pourra commenter les résultats proposés dans le texte. Dans ce contexte, il veillera à expliquer les fluctuations observées de la variance empirique.

(5) Dans la Section 7, le candidat pourra démontrer la Proposition 2 et mettre en place une méthode de variables de contrôle. Dans ce contexte, il veillera à comparer ses résultats à ceux de la Section 6 et pourra commenter cette affirmation souvent entendue : *"il est bon de commencer par calculer P pour calculer C"*.

(6) Dans la Section 8, le candidat pourra mettre en place informatiquement l'Exemple 1 ou démontrer la Proposition 3 et mettre en place l'Exemple 2. Dans le premier cas, le candidat pourra comparer ses résultas à ceux obtenus par la méthode de la Section 6 (quitte à devoir reprogrammer celle-ci). Dans le second cas, le candidat veillera à comparer ses résulats à ceux donnés dans la Section 6.

(7) Dans la Section 9, le candidat pourra mettre en place une méthode de Monte-Carlo à partir des expressions de P et C, puis l'une des deux méthodes de réduction de variance. Il veillera alors à comparer les différents résultats obtenus.