

PRIME D'UNE OPTION D'ACHAT OU DE VENTE

Ce texte vise à modéliser de façon simple l'évolution d'un actif financier à risque, et à introduire, dans ce contexte, la notion d'option d'achat ou de vente de l'actif en question. La modélisation retenue permet de déterminer une valeur théorique du juste prix de l'option.

1. MODÉLISATION D'UN MARCHÉ FINANCIER

L'une des modélisations les plus simples et les plus populaires en mathématique financière consiste à étudier un marché financier dont les caractéristiques sont les suivantes :

- (i) Il est d'une part possible de recourir à un placement sans risque, dont la rémunération, constante au cours du temps, est caractérisée par un taux d'intérêt fixe. De façon concrète, un épargnant plaçant une somme S_0^0 à l'instant 0 disposera à l'instant T d'un capital égal à $S_0^0 \exp(\rho T)$, où ρ est appelé taux d'intérêt mathématique.
Dans la pratique, la Caisse d'Épargne est le symbole le plus courant de l'épargne à taux fixe. Dans ce cadre, le taux d'intérêt des livrets de type A est de 3 pourcents par an ; cela signifie que pour 1 euro placé à la date 0, le montant disponible à la date $T = 1$ (le temps étant indexé par année) est de 1,03 euros. Dans ce cas, le taux d'intérêt mathématique est de $\rho = \ln(1,03)$ par an.
- (ii) De façon réciproque, il est envisageable de recourir au crédit, dont le taux d'intérêt, lui aussi constant, est supposé égal au taux de rémunération du placement sans risque. Par exemple, la dette d'un particulier, ayant souscrit un emprunt d'un montant de S_0^0 à l'instant 0, s'élève à l'instant T à $S_0^0 \exp(\rho T)$.
- (iii) Enfin, il existe un placement dit à risque, visant à acheter un actif, de type action boursière, dont l'évolution n'est pas garantie dans le temps (remarquons que l'actif pourrait également modéliser une devise étrangère ou une matière première). On suppose dans notre modèle qu'un seul type d'action est disponible. Dans ce contexte, le cours de l'action est aléatoire, et modélisé par une famille de v.a. $(S_t)_{t \geq 0}$, formant ce que l'on appelle un processus. L'une des difficultés consiste à proposer une modélisation de ce cours.
- (iv) Dans le cadre de l'actif risqué, la notion d'emprunt subsiste et porte le nom de vente à découvert : il est possible de vendre à découvert une action, c'est-à-dire de vendre une action à un instant donné $t > 0$ au cours S_t (et donc d'empocher une somme égale à S_t), alors que l'on n'en possède pas (cette procédure est courante sur les marchés financiers). Dans un tel cas, le remboursement se fait à un instant T donné, déterministe, postérieur à t , par le rachat d'une action au cours S_T .

Afin de simplifier davantage le modèle précédent, nous choisissons d'indexer le temps de façon discrète :

- (a) Dans ce contexte, les actifs sont évalués aux instants $0, 1, 2, \dots, N$ (N désignant le dernier des instants considérés) selon une échelle de temps adaptée (par exemple, une unité = un jour). Le taux d'intérêt de l'actif sans risque est noté r : le capital disponible suite au placement à l'instant 0 d'une somme S_0^0 à la caisse d'épargne est $S_0^0(1+r)$ à l'instant 1, $S_0^0(1+r)^2$ à l'instant 2, et ainsi de suite. Cette notation n'exclut pas le recours à une écriture de type exponentiel comme précédemment mais se révèle plus confortable dans le cas d'une indexation discrète.

- (b) Le cours de l'action est quant-à-lui représenté par une suite de v.a.r. $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. De façon plus précise, le cours à un instant $n \in \{0, \dots, N\}$ est donné par :

$$S_n = S_0 \times \xi_1 \times \dots \times \xi_n,$$

où S_0 représente le cours initial de l'action à l'instant 0, et où les v.a. $(\xi_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi :

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = u\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 = d\} = p,$$

avec $0 < p < 1$, et $0 < d < u$. d vient de l'anglais *down* (baisse) et u de l'anglais *up* (hausse). Il est à bien noter que le cours de l'action ne peut évoluer que de deux façons différentes : une hausse symbolisée par une multiplication par u et une baisse symbolisée par une multiplication par d .

Un tel modèle est usuellement attribué à *Cox et Rubinstein*.

2. CHOIX DES PARAMÈTRES DE HAUSSE ET DE BAISSSE

D'un point de vue pratique, le principe suivant limite les valeurs possibles de u, d et r :

Principe (Absence d'Opportunité d'Arbitrage). Il est réaliste de supposer $d < 1 + r < u$.

Esquisse de Preuve. Contentons-nous de montrer l'inégalité de gauche (celle de droite relevant du même raisonnement).

Imaginons que $d > (1 + r)$. Alors, à chaque instant $n \in \{0, \dots, N\}$, le cours de l'action S_n vérifie :

$$\mathbb{P} - \text{p.s.}, S_n > S_0(1 + r)^n.$$

Nous allons voir que ceci est incohérent d'un point de vue économique. Considérons pour cela le cas d'un investisseur disposant d'un capital nul à l'instant 0. A cet instant 0, il emprunte à la banque une somme S_0 au taux d'intérêt r , et achète avec cette somme une action dont le cours est par hypothèse S_0 . A un instant N donné, il revend son action au cours S_N . Avec probabilité 1, la somme empochée est supérieure strictement à $S_0(1 + r)^N$. L'investisseur peut rembourser en toute tranquillité son emprunt, et verser à la banque $S_0(1 + r)^N$. Il a finalement empoché $S_N - S_0(1 + r)^N$; cette somme étant presque sûrement positive. Autrement dit, si $d > (1 + r)$, il est possible de faire du profit sans prendre le moindre de risque. Une telle opération porte, en finances, le nom d'*arbitrage*, et s'avère irréaliste, car contraire au fonctionnement des marchés financiers. Il est donc nécessaire de supposer $d \leq (1 + r)$.

Tournons-nous vers le cas $d = (1 + r)$. Une telle égalité implique que pour tout instant $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$\mathbb{P} - \text{p.s.}, S_n \geq S_0(1 + r)^n.$$

Dans ce cas $S_N - S_0(1 + r)^N$ est presque-sûrement positif ou nul. Mais, en utilisant les relations $p > 0$ et $u > d$, il est facile de voir que cette hypothèse implique également :

$$\mathbb{P}\{S_N > S_0(1 + r)^N\} > 0.$$

Autrement dit, l'investisseur ne prend aucun risque car $\mathbb{P}\{S_N \geq S_0(1 + r)^N\} = 1$, et est susceptible de réaliser un profit strictement positif avec une probabilité non nulle. Un tel cas relève encore de la notion de profit sans risque, et se révèle donc contraire à l'absence d'opportunité d'arbitrage. Nous supposons donc $d < (1 + r)$. \square

De la Section 1 et de la discussion précédente, nous retenons dorénavant la modélisation suivante du marché financier :

Définition-Proposition 1. Sur l'espace canonique $(\{d, u\}^N, \mathcal{P}(\{d, u\}^N))$, nous définissons la probabilité :

$$\mathbb{P} = (p\delta_u + (1-p)\delta_d)^{\otimes N}.$$

Sous cette probabilité \mathbb{P} , les applications canoniques, notées ici (ξ_1, \dots, ξ_n) sont I.I.D. de loi :

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = u\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 = d\} = p.$$

Le cours de l'action est alors donné à l'instant $n \in \{0, \dots, N\}$ par la relation :

$$S_n = S_0 \times \xi_1 \times \dots \times \xi_n.$$

Dans ces conditions, les variables $(S_0)_{1 \leq n \leq N}$ sont adaptées à la filtration :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \{d, u\}^N\}, \forall n \in \{1, \dots, N\}, \mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}.$$

3. STRATÉGIE ET PROBABILITÉ RISQUE NEUTRE

La façon dont un investisseur répartit son capital au cours du temps entre la caisse d'épargne et l'actif risqué porte le nom de *stratégie*. D'un point de vue mathématique, la définition de la stratégie prend en compte l'impossibilité pour l'investisseur de connaître l'état du marché à l'instant $n \in \{1, \dots, N\}$ lorsqu'il répartit son capital à l'instant $n - 1$:

Définition 2. Une stratégie est une suite de v.a. (W_1, \dots, W_N) telles que, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, W_n soit intégrable et \mathcal{F}_{n-1} -mesurable.

De façon plus explicite, pour un capital initial donné X_0 (déterministe), W_1 représente le montant (éventuellement négatif) investi à l'instant 0 dans l'actif risqué et $X_0 - W_1$ la somme (éventuellement négative) placée à l'instant 0 à la caisse d'épargne. La même interprétation est valable aux instants suivants, étant entendu que le capital à l'instant n , $1 \leq n \leq N$, de l'investisseur est donné de façon récursive par :

$$(1) \quad X_n = W_n \xi_n + (X_{n-1} - W_n)(1 + r).$$

Parallèlement à la notion de stratégie, nous introduisons la notion de *probabilité risque neutre* :

Définition-Proposition 3. Sur $(\{d, u\}^N, \mathcal{P}(\{d, u\}^N))$, nous appelons probabilité risque neutre la probabilité :

$$\mathbb{P}^* = (q\delta_u + (1-q)\delta_d)^{\otimes N},$$

avec $q = [(1+r) - d]/[u - d]$. Cette probabilité est bien définie et équivalente à la probabilité \mathbb{P} .

Par ailleurs, les v.a. ξ_1, \dots, ξ_N sont I.I.D sous \mathbb{P}^* et $\mathbb{E}^*(\xi_1)$ n'est rien d'autre que $(1+r)$.

L'introduction de la probabilité risque neutre est justifiée par le résultat suivant :

Théorème 1. Étant donné un capital X_0 déterministe et une stratégie (W_1, \dots, W_N) , le capital $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ défini par (1) satisfait : la suite $((1+r)^{-n} X_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Le Théorème 1 justifie l'appellation de \mathbb{P}^* : le gain moyen, sous \mathbb{P}^* , de toute stratégie (W_1, \dots, W_N) associé à un capital initial X_0 (déterministe) est, à l'instant N , $((1+r)^N - 1)X_0$ (et donc égal au gain du placement sans risque).

4. NOTION D'OPTION

Une option d'achat de prix d'exercice K et d'échéance N est un contrat conclu à l'instant 0, au terme duquel son acquéreur détient le droit, mais non l'obligation, d'acheter un nombre M fixé d'actions à l'instant N et au prix K préalablement choisis, et ce quel que soit le prix de l'actif S_N à l'instant N .

Cette option, ou encore ce droit, se monnaie auprès de courtiers spécialisés. Il s'agit d'un produit financier désormais très répandu (pouvant porter sur des actifs autres que des actions, tels des devises). L'acheteur de l'option peut y trouver les intérêts suivants :

- (i) Il prévoit une grosse rentrée d'argent à une date donnée qu'il veut placer au mieux,
- (ii) Il sait qu'il doit acheter une certaine quantité d'un actif dont les cours fluctuent (par exemple, une devise), et veut se protéger contre une éventuelle hausse des cours.

Le vendeur de l'option prend dans ce contexte le risque de payer la différence, éventuellement positive, entre le cours réel de l'action S_N et le prix d'exercice K . Afin de se protéger de cette issue, il entend faire payer à son client une somme C_0 lors de la transaction. Charge à lui de faire ensuite fructifier ce capital pour se couvrir contre les hausses du cours de l'action :

- (a) Si le cours final vérifie $S_N > K$, le vendeur de l'option supporte la différence entre le cours réel de l'action et le prix d'exercice de l'option, et doit par conséquent déboursier $S_N - K$ euros.
- (b) Si le cours final vérifie $S_N \leq K$, le vendeur ne débourse rien.
- (c) Finalement, dans tous les cas, le vendeur débourse $\max(0, S_N - K)$ euros.

La dénomination anglo-saxonne d'une option d'achat est *call*.

De la même façon qu'il existe des options d'achat, il existe des options de vente, appelées en anglais *put*. Dans ce cas, le détenteur de l'option peut, s'il le souhaite, vendre (et non plus acheter) une action à la date d'échéance N et au prix d'exercice K , et ce quel que soit le cours S_N de l'action à l'instant N .

Toute la question est donc de s'accorder sur le prix de l'option, encore appelé *prime*. On supposera pour simplifier que $M = 1$, le prix d'une option d'achat de M actions n'étant que M fois le prix d'option d'achat d'une action.

5. MONTANT DE LA PRIME

Pour trouver le bon prix d'option C_0 , acheteur et vendeur se placent sous le point de vue suivant :

- (i) Si le vendeur a reçu de l'acheteur la somme C_0 à l'instant 0, il place cet argent en choisissant alternativement Caisse d'Épargne ou bourse selon la stratégie (W_1, \dots, W_N) qu'il juge optimale. Au regard de la Section 4, son profit à l'instant N est donc :

$$X_N - (S_N - K)^+,$$

où $(\cdot)^+$ désigne la fonction $\max(0, \cdot)$. Dans cette expression, X_N représente le capital à l'instant N du placement réalisé par le vendeur avec les C_0 euros de l'acheteur : la valeur de X_N découle de la relation (1).

- (ii) En fait, l'idéal serait pour le vendeur qu'il existe une somme C_0 et une stratégie (W_1, \dots, W_N) , telles que la valeur X_N de son capital après placement de la somme C_0 selon cette stratégie vérifie :

$$\mathbb{P} - \text{p.s.}, X_N \geq (S_N - K)^+.$$

De cette façon, le vendeur serait protégé contre les risques du marché et empocherait finalement un bénéfice presque sûrement positif ou nul. L'absence d'opportunité d'arbitrage implique qu'un bénéfice presque sûrement positif ou nul ne peut en fait qu'être nul. Autrement dit, le vendeur ne peut au mieux que chercher un prix C_0 et une stratégie (W_1, \dots, W_N) , dite *stratégie de couverture*, tels que :

$$(2) \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}, X_N = (S_N - K)^+,$$

où X_N est la valeur du capital du vendeur après placement de la somme C_0 .

A ce stade de l'analyse, il pourrait sembler étrange que le bénéfice du vendeur soit finalement nul, et de ce fait, que celui-ci ne puisse tirer aucun avantage de la transaction. En effet, dans notre contexte, le prix C_0 apparaît comme un prix d'équilibre entre acheteur et vendeur au sens suivant : le vendeur exige une somme suffisante pour ne courir aucun risque de perte financière, mais l'acheteur exige que cette somme soit la plus petite possible.

En fait, il faut bien comprendre que notre modélisation ne tient pas compte de la dissymétrie, par ailleurs bien réelle, qui distingue l'acheteur du vendeur. En effet, mettre en place une stratégie W qui couvre exactement, à partir du capital initial C_0 , les risques de variation de l'actif $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$ nécessite une analyse particulièrement fine du marché financier. Dans cette perspective, les deux protagonistes occupent des positions différentes, qui pourraient justifier une éventuelle rémunération, *via* une commission, du vendeur :

- (a) L'acheteur n'a pas toujours les informations et les connaissances nécessaires pour modéliser le marché selon de bons paramètres, et préfère s'en remettre au vendeur, qu'il juge plus compétent pour cette tâche.
- (b) Le travail du vendeur consiste à mettre sur pied, après une analyse probablement très complexe de la situation, le modèle le plus cohérent possible à partir des informations qu'il détient. Le risque qu'il prend alors est d'autant plus faible que son analyse est pertinente.

Dans notre contexte, la probabilité risque neutre prend tout son intérêt et permet d'exprimer simplement (au moins dans certains cas) la valeur du juste prix de l'option :

Théorème 2. *S'il existe un capital X_0 et une stratégie (W_1, \dots, W_N) permettant de générer à l'instant N un capital X_N vérifiant (2), X_0 est nécessairement donné par la relation :*

$$(3) \quad X_0 = (1 + r)^{-N} \mathbb{E}^* [(S_N - K)^+].$$

6. DÉTERMINATION DE LA STRATÉGIE DE COUVERTURE

L'objectif consiste maintenant à déterminer si les hypothèses du Théorème 2 sont plausibles, et le cas échéant de déterminer la stratégie de couverture.

Théorème 3. *Il existe au plus une stratégie (W_1, \dots, W_N) vérifiant les hypothèses du Théorème 2. Le candidat éventuel est donné par :*

$$\forall 1 \leq n \leq N, W_n = (1 + r)^{-(N-n)} \frac{f_{N-n}(S_{n-1}u) - f_{N-n}(S_{n-1}d)}{u - d},$$

avec :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R}, f_{N-n}(z) &= (1 + r)^{-(N-n)} \int (zu_{n+1} \dots u_N - K)^+ d(q\delta_u + (1 - q)\delta_d)^{\otimes(N-n)}(u_{n+1}, \dots, u_N) \\ &= \mathbb{E}^*(z\xi_{n+1} \dots \xi_N - K)^+, \quad (= (z - K)^+ \text{ si } n = N). \end{aligned}$$

Preuve. Supposons qu'il existe un capital initial X_0 et une stratégie (W_1, \dots, W_N) vérifiant les

conditions du théorème et la relation d'égalité (2). Alors,

Lemme 1. *La relation (2) est également valable sous \mathbb{P}^* .*

Du Théorème 1, nous affirmons :

Lemme 2. *Le capital (X_0, \dots, X_N) associé par (1) à X_0 et (W_1, \dots, W_N) vérifie :*

$$(4) \quad \forall 0 \leq n \leq N, X_n = (1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_n).$$

Ceci nous montre que le processus $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ est déterminé de façon unique. Mais, le plus important reste à faire : il reste à déterminer les conditions nécessairement vérifiées par le processus $(W_n)_{1 \leq n \leq N}$. Pour cela, nous tirons de (1) et des propriétés de mesurabilité d'une stratégie :

Lemme 3. *Pour tout $1 \leq n \leq N$,*

$$(5) \quad W_n = \mathbb{E}^* \left(\frac{X_n - X_{n-1}(1+r)}{\xi_n - (1+r)} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right).$$

Afin de conclure, nous affirmons que les fonctions $(f_k)_{0 \leq k \leq N}$ définies précédemment sont liées par les relations suivantes :

Lemme 4. *Pour $0 \leq n \leq N-1$:*

$$(6) \quad \forall z \in \mathbb{R}, f_{N-(n+1)}(z) = qf_{N-n}(zu) + (1-q)f_{N-n}(zd).$$

Des relations (4) et (6), nous déduisons que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$(7) \quad X_{n-1} = (1+r)^{-(N-(n+1))} qf_{N-n}(S_{n-1}u) + (1+r)^{-(N-(n+1))} (1-q)f_{N-n}(S_{n-1}d).$$

Revenons au calcul de $(W_n)_{1 \leq n \leq N}$. Nous tirons de (4), (5) et (7) :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq n \leq N, W_n &= \mathbb{E}^* \left(\frac{X_n - X_{n-1}(1+r)}{\xi_n - (1+r)} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) \\ &= q \frac{(1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_{n-1}u) - X_{n-1}(1+r)}{u - (1+r)} \\ &\quad + (1-q) \frac{(1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_{n-1}d) - X_{n-1}(1+r)}{d - (1+r)} \\ &= q(1+r)^{-(N-n)} \frac{f_{N-n}(S_{n-1}u) - qf_{N-n}(S_{n-1}u) - (1-q)f_{N-n}(S_{n-1}d)}{u - (1+r)} \\ &\quad + (1-q)(1+r)^{-(N-n)} \frac{f_{N-n}(S_{n-1}d) - qf_{N-n}(S_{n-1}u) - (1-q)f_{N-n}(S_{n-1}d)}{d - (1+r)} \\ &= (1+r)^{-(N-n)} q(1-q) \frac{f_{N-n}(S_{n-1}u) - f_{N-n}(S_{n-1}d)}{u - (1+r)} \\ &\quad - (1+r)^{-(N-n)} q(1-q) \frac{f_{N-n}(S_{n-1}u) - f_{N-n}(S_{n-1}d)}{d - (1+r)} \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \frac{f_{N-n}(S_{n-1}u) - f_{N-n}(S_{n-1}d)}{u - d}. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. \square

Il reste à vérifier que la stratégie proposée est solution de notre problème :

Théorème 4. *Le capital donné par (3) et la stratégie donnée par le Théorème 3 vérifient les*

hypothèses du Théorème 2.

Preuve. Définissons (en remarquant que la définition de X ci-dessous est compatible avec celle de (3)) :

$$\begin{aligned}\forall 0 \leq n \leq N, X_n &= (1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_n), \\ \forall 1 \leq n \leq N, W_n &= (1+r)^{-(N-n)} \frac{f_{N-n}(S_{n-1}u) - f_{N-n}(S_{n-1}d)}{u-d}.\end{aligned}$$

Afin de montrer que le $N+1$ -uplet (X_0, W_1, \dots, W_N) est solution de notre problème, il suffit de vérifier que la relation de stratégie est satisfaite, à savoir que \mathbb{P} presque-sûrement :

$$\forall 1 \leq n \leq N, X_n = W_n \xi_n + (X_{n-1} - W_n)(1+r).$$

Pour cela, nous fixons $1 \leq n \leq N$. Nous avons alors de (7) :

$$\begin{aligned}W_n \xi_n + (X_{n-1} - W_n)(1+r) &= W_n (\xi_n - (1+r)) + X_{n-1}(1+r) \\ &= (u-d)^{-1} (1+r)^{-(N-n)} \left(f_{N-n}(S_{n-1}u) - f_{N-n}(S_{n-1}d) \right) (\xi_n - (1+r)) \\ &\quad + (1+r)^{-(N-n)} \left(f_{N-n}(S_{n-1}u)q + f_{N-n}(S_{n-1}d)(1-q) \right) \\ &= (1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_{n-1}u) \left(\frac{\xi_n - (1+r)}{u-d} + q \right) \\ &\quad + (1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_{n-1}d) \left(1 - q - \frac{\xi_n - (1+r)}{u-d} \right) \\ &= (1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_{n-1}u) \frac{\xi_n - d}{u-d} + (1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_{n-1}d) \frac{u - \xi_n}{u-d} \\ &= (1+r)^{-(N-n)} f_{N-n}(S_{n-1}\xi_n) \\ &= X_n.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve et montre en particulier qu'il existe une unique stratégie solution du problème étudié. Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, le capital X_n est positif : cela signifie qu'à tout moment, l'investisseur est capable de rembourser ses dettes, libellées en actifs non risqués ou en actifs risqués. Une telle stratégie, bien entendu rassurante d'un point de vue financier, est dite admissible. \square

Des Théorèmes 2, 3 et 4, nous concluons :

Théorème Principal. Le juste prix C_0 de l'option est donné par $C_0 = (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*[(S_N - K)^+]$. La stratégie de couverture associée est donnée par le Théorème 3.

7. APPLICATION Scilab

Nous avons représenté en Annexe le cours d'une action simulée sous Scilab et l'évolution du capital Cox et Rubinstein associé, puis vérifié graphiquement la validité de la stratégie proposée. Les valeurs choisies sont $N = 50$ (une unité de temps étant arbitrairement fixée à une semaine), $r = 0.001$, $u = 1.15$, $d = 0.95$ et $p = .5$. On fixe par ailleurs $S_0 = 1$ et $K = 3$.

La prime de l'option est alors de l'ordre de 0.020 : ceci permet de distinguer les courbes "action" et "capital" sur les graphiques. Par ailleurs, il est à bien noter que les cours représentés sont les cours sous la probabilité \mathbb{P} (à savoir la probabilité du marché).

Fin de Texte.

8. SUGGESTIONS DE DÉVELOPPEMENT

- (1) Dans la Section 2, le candidat pourra expliquer l'inégalité $1 + r < u$.
- (2) Dans la Section 3, le candidat pourra expliquer, d'un point de vue de la modélisation, les propriétés de mesurabilité d'une stratégie.
- (3) Le candidat pourra réfléchir à la possibilité de construire la probabilité risque neutre en dehors de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, *i.e.* pour $1 + r \leq d$ ou $1 + r \geq u$.
- (4) Le candidat pourra détailler la preuve du Théorème 1, et expliquer éventuellement l'intérêt de ce résultat dans la suite du raisonnement. Il pourra aussi réfléchir à la question suivante : est-il possible de construire une autre mesure de probabilité \mathbb{P}' , également équivalente à \mathbb{P} , pour laquelle le Théorème 1 demeure valable ?
- (5) Dans la Section 4, le candidat pourra proposer d'autres exemples d'utilisation des options. Il pourra pour cela se référer à la situation actuelle des marchés de matières premières.
- (6) Le candidat pourra démontrer, dans la Section 5, le Théorème 2.
- (7) Dans la Section 6, le candidat pourra établir tout ou partie des résultats énoncés (Théorèmes 3 et 4). Dans ce contexte, il veillera à limiter son développement à une quinzaine de minutes. A cette fin, il n'en présentera, si nécessaire, que les éléments les plus pertinents.
- (8) Dans la Section 6, le candidat pourra réfléchir au point suivant : pourquoi le Théorème 2, seul, est insuffisant pour établir de façon générale le juste prix de l'option ?
- (9) La mise en place de la partie informatique proposée en Section 7 serait la bienvenue.

ANNEXE

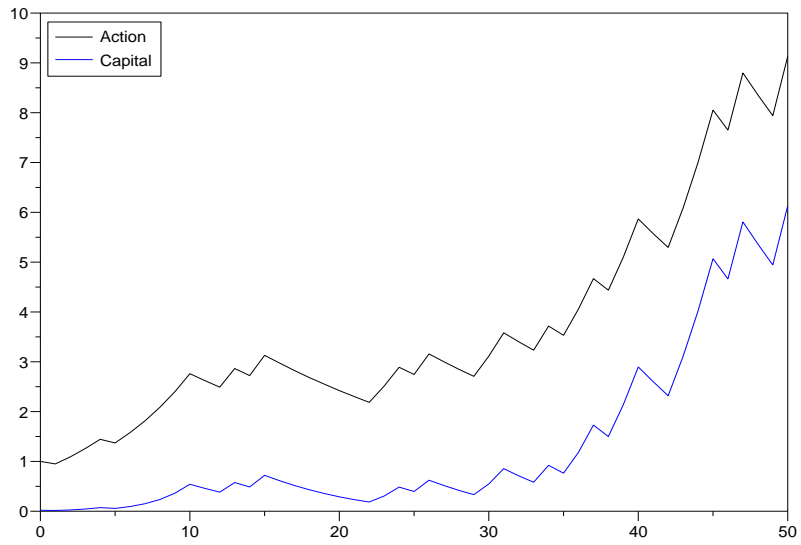


FIGURE 1. COURS DE L'ACTION ET CAPITAL COX-RUBINSTEIN.

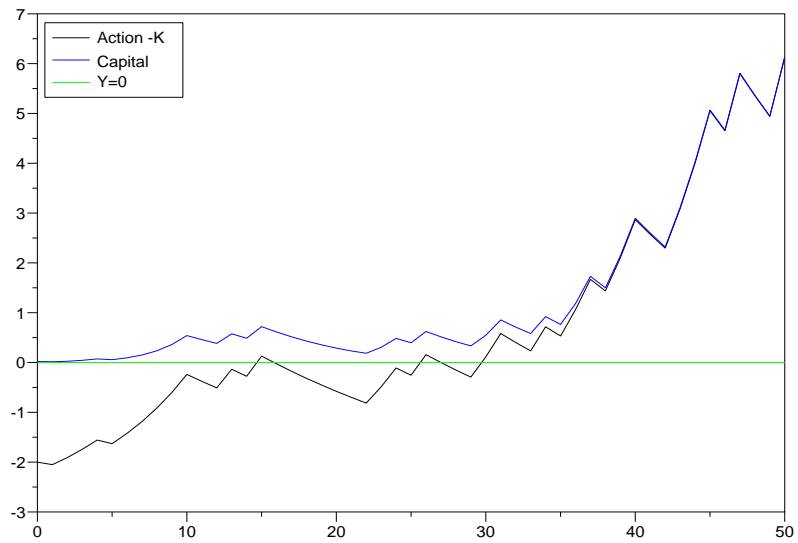


FIGURE 2. VALIDITÉ DE LA STRATÉGIE COX-RUBINSTEIN.