Corrigé Exam M2 " Polymeres Aléatoires " mai 09

RAPPEL DU N° DE PLACE

Pb I

1 - a) $\mathcal{G}_n = \sigma(\eta(t,x) ;\ x \in \mathbb{Z}^d,\ t \leq n-1)$

$$Q^{\mathcal{G}_{n-1}} W_n \overset{\text{Fubini}}{=} P_q\left[Q^{\mathcal{G}_{n-1}} e^{\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(j,S_j) - n\lambda} \right]$$

$$\overset{\text{indep}}{=} P_q\left[e^{\beta \sum_{j=1}^{n-1} \eta(j,S_j) - (n-1)\lambda} \times Q^{\mathcal{G}_{n-1}}\left\{ e^{\beta\eta(n,S_n) - \lambda} \right\} \right]$$

$$= P_q\left[e^{\beta \sum_{j=1}^{n-1} \eta(j-S_j) - (n-1)\lambda} \times 1 \right]$$

$$= W_{n-1}$$

1 - b) $$W_n^2 = P_q^{\otimes 2}\left(\prod_{j=1}^{n} e^{\beta[\eta(j,S_j) + \eta(j,\tilde S_j)] - 2\lambda(\beta)} \right)$$

Mais $$Q\left[e^{\beta[\eta(j,S_j) + \eta(j,\tilde S_j)] - 2\lambda(\beta)} \right] =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si } S_j \neq \tilde S_j \\ e^{\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)} & \text{si } S_j = \tilde S_j \end{cases}$$

Donc :

$$Q(W_n^2) \underset{\text{et indep.}}{\overset{\text{Fubini}}{=}} P_q^{\otimes 2}\left[\prod_{j=1}^{n} Q\left\{ e^{\beta[\eta(j,S_j) + \eta(j,\tilde S_j)] - 2\lambda(\beta)} \right\} \right]$$

$$= P_q^{\otimes 2}\left[\prod_{j=1}^{n} e^{C_\beta \mathbb{1}_{S_j = \tilde S_j}} \right]$$

$$= P_q^{\otimes 2}\left[e^{C_\beta N_n} \right]$$

avec $C_\beta := \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)$.

I-2

a) W_n martingale positive, converge p.s. d'après Doob :

$$W_n \xrightarrow[n\to\infty]{Q\text{-p.s.}} W_\infty \in [0,+\infty[\ .$$

b) $C_\beta = \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)$

$\longrightarrow 0$ quand $\beta \to 0$.

c) Par Markov

$$W^\eta_{n+k} = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W^\eta_k(x)\, W_n^{\theta_{k,x}\eta}$$

avec $W^\eta_n(x) = P_q\left[e^{\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,S_j) - n\lambda(\beta)} ; S_n = x\right]$

où on note explicitement la dépendance en η

$\theta_{k,x}$ le shift : $\theta_{k,x}\eta\,(t,y) = \eta(k+t, x+y)$

Comme $W^\eta_k(x) > 0 \quad \forall (k,x)$ tels que $P_q(S_k = x) > 0$,

et puisque $W^\eta_\infty = \lim_{n\to\infty} W^\eta_{n+k}$, on a

$$\{W^\eta_\infty = 0\} = \{W_\infty^{\theta_{k,x}\eta} = 0 \ \forall (k,x) : P_q(S_k = x) > 0\}$$

$$\in \underbrace{\sigma\{\eta(t,x);\ t\geq k,\ x\in\mathbb{Z}^d\}}_{\text{notation}\ =\ \mathcal{T}_k}.$$

Loi du 0-1 de Kolmogorov :

$\mathcal{T} := \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{T}_k$ est triviale, i.e.

$\forall A \in \mathcal{T}, \quad Q(A) = 0$ ou 1.

Comme $\{W_\infty = 0\} \in \mathcal{T}_k \quad \forall k$, on a

$\{W_\infty = 0\} \in \mathcal{T}$ et donc

$$Q\{W_\infty = 0\} = 0 \text{ ou } 1.$$

d) Par 1-(b),

$$\sup_n QW_n^2 = \sup_n P_q^{\otimes 2}\left(e^{CN_n}\right)$$

$$= P_q^{\otimes 2}\left(e^{CN_\infty}\right) \quad \text{(car monotone)}$$

avec $N_\infty = \lim_{n\uparrow\infty} N_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1\!\!1_{S_n - \tilde{S}_n = 0}$

Mais $(S_n - \tilde{S}_n)_n$ est une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$ avec

$$P_q\left((S_n - \tilde{S}_n) = x + (S_{n-1} - \tilde{S}_{n-1})\right) =$$

$$\begin{cases} (q/2d)^2 & \text{si } \|x\|_\infty = 2 \\ 2(q/2d)^2 & \text{si } \|x\|_\infty = 1 \text{ et } \|x\|_1 = 2 \\ 2(1-q)(q/2d) & \text{si } \|x\|_1 = 1 \\ (1-q)^2 + 2d\left(\frac{q}{2d}\right)^2 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, par l'indication :

$$P_q\left(\forall n \geq 1, \ S_n - \tilde{S}_n \neq 0\right) =: \pi_d \text{ est } > 0,$$

et donc, par Markov,

$$N_\infty \sim \text{Geometrique de proba. d'échec } \pi_d .$$

Par conséquent,
$$Q\, e^{cN_\infty} < \infty$$

tant que $(1-\pi_d)e^{c} < 1$.

e) Conclusion : pour $|\beta|$ petit, on a

$$c_\beta < \ln \frac{1}{1-\pi_d} \qquad (\text{par b)})$$

et par d)
$$\sup_n Q(W_n^2) < +\infty .$$

D'après le th. de convergence $\mathbb{L}^2$ des martingales, cela entraîne que

$$W_n \xrightarrow{\mathbb{L}^2} W_\infty .$$

En particulier, $1 = Q W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q W_\infty$

et donc $Q(W_\infty > 0) > 0$,

soit, d'après c),
$$W_\infty > 0 \quad \text{p.s.}$$

RAPPEL DU N° DE PLACE

I - 3

3 - a) Si $(\omega_j)_{j\le n}$ est une trajectoire de longueur n de la marche et $\Sigma_n = \Sigma_n(\omega)$:

$$\mathbb{P}_q\left((S_j)_{j\le n} = (\omega_j)_{j\le n} \right) = (1-q)^{\Sigma_n} \left(\frac{q}{2d}\right)^{n-\Sigma_n}$$

$$= e^{\rho\Sigma_n} \times \left(\frac{q}{2d}\right)^n$$

En particulier,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(S_j = \omega_j \quad \forall j = 1, \dots n \right) = \left(\frac{1}{2d}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(e^{\beta \sum_{j=1}^n \eta(j,S_j) + \rho\Sigma_n} \right) = \overbrace{\sum_\omega e^{\beta H_n(\omega)} \left(\frac{1}{2d}\right)^n e^{\rho\Sigma_n(\omega)}} =$$

$$= \mathbb{P}_q\left(e^{\beta \sum_{j=1}^n \eta(j,S_j)} \right) \times (2q)^{-n}$$

et

$$F(\rho,\beta) = \lim \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[e^{\beta \sum_{j=1}^n \eta(j,S_j) + \rho\Sigma_n} \right]$$

existe et vaut

$$\boxed{F(\rho,\beta) = p(\rho,\beta) - \ln(2q) = p(\rho,\beta) + \frac{\rho}{2} + \ln\cosh\frac{\rho}{2}}$$

car $e^\rho = \frac{1-q}{q} \iff q = \dfrac{e^{-\rho/2}}{e^{\rho/2}+e^{-\rho/2}} = \dfrac{e^{-\rho/2}}{2\cosh\frac{\rho}{2}}$. (1)

(1) Convexité de F : résulte de la convexité de $(\rho,\beta) \mapsto \ln \mathbb{P}_q\left[e^{\beta H_n(S) + \rho\Sigma_n}\right]$. En effet, la matrice des dérivées secondes est une matrice de covariance : $D^2 \ln \mathbb{P}_q\left[e^{\beta H_n(S)+\rho\Sigma_n}\right] = \mathrm{Var}\begin{pmatrix} H_n(S) \\ \Sigma_n(S) \end{pmatrix}$ sous la mesure de Gibbs

3-b) Borne annealed :

$$p(\rho,\beta) \leq \frac{1}{n} \ln Q\, P_q\left(e^{\beta H_n}\right) = d(\beta).$$

entraîne le résultat voulu.

4

4-a) La question 2) donne :

$$p(\rho,\beta) = d(\beta) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln W_n$$

$$= d(\beta) + 0 \quad \text{si } |\beta| \text{ petit}.$$

donc $R \neq \emptyset$.

4-b) On a vu dans le cours $\underbrace{\text{que}}_{\text{(Prop. 2.3.4.)}}$ la condition (T) entraîne que $p(\rho,\beta) < d(\beta)$.

On a vu aussi (Coroll. 2.3.6) que si η est non borné, (T) est vérifiée pour $|\beta|$ assez grand.

D'où $R^c \neq \emptyset$.

4-c) On a vu que la section de R par $\rho = c^{ste}$ est un intervalle $[\beta_c^-(\rho), \beta_c^+(\rho)]$, avec

$$-\infty < \beta_c^-(\rho) < 0 < \beta_c(\rho)^+ < +\infty \quad \text{car } d \geq 3 \text{ et } \eta \text{ borné}.$$

RAPPEL DU N° DE PLACE

Pb III

1) On applique le corollaire 2.5.14 à

$$f_n(\eta_1, \dots \eta_n) = \frac{1}{2\beta K} \ln Z_n(y)$$

avec $\eta_j = (\eta(j,z) ; z \in \mathbb{Z}^d)$. On a bien

$$\left| f_n(\eta_1, \dots \eta_n) - f_n(\eta_1, \dots \eta_{k-1}, \hat{\eta}_k, \eta_{k+1}, \dots \eta_n) \right| =$$

$$= \frac{1}{2\beta K} \left| \ln \mu_n \left(e^{\beta[\hat{\eta}(k,S_k) - \eta(k,S_k)]} ; S_n = y \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\beta K} \times 2\beta K = 1 .$$

Par le corollaire on obtient les inégalités voulues avec

$$C = C(\beta, K) = (2\beta K)^2 .$$

2-a) $Z_n(0) \leq Z_n$.

2-b) $$Z_{2n}(0) = Z_{0,2n}(0,0)$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} \sum_z Z_{0,n}(0,z) \, Z_{n,2n}(z,0)$$

$$\geq Z_{0,n}(0,x) \, Z_{n,2n}(x,0)$$

Donc :

$$Q \ln Z_{2n}(0) \geq Q \ln Z_{0,n}(0,x) + Q \ln Z_{n,2n}(x,0)$$

$$= 2\, Q \ln Z_{0,n}(0,x)$$

car on a l'égalité en loi ~~suivante~~ :

~~$Z_{n,2n}(x,0) = P^0[e$~~

$$Z_{n,2n}(x,0) \overset{\text{loi}}{=} Z_{0,n}(x,0)$$ (invariance de l'environnement par translation du temps)

$$\overset{\text{loi}}{=} Z_{0,n}(0,x)$$ (reversibilité de la marche)

2-c) $$Q \ln Z_n = Q \, \frac{1}{a} \ln \left[\sum_x Z_n(x)\right]^a$$

$$\underset{\text{si } 0<a<1}{\overset{\text{sous-additivité}}{\leq}} Q \, \frac{1}{a} \ln \sum_x Z_n(x)^a$$

$$\underset{\text{Jensen}}{\leq} \frac{1}{a} \ln \sum_x Q\left[Z_n(x)^a\right]$$

2-d) $$Q \ln Z_n \leq \frac{1}{a} \ln \sum_x Q\left[Z_n(x)^a\right]$$

$$= \frac{1}{a} \ln \sum_x Q\left[e^{a Q \ln Z_n(x) + a\{\ln Z_n(x) - Q \ln Z_n(x)\}}\right]$$

$$= \frac{1}{a} \ln \sum_x e^{a Q \ln Z_n(x)} \times Q\left[e^{a\{\ln Z_n(x) - Q \ln Z_n(x)\}}\right]$$

$$\overset{\text{question 1)}}{\leq} \frac{1}{a} \ln \sum_x e^{a Q \ln Z_n(x)} \times e^{-na^2/(2c)}$$

question 2-b)

$$\leq \frac{1}{a} \ln \left((2n+1)^d e^{\frac{a}{2} Q \ln Z_{2n}(0)} e^{-na^2/(2c)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} Q \ln Z_{2n}(0) + \frac{d \ln(2n+1)}{a} - \frac{na}{2c}$$

Il suffit de choisir $a = n^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ pour conclure.

3-a) $Q \ln Z_n$ est ~~sous~~-additive, donc $p(\beta) = \sup_n \frac{1}{n} Q \ln Z_n$.

3-b) $$Z_{n+k}^a = \left(\sum_x Z_n(x) \sum_y Z_{n,n+m}(x,y) \right)^a$$

$(0 < a < 1)$

$$\leq \sum_x Z_n(x)^a \left[\sum_y Z_{n,n+m}(x,y) \right]^a$$

$$Q Z_{n+k}^a \leq \sum_x Q\left[Z_n(x)^a\right] Q\left\{ \left[\sum_y Z_{n,n+m}(x,y) \right]^a \right\}$$

$$\leq (2n)^d \, Q(Z_n^a) \, Q(Z_m^a)$$

ce qui est (3).

3-c) Contrairement à l'énoncé (erreur typographique !!) on montre que $\frac{1}{n} h_n(a)$ converge ...

En effet, fixons $m \geq 1$ et écrivons tout $n \in \mathbb{N}$ sous la forme $n = m\ell + r$, $0 \leq r \leq m-1$.

(3) implique par itération :

$$h_n(a) \leq \ell h_m(a) + h_m(a) + \ell \times d \ln(2m),$$

donc

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{h_n(a)}{n} \leq \frac{h_m(a)}{m} + \frac{d \ln(2m)}{m}.$$

Donc,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{h_n(a)}{n} = \liminf_{m\to\infty} \frac{h_m(a)}{m}$$

et on a l'existence d'une limite

$$h(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n(a)}{n},$$

avec

$$h(a) \leq \frac{h_m(a)}{m} + \frac{d\ln(2m)}{m}.$$

Cela entraîne la 2e inégalité dans (2).

4) $$0 \geq Q \ln \mu_{2n}(S_{2n}=0) = Q \ln Z_{2n}(0) - Q \ln Z_{2n}$$
$$\overset{(1)}{\geq} 2Q\ln Z_n - 2n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - Q\ln Z_{2n}$$
$$\overset{(2)}{\geq} -5n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

ce qui donne le premier résultat. Pour obtenir le 2e, on utilise la question 1),

$$\ln Z_{2n}(0) - Q \ln Z_{2n}(0) = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad Q\text{-p.s.},$$

$$\ln Z_{2n} - Q\ln Z_{2n} = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Combiné avec le 1er résultat, on obtient le 2ème.

FIN

Université Paris 7 - Denis Diderot — **UFR de Mathématiques**
Master 2ème année — **Examen de Mai 2009**
”modélisation aléatoire” et “probabilités” — **Francis Comets**

MECANIQUE STATISTIQUE: MODELES DE POLYMERES

Durée 3 heures. Les 2 parties sont indépendantes. Tous documents autorisés, pas les téléphones!

♣

Notations communes: Dans les deux problèmes on considère le modèle de polymères dirigés en milieu aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$. La marche aléatoire est notée $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa loi P. Elle est indépendante de l'environnement $\eta = (\eta(n,x))_{(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}$, qui est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, avec tous ses moments exponentiels finis; on note Q sa loi, et $\lambda(\beta) = \ln Q[\exp \beta\eta(n,x)]$.

PROBLEME I:

On considère la marche aléatoire $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pouvant rester sur place ou se déplacer au plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 3$. Elle est définie à l'aide d'un paramètre $q \in [0,1]$ par: $(S_{n+1} - S_n; n \geq 0)$ sont indépendants sous P et de loi $P = P_q$, avec

$$P_q(S_{n+1} - S_n = e) = q/(2d)$$

pour tout e plus proche voisin de l'origine, et

$$P_q(S_{n+1} - S_n = 0) = 1 - q.$$

On note

$$W_n = P_q\left[\exp\left(\beta\sum_{j=1}^{n}\eta(j,S_j) - n\lambda(\beta)\right)\right]$$

1. (a) Vérifier que W_n est une martingale.

   (b) Trouver la constante $C = C_\beta$ telle que

   $$Q(W_n^2) = P_q^{\otimes 2}\left(e^{CN_n}\right)$$

   avec $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{S_i=\tilde{S}_i}$.

2. Montrer que si $|\beta|$ assez petit, W_n converge p.s. et dans L^2 vers une limite W_∞ vérifiant $0 < W_\infty < +\infty$ p.s. (Indication: toute marche aléatoire en dimension $d \geq 3$ à sauts bornés est transiente.)

3. On pose $\rho = \ln((1-q)/q) \in \mathbb{R}$ (pour $q \in (0,1)$). On admettra que

$$p(\rho, \beta) = \lim_{n\to\infty} (1/n) \ln P_q \left[\exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(j, S_j) \right) \right]$$

existe p.s. et est deterministe. Soit $\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{S_i = S_{i-1}}$.

   (a) En déduire que la limite

$$F(\rho, \beta) = \lim_{n\to\infty} (1/n) \ln P_{1/2} \left[\exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(j, S_j) + \rho \Sigma_n \right) \right]$$

   existe. Exprimer sa valeur à l'aide de $p(\rho, \beta)$ et de ρ. Vérifier que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est convexe.

   (b) Montrer que $F(\rho, \beta) \leq \lambda(\beta) + \rho/2 + \ln\cosh(\rho/2)$.

4. Diagramme de phases:

   (a) Montrer que l'ensemble

$$R = \{(\rho, \beta) : F(\rho, \beta) = \lambda(\beta) + \rho/2 + \ln\cosh(\rho/2)\}$$

   est non vide.

   (b) Montrer que, si $\eta(t, x)$ est non bornée, R^c est non vide.

   (c) Résumer les propriétés de R par une représentation graphique dans le plan (ρ, β).

PROBLEME II:

On considère le modèle standard de polymère dans un environnement borné: $(S_{n+1} - S_n; n \geq 0)$ sont indépendants sous $P = P^x$ ($x \in \mathbb{Z}^d$ est le point de départ du polymère) avec $P^x(S_0 = x) = 1$,

$$P^x(S_{n+1} - S_n = e) = 1/(2d)$$

pour tout e plus proche voisin de l'origine, et on suppose que

$$|\eta(n, x)| \leq K \qquad \text{p.s.}$$

pour une constante finie K. On note (de manière raccourcie) la fonction de partition et la mesure de polymère:

$$Z_n = P^x[\exp(\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(j, S_j))], \qquad \mu_n[\,\cdot\,] = Z_n^{-1} P^x[\,\cdot\, \exp(\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(j, S_j))],$$

et on rappelle que la limite presque sûre

$$p(\beta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n$$

existe et est déterministe. Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d, m, n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$Z_{m,m+n}(x, y) = P^x[\exp(\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(m + j, S_j)); S_n = y]$$

(qu'on appelle la fonction de partition de point-à-point), et $Z_n(y) = Z_{0,n}(0, y)$.

1. Trouver une constante $C = C(\beta, K)$ telle que, pour tous $n, y, \theta \in \mathbb{R}, r > 0$,
   $Q(e^{\theta(\ln Z_n(y) - Q \ln Z_n(y))}) \le e^{n\theta^2/(2C)}, \qquad Q(|\ln Z_n(y) - Q \ln Z_n(y)| \ge nr) \le 2e^{-Cnr^2/2}$,
   [Indication: on pourra appliquer des inégalités de concentration.]

2. Soit $\epsilon > 0$. Dans cette question on montre que pour n assez grand (i.e., qu'il existe $n_0(\epsilon)$ tel que pour tout $n \ge n_0(\epsilon)$ on a)
   $$Q \ln Z_n(0) \le Q \ln Z_n \le n^{\frac{1}{2}+\epsilon} + (1/2)Q \ln Z_{2n}(0). \qquad (1)$$
   (a) Vérifier la première inégalité dans (1).
   (b) Montrer que pour tout n et $x \in \mathbb{Z}^d$
   $$Q \ln Z_{2n}(0) \ge 2Q \ln Z_n(x).$$
   (c) Montrer pour $a \in (0, 1)$ que
   $$Q \ln Z_n \le a^{-1} \ln \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} Q[Z_n(x)^a]$$
   (d) En déduire que pour n assez grand,
   $$Q \ln Z_n \le n^{\frac{1}{2}+\epsilon} + (1/2)Q \ln Z_{2n}(0).$$

3. Dans cette question on montre que, pour n assez grand,
   $$Q \ln Z_n \le np(\beta) \le Q \ln Z_n + n^{\frac{1}{2}+\epsilon} \qquad (2)$$
   (a) Quel résultat vu en cours montre la première inégalité dans (2) ?
   (b) Montrer que, pour $a \in (0, 1)$, $h_n(a) = \ln Q[Z_n^a]$ vérifie
   $$h_{n+k}(a) \le h_n(a) + h_k(a) + d \ln(2n). \qquad (3)$$
   (c) Montrer que (3) entraine que $\lim_{n\to\infty} n^{-1}h_n(a) = h(a)$ existe, et vérifie pour m assez grand
   $$h(a) \le \frac{h_m(a)}{m} + c\frac{\ln m}{m}$$
   pour une constante $c \in (0, \infty)$. En déduire la deuxième inégalité dans (2).

4. Conclure que , pour n assez grand,
   $$-n^{\frac{1}{2}+\epsilon} \le Q \ln \mu_{2n}(S_{2n} = 0) \le 0,$$
   et que Q-p.s.:
   $$\exp -n^{\frac{1}{2}+\epsilon} \le \mu_{2n}(S_{2n} = 0) \le 1$$
   pour n assez grand.