2. Examens

2.1. Année universitaire 01-02

29 Janvier 2002

EXERCICE I

Dans ce problème, on considère une particule effectuant une promenade aléatoire sur d sites ($d \geq 2$) répartis sur le cercle unité et numérotés $0, 1, \ldots d-1$. A chaque instant entier, la particule se déplace d'un pas, dans le sens positif trigonométrique avec probabilité p, et reste sur place avec probabilité $q = 1 - p$, ($p \in]0, 1[$).
Soit $Z_n, n \geq 1$, une suite variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) = q$. Alors la somme

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \text{ (modulo } d)$$

représente la position à l'instant n de la particule démarrant du site $X_0 = 0$.

1. Etablir que la suite $X_n, n \geq 0$, est une chaîne de Markov récurrente irréductible sur $E = \{0, 1, \ldots d-1\}$, et donner sa matrice de transition Q.

2. Calculer la probabilité invariante de la chaîne et déterminer le comportement asymptotique de la matrice Q^n.

3. Soit $S_0 = \inf\{n \geq 1; X_n = 0\}$. Quelles valeurs la variable aléatoire S_0 peut-elle prendre avec une probabilité non nulle ? Calculer $\mathbb{E}(S_0)$ puis (**facultatif**) la loi de S_0.

EXERCICE II

Soit Y_n, $n \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi , intégrables, d'espérance $\theta > 0$. On définit alors la suite X_n par $X_0 = 0$, puis $X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ et on note $\mathcal{F}_n$ la filtration naturelle du processus X. On considère la suite $Z_n = X_n - n\theta$ et pour $a > 0$ fixé, on pose $T = \inf\{n \geq 0; \; ; X_n > a\}$.

1. Montrer que Z_n est une martingale. Montrer que si cette martingale est bornée dans L^1 alors les variables aléatoires Y_n sont p.s. constantes.

2. Quelle est la limite p.s. de X_n? En déduire que T est p.s. fini.

3. On suppose, uniquement dans cette question, qu'il existe $0 < c < \infty$ tel que $Y_n \leq c$ pour tout $n \geq 1$. Montrer, en utilisant la suite $Z_{n \wedge T}$, que l'on a $\theta \mathbb{E}(n \wedge T) \leq (c+a)$ et en déduire que T est intégrable.

4. Si l'on ne suppose plus que les Y_n sont bornés, on définit, pour $c > 0$, les variables aléatoires tronquées $Y_n^{(c)} = Y_n \wedge c$. Montrer qu'il existe $0 < c_0 < \infty$ avec $\mathbb{E}(Y_n^{(c_0)}) > 0$. Utiliser la question précédente pour montrer que T est intégrable.

EXERCICE III

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, X_n, \mathbb{P}_x)$ une chaîne irréductible et on suppose qu'il existe un point $u \in E$, une fonction positive f sur E et $\epsilon > 0$ avec f et Qf partout finies tels que:

$$Qf(x) \leq f(x) - \epsilon, \text{ pour } x \neq u$$

On veut alors prouver que la chaîne est récurrente positive. Soit T le temps d'entrée dans u.

1. Montrer (ou admettre en cas de trop grande difficulté...) que la suite $Z_n = f(X_{n\wedge T}) + \epsilon(n \wedge T)$ est une $\mathbb{P}_x$ surmartingale positive $\forall x \in E$.
2. En déduire que $\mathbb{E}_x(n \wedge T) \leq f(x)/\epsilon$ puis que $\mathbb{E}_x(T) \leq f(x)/\epsilon$.
3. Soit S le temps de retour à u. Montrer que $\mathbb{E}_x(S) \leq (1 + Qf(x)/\epsilon)$ et conclure.
4. On considère la suite définie par la relation de récurrence $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + Y_{n+1}$ où les Y_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\mathbb{P}(Y = 0) > 0$, $\mathbb{P}(Y \geq 2) > 0$ et $\mathbb{E}(Y) < 1$. La suite X_n est manifestement une chaîne de Markov (on ne demande pas la preuve, ni la forme de la matrice de transition). Montrer que cette chaîne est irréductible sur $E = \mathbb{N}$, que $Qf(x) = \mathbb{E}(f((x-1)^+ + Y))$ puis montrer qu'elle est récurrente positive en choisissant la fonction $f(x) = x$ et un point u convenable.

EXERCICE IV

Soit B_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi centrées et de variance σ^2 (non nulle et finie). On considère alors la suite X_n définie par $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, puis $X_{n+1} = \theta X_n + B_{n+1}$, où θ est un paramètre réel. Ce paramètre est à priori inconnu, et on considèrera plus loin l'estimateur des moindres carrés de θ au vu de l'échantillon X_k, $k \leq n$ soit Θ_n. Celui ci est défini comme la valeur de θ qui minimise $\sum_{k=0}^{n-1}(X_{k+1} - \theta X_k)^2$.

1. Montrer que $X_n \in L^2$, ainsi que la suite $W_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k B_{k+1}$.
2. On désigne par $\mathcal{F}_n$ la filtration naturelle du processus X. Montrer que W_n est une $\mathcal{F}_n$ martingale et calculer le processus croissant A_n, associé à la décomposition de Doob de la sous-martingale W_n^2.
3. Calculer Θ_n et montrer que $\Theta_n = \theta + \sigma^2 W_n / A_n$.
4. En utilisant l'inclusion $\{X_n \to_n 0\} \subset \{B_n \to_n 0\}$, montrer que $\mathbb{P}\{X_n \to_n 0\} = 0$.
5. En déduire la limite presque sûre de Θ_n.

Corrigé

Exercice I

1. On a la relation de récurrence $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} \pmod d$, avec Z_n i.i.d. (et aussi indépendante de X_0 qui est constante) donc X_n est une chaîne de Markov. Puisque la probabilité d'avancer "d'une case" est $p > 0$, il existe un chemin de probabilité strictement positive joignant deux sites quelconques. La chaîne est donc irréductible. L'espace E étant fini, il existe au moins un point récurrent et par conséquent la chaîne est récurrente irréductible. Sa matrice de transition est définie par $Q(x,x) = q$ $(x = 0,\ldots,d-1)$, $Q(x,x+1) = p$ $(x = 1\ldots d-2)$, $Q(d-1,0) = p$, tous les autres termes étant nuls.

2. On vérifie facilement que la probabilité invariante soit Π est la loi uniforme sur E. Puisque $Q(x,x) > 0$ la chaîne est apériodique. On a donc $\lim Q^n(x,y) = \Pi(y) = 1/d$ pour tout couple $(x,y) \in E$.

3. Soit $X_1 = 0$ et alors $S_0 = 1$ soit $X_1 = 1$ et alors $S_0 \geq d$. On sait que $\mathbb{E}(S_x) = 1/\Pi(x)$ et par conséquent $\mathbb{E}(S_0) = d$. La variable aléatoire S_0 prend la valeur 1 avec la probabilité q, et la valeur $d+r$ avec la probabilité $\mathbb{P}(S_0 = d+r) = p\mathbb{P}(Y_1 + \ldots + Y_{d-1} = d+r-1)$, où $Y_i \geq 1$ représente le temps de séjour de la particule au point i. Ce sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de loi géométrique ăleurs dans $\mathbb{N}^*$ et de paramètre q. Par conséquent on a $S_0 = \mathbb{1}_{\{Z_1=0\}} + \mathbb{1}_{\{Z_1=1\}}(1 + Y_1 + \ldots + Y_{d-1})$ et $\mathbb{P}(S_0 = d+r) = p^d q^r \dfrac{(d+r-2)!}{r!\,(d-2)!}$.

Exercice II

1. La variable aléatoire Y_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n$ (même pour $n = 0$). Par conséquent:

$$\mathbb{E}((Z_{n+1} - Z_n)|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((Y_{n+1} - \theta)|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1}) - \theta = 0$$

Si la martingale Z_n est bornée dans L^1, elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable et donc p.s. finie. Il s'en suit que $Z_{n+1} - Z_n = Y_{n+1} - \theta$ converge p.s. et donc en loi vers 0. Or la variable aléatoire $Y_{n+1} - \theta$ a une loi indépendante de n et par conséquent ceci ne peut se produire que si $Y_{n+1} = \theta$ p.s.

2. D'après la loi forte des grands nombres la suite X_n/n converge p.s. vers $\theta > 0$ et donc X_n converge p.s. vers $+\infty$. Or $\{T = \infty\} = \{\sup_n X_n \leq a\}$, ces ensembles sont donc de probabilité nulle.

3. La suite $Z_{n\wedge T} = X_{n\wedge T} - \theta(n \wedge T)$ est une martingale d'espérance $\mathbb{E}(Z_0) = 0$. Par conséquent $\theta\mathbb{E}(n \wedge T) = \mathbb{E}(X_{n\wedge T})$. Or pour $k \leq T$ on $X_k \leq a + Y_k$ d'où la majoration demandée. Il ne reste plus quà faire tendre n vers l'infini et appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir que $\theta\mathbb{E}(T) \leq (a+c)$ et donc T est intégrable puisque $\theta > 0$.

4. On a $\mathbb{E}(Y) = \lim_{c\to\infty} \uparrow \mathbb{E}(Y \wedge c)$. Cette limite étant strictement positive, il existe c_0 avec $\mathbb{E}(Y \wedge c_0) > 0$. On en déduit, d'après la question précédente, que le temps d'arrêt $T^{(c_0)}$ associé aux variables aléatoires $Y_n^{(c_0)}$ est intégrable et donc aussi T puisque manifestement $T \leq T^{(c_0)}$.

Exercice III

1. On peut écire $Z_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(f(X_k) + k\epsilon)\mathbb{1}_{\{T=k\}} + (f(X_{n+1}) + (n+1)\epsilon)\mathbb{1}_{\{T>n\}}$. En conditionnant par $\mathcal{F}_n$, la première somme est inchangée et le second terme a pour espérance conditionnelle $(Qf(X_n) + (n+1)\epsilon)\mathbb{1}_{\{T>n\}}$. Or sur $(T > n)$ on a $Qf(X_n) \leq f(X_n) - \epsilon$.

2. L'espérance de la surmartingale Z_n est décroissante donc:

$$\epsilon\mathbb{E}_x(n \wedge T) \leq \mathbb{E}_x(Z_n) \leq \mathbb{E}_x(Z_0) = f(x)$$

La suite $T \wedge n$ converge en croissant vers T, on obtient donc le résultat désiré par le théorème de convergence monotone.

3. On a $S = 1+T\circ\theta$ et donc $\mathbb{E}_x(S) \leq 1+\mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_1}(T)) \leq 1+\mathbb{E}_x(f(X_1))/\epsilon = 1+Qf(x)/\epsilon$. Puisque $Qf(u) < \infty$ on a $\mathbb{E}_u(S) < \infty$. La chaîne étant irréductible, elle est récurrente positive.

4. Soit Q la transition de la chaîne X_n. Pour $x \geq 1$ on a $Q(x, x-1) = \mathbb{P}(Y = 0) > 0$ et il existe un entier $r \geq 1$ tel que $Q(x, x+r) \geq \mathbb{P}(Y = r+1) > 0$. On peut donc joindre deux entiers quelconques par un chemin de probabilité strictement positive en faisant un certain nombre de sauts d'amplitude -1 ou r, la chaîne est donc irréductible. On a $X_1 = (X_0 - 1)^+ + Y_1$ et donc $Qf(x) = \mathbb{E}_x(f(X_1)) = \mathbb{E}(f((x-1)^+ + Y))$. Si on prend $f(x) = x$ alors pour $x \geq 1$ on a $Qf(x) = x-1+\mathbb{E}(Y) = f(x)-\epsilon$ avec $\epsilon = 1-\mathbb{E}(Y) > 0$. Il suffit donc de choisir $u = 0$ pour pouvoir affirmer que cette chaîne est récurrente positive.

Exercice IV

1. On prouve sans peine, par récurrence que X_n est de carré intégrable. Ensuite, puisque B_{n+1} et X_n sont indépendants, on a $\mathbb{E}(X_n^2 B_{n+1}^2) = \sigma^2\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$.

2. Le processus W est $\mathcal{F}_n$ adapté et $\mathbb{E}(W_{n+1}-W_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n B_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n\mathbb{E}(B_{n+1}) = 0$. D'autre part, $\mathbb{E}((W_{n+1} - W_n)^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n^2 B_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(B_{n+1}^2)X_n^2 = \sigma^2 X_n^2$. Et par conséquent, $A_n = \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$.

3. En annulant la dérivée, on voit facilement que le point $\Theta_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X_k X_{k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2}$ est un minimum, d'où la formule demandée, en remplaçant X_{k+1} par $\theta X_k + B_{k+1}$.

4. D'après la loi du $(0,1)$, l'ensemble $\{B_n \to_n 0\}$ est de probabilité 0 ou 1. Cette probabilité ne peut être égale à 1 car sinon on aurait la convergence en loi de B_n vers la variable aléatoire constante égale à 0 ce qui est impossible puisque la loi de B_n ne dépend pas de n et que $\sigma \neq 0$. On en déduit que $\mathbb{P}\{X_n \to_n 0\} = 0$.

5. Puisque $\{\sum_n X_n^2 < \infty\} \subset \{X_n \to_n 0\}$, on déduit de la la question précédente que l'on a $(A_\infty = \infty)$ p.s. D'après le théorème des martingales dans L^2, il s'en suit que W_n/A_n converge p.s. vers 0 et donc que Θ_n converge p.s vers θ.

2.2. Année universitaire 02-03

28 Janvier 2003

EXERCICE I

Soit U_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli avec $\mathbb{P}(U_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = -1) = 1/2$. On considère la marche aléatoire associée, issue de l'origine, soit $X_0 = 0$ puis $X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ ainsi que la filtration $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(U_k \ ; \ k \leq n)$ pour $n \geq 1$. On rappelle que la marche X_n est récurrente, irréductible sur $\mathbb{Z}$. Soit a un entier strictement positif et $T = \inf\{n \geq 0 \ ; \ |X_n| \geq a\}$ ($T = +\infty$ si $|X_n| < a$ pour tout $n \geq 0$).

1. Montrer que T est un temps d'arrêt. Pourquoi a-t-on $(T < \infty)$ p.s.?
2. Montrer que $Z_n = X_n^2 - n$ est une martingale et en déduire que $\mathbb{E}(X_{n\wedge T}^2) = \mathbb{E}(n \wedge T)$.
3. Quelle est la limite p.s. de la suite $X_{n\wedge T}$? Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Lebesgue à la suite $X_{n\wedge T}^2$ et en déduire que $\mathbb{E}(T) = a^2$.
4. Montrer qu'il existe une suite de réels α_n telle que la suite $W_n = X_n^4 - 6nX_n^2 + \alpha_n$ soit une martingale (on écrira tout d'abord une relation de récurrence du premier ordre que doit vérifier cette suite, puis on calculera α_n explicitement).
5. En déduire, comme ci dessus, la valeur de $\mathbb{E}(T^2)$ puis de $\mathrm{Var}(T)$.

EXERCICE II

Soit Y_n, $(n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi ν, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, intégrables et de moyenne θ. Soit X_n la chaîne de Markov à valeurs dans l'espace d'états $E = \mathbb{N}$, définie par $X_0 = 0$ et la relation de récurrence:

$$X_{n+1} = (X_n + Y_{n+1})^+ = \sup(X_n + Y_{n+1} \ , \ 0)$$

La probabilité $\mathbb{P}$ correspond donc à la probabilité $\mathbb{P}_0$ de la chaîne canonique.

1. Donner la matrice de transition de la chaîne X_n en fonction des valeurs de ν et de sa fonction de répartition $r(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \nu(k)$.
2. On suppose à partir de maintenant que $(\nu(-1) > 0)$ et $(r(0) < 1)$. Montrer qu'alors cette chaîne est irréductible et apériodique.
3. On pose $W_0 = 0$ et $W_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ pour $n \geq 1$. On note par S le temps de retour de la chaîne X_n en 0 c'est à dire $S = \inf\{n \geq 1 \ ; \ X_n = 0\}$. Montrer que:
   (a) $X_n \geq W_n$ (on pourra remarquer que pour tout réel x, on a $x^+ \geq x$).
   (b) Pour $n \geq 1$ on a $(S > n) \subset (W_n \geq 1)$.

4. Quelle est la limite p.s. de W_n lorsque $\theta < 0$ ou $\theta > 0$? En déduire la nature de la chaîne X_n dans ces deux cas.

5. On admet que, pour une marche aléatoire centrée à valeurs dans $\mathbb{Z}$, tout point de $\mathbb{Z}$ est récurrent. En déduire la nature de la chaîne X_n dans le cas $\theta = 0$.

6. On suppose, dans cette question, que la probabilité ν est portée par $\{-1, 0, 1\}$. Donner l'expression d'une mesure invariante λ non triviale en fonction de $\alpha = \nu(1)/\nu(-1)$ et de $\lambda(0)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α assurant l'existence d'une probabilité invariante et la calculer. Donner dans ce cas une classification complète des états de la chaîne selon les valeurs de α.

EXERCICE III

Soit $U_{(n,k)}$, $k \geq 1$, $n \geq 1$ une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que ces variables aléatoires sont de carré intégrable et on note μ leur moyenne, σ^2 leur écart type (on suppose $\mu \neq 0$). On considère alors le modèle démographique suivant: la population à l'instant n, soit Z_n est définie par $Z_0 = 1$ puis $Z_{n+1} = 0$ si $Z_n = 0$ et $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} U_{(n+1,k)}$ sinon. Autrement dit, le k*ème* individu vivant à l'instant n, $(k = 1, \ldots, Z_n)$, donne naissance à $U_{(n+1,k)}$ descendants puis disparaît... On définit la filtration $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(U_{(s,k)}\ ;\ 1 \leq s \leq n,\ k \geq 1)$ pour $n \geq 1$ et on pose $X_n = Z_n/\mu^n$.

1. Montrer que:
   (a) $\mathbb{E}(Z_{n+1}\mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}|\mathcal{F}_n) = \mu s \mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}$, et en déduire que $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mu Z_n$
   (b) Montrer de même que $\mathbb{E}(Z_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \sigma^2 Z_n + \mu^2 Z_n^2$
   (c) En déduire $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_n^2)$.

2. Montrer que X_n est une martingale de carré intégrable et calculer le processus croissant A_n associé à la décomposition de Doob de X_n^2.

3. La suite X_n converge-t-elle p.s.vers une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$?

4. Donner une condition sur μ équivalente à la convergence L^2 de la suite X_n.

5. On suppose que $\mu = 1$ (donc $Z_n = X_n$) et que $\mathbb{P}(U_{(n,k)} = 1) < 1$. Montrer alors que:
   (a) Pour tout entier $m \geq 1$ on a $p_m = \mathbb{P}(\sum_{k=1}^{m} U_{(n,k)} = m) < 1$.
   (b) On pose $\widetilde{\Omega} = \cup_N \cap_{n \geq N} (X_n = X_\infty)$. En utilisant le fait que X_n est à valeurs entières, montrer que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$
   (c) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}(X_\infty = m) = 0$ pour tout entier $m \geq 1$.

   La martingale X_n est-elle uniformément intégrable dans ce cas?

Corrigé

Exercice I

1. $(T \leq n) = \cup_{k=0}^{n}(|X_k| \geq a)$ donc $(T \leq n) \in \mathcal{F}_n$. Soit T_a le temps d'entrée de la chaîne X_n dans le point a on a $T \leq T_a$, or la chaîne X_n étant récurrente irréductible, le temps d'entrée T_a est p.s. fini (il y a même une infinité de visites au point a, p.s.).

2. On a $Z_{n+1} - Z_n = 2X_n U_{n+1}$ puisque $U_{n+1}^2 = 1$. En utilisant le fait que X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable et que la variable aléatoire U_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n$ on obtient $\mathbb{E}((Z_{n+1} - Z_n)|\mathcal{F}_n) = 2X_n\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 2X_n\mathbb{E}(U_{n+1}) = 0$. La suite $Z_{n\wedge T} = X_{n\wedge T}^2 - (n \wedge T)$ est une martingale, son espérance est constante, d'où $\mathbb{E}(Z_{n\wedge T}) = \mathbb{E}(Z_0) = 0$.

3. La suite $X_{n\wedge T}$ converge presque sûrement vers X_T (puisque T est p.s. fini). De plus, $|X_k| < a$ pour $k < T$ et comme la chaîne X_n ne fait que des sauts d'amplitude 1, on obtient $|X_T| = a$. On en déduit que pour $0 \leq k \leq T$ on a $|X_k| \leq a$ et donc $X_{n\wedge T}^2 \leq a^2$. L'application du théorème de Lebesgue à la suite $X_{n\wedge T}^2$ fournit la relation $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{n\wedge T}^2) = a^2$. D'autre part le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que $\mathbb{E}(T) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}((n \wedge T))$.

4. On a $W_{n+1} - W_n = 4\big(X_n^3 + X_n - 3(n+1)X_n\big)U_{n+1} - 6(n+1) + 1 + \alpha_{n+1} - \alpha_n$ En reprenant la preuve de **2**., on obtient $\mathbb{E}((Z_{n+1} - Z_n)|\mathcal{F}_n) = -6(n+1) + 1 + \alpha_{n+1} - \alpha_n$. On aura donc une martingale si ce dernier terme est nul soit $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 6(n+1) - 1$. En ajoutant ces égalités on obtient $\alpha_n - \alpha_0 = 6(\sum_{k=1}^{n} k) - n = 3n^2 + 2n$. On choisira $\alpha_0 = 0$ puisque l'on peut toujours ajouter une constante à une martingale.

5. On a $(n \wedge T)X_{n\wedge T}^2 \leq a^2 T$ avec T intégrable d'après **3**. et $X_{n\wedge T}^4 \leq a^4$. En reprenant les arguments de **2**. et **3**. on obtient $\mathbb{E}(X_T^4) - 6\mathbb{E}(TX_T^2) + 3\mathbb{E}(T^2) + 2\mathbb{E}(T) = 0$ soit $\mathbb{E}(T^2) = (5a^4 - 2a^2)/3$ et $\mathrm{Var}(T) = 2a^2(a^2 - 1)/3$.

Exercice II

1. La matrice de transition de la chaîne X_n est définie par $Q(i,j) = \nu\{y\ ;\ (i+y)^+ = j\}$. Par conséquent pour $j \geq 1$ on a $Q(i,j) = \nu(j-i)$ et pour $j = 0$, $Q(i,0) = \nu\{y\ ;\ i+y \leq 0\} = r(-i)$.

2. Pour $i = 1$ on a $Q(1,0) = r(-1) \geq \nu(-1) > 0$ et pour $i \geq 2$ on a $Q(i,i-1) = \nu(-1) > 0$. La probabilité de reculer "d'une case" étant strictement positive, on peut donc trouver un chemin de probabilité strictement positive pour joindre i à j si $j < i$. D'autre part il existe $m \geq 1$ tel que $Q(i,i+m) = \nu(m) > 0$. Pour $j > i$, soit h un entier avec $j \leq i + hm$. On peut aller de i à $i + hm$ avec une probabilité strictement positive, en faisant h "sauts" de longueur m, puis revenir en j en "reculant" $i + hm - j$ fois. La chaîne est donc irréductible. On a $Q(0,0) = r(0) \geq \nu(-1) > 0$ ce qui implique que la chaîne est apériodique.

3.a. En ajoutant les équations $X_k \geq X_{k-1} + Y_k$ pour $k = 1,\ldots,n$ on obtient $X_n \geq W_n$.

3.b. $(S > n) = ((X_1 \geq 1) \cap \ldots \cap (X_n \geq 1))$. Or sur chaque ensemble $(X_k \geq 1)$ on a $X_k = X_{k-1} + Y_k$ et en ajoutant de nouveau ces égalités on obtient que sur $(S > n)$ on a $W_n = X_n \geq 1$, d'où la formule demandée.

4. Par application de la loi forte des grands nombres, W_n converge p.s. vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant que $\theta > 0$ ou $\theta < 0$. Dans le premier cas, l'inégalité $X_n \geq W_n$, implique que X_n converge aussi p.s. vers $+\infty$. Il s'en suit que 0 ne peut-être récurrent, la chaîne est donc transitoire. Dans le second cas on peut écrire $\mathbb{P}(S = \infty) = \mathbb{P}(\cap_{n\geq 1}(S > n)) \leq \mathbb{P}(\cap_{n\geq 1}(W_n \geq 1))$. Ce dernier terme est nul puisque W_n converge p.s. vers $-\infty$. Le point 0 est donc récurrent et la chaîne est récurrente.

5. Dans la cas $\theta = 0$, la marche aléatoire W_n est centrée, Le point 0 étant récurrent pour cette marche, on a $\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1}(W_n = 0)) = 1$, car cette marche est issue de 0. Il suffit alors de reprendre le point 4.*b*. ci dessus pour obtenir que 0 est récurrent pour la chaîne X_n et donc la chaîne est récurrente.

6. On a $\nu(-1) > 0$ et $\nu(1) > 0$ d'après les conditions imposées à ν et de plus $\theta = \nu(1) - \nu(-1)$. L'équation d'invariance $\lambda = \lambda Q$ s'écrit:

$$\begin{aligned}
\lambda(0) &= (\nu(-1) + \nu(0))\lambda(0) + \nu(-1)\lambda(1) \\
\lambda(n) &= \nu(-1)\lambda(n+1) + \nu(0)\lambda(n) + \nu(1)\lambda(n-1), \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

La première relation s'écrit aussi $\lambda(1) = \alpha\lambda(0)$ et on vérifie facilement que la solution s'écrit $\lambda(n) = \alpha^n\lambda(0)$. Par conséquent il existe une probabilité invariante si et seulement si $\alpha < 1$. On déduit de ce qui précède que pour $\alpha > 1$ (i.e. $\theta > 0$) la chaîne est transitoire, qu'elle est récurrente nulle pour $\alpha = 1$ (i.e. $\theta = 0$) et récurrente positive pour $\alpha < 1$ (i.e. $\theta < 0$).

Exercice III

1. Puisque $Z_{n+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{s} U_{(n+1,k)}\right)\mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}$ on obtient facilement, par récurrence, que Z_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable. Par conséquent en posant $S_{(n+1,s)} = \sum_{k=1}^{s} U_{(n+1,k)}$ qui est une variable aléatoire indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}\mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}(S_{(n+1,s)}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}(S_{(n+1,s)}) = \mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}s\mu \\
\mathbb{E}(Z_{n+1}^2\mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}(S_{(n+1,s)}^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}(S_{(n+1,s)}^2) = \mathbb{1}_{\{Z_n=s\}}(s\sigma^2 + s^2\mu^2)
\end{aligned}$$

On en déduit les formules proposées ainsi que $\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n$, $\mathbb{E}(Z_n^2) = \mu^{2n}+\sigma^2(\sum_{k=n-1}^{2n-2}\mu^k)$.

2. La relation $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mu Z_n$ montre que X_n est une martingale, elle est de carré intégrable puisque $\mathbb{E}(Z_n^2) < \infty$. Ensuite $A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - X_n^2 = \sigma^2\mu^{-(n+2)}X_n$ et par conséquent $A_n = \sigma^2\sum_{k=1}^{n}\mu^{-(k+1)}X_{k-1}$

3. La martingale X_n est positive et $\mathbb{E}(X_n) = 1$, elle est donc bornée dans L^1 et converge p.s., d'après le théorème des martingales, vers une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$.

4. La martingale X_n converge dans L^2 si et seulement si elle est bornée dans L^2. Or $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_0) + \mathbb{E}(A_n) = 1 + \sigma^2\sum_{k=1}^{n}\mu^{-(k+1)}$, cette condition est donc réalisée si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-(k+1)}$ est convergente, c'est à dire si $\mu > 1$.

5.a Soit $\varphi(t)$ la fonction génératrice des U. Si l'on a $p_m = 1$ c'est à dire $\sum_{k=1}^{m} U_{(n,k)} = m$ p.s. alors $\varphi^m(t) = t^m$ et donc $\varphi(t) = t$ ce qui est exclu puisque c'est la fonction génératrice d'une variable aléatoire constante égale à 1.

5.b La suite X_n est à valeurs entières, par conséquent "$X_n(\omega)$ converge vers $X_\infty(\omega)$" signifie que "$X_n(\omega) = X_\infty(\omega)$ à partir d'un certain rang $N(\omega)$". Puisque cette convergence a lieu pour presque tout ω, ceci est équivalent à $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$.
5.c En utilisant le fait que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_\infty = m) &= \mathbb{P}((X_\infty = m) \cap \widetilde{\Omega}) = \mathbb{P}\Big((X_\infty = m) \cap (\cup_N \cap_{n \geq N} (X_n = m))\Big) \\ &\leq \mathbb{P}(\cup_N \cap_{n \geq N} (X_n = m)) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(\cap_{n \geq N}(X_n = m)) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(\cap_{n \geq N}(X_n = m)) \leq \mathbb{P}(\cap_{n \geq N}(\sum_{k=1}^{m} U_{(n+1,k)} = m)) = \prod_{n \geq M} p_m = 0$. On en déduit donc que la variable aléatoire (finie) X_∞ est nulle p.s. Par conséquent, la suite X_n n'est certainement pas uniformément intégrable puisque son espérance est constante égale à 1, et qu'elle converge p.s. vers 0 (on ne peut avoir convergence dans L^1 !).

2.3. Année universitaire 03-04

28 Janvier 2004

EXERCICE I

Soit U_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans l'ensemble à trois éléments $E = \{-1, 0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $P(U_n = 0) = r$, $\mathbb{P}(U_n = -1) = q$, ces trois paramètres vérifiant $p+r+q = 1$ et $p > 0$, $q > 0$. On suppose que cette suite est aussi indépendante d'une variable aléatoire X_0 à valeurs dans E. On considère la suite X_n définie pour $n \geq 1$ par par $X_n = X_0 \prod_{k=1}^{n} U_k$.

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov à valeurs dans E et donner sa matrice de transition Q.

2. Cette chaîne est-elle irréductible? Sinon, préciser ses classes de récurrence et leur nature.

3. Trouver la (les) probabilités(s) invariante(s) (on distinguera les cas $r = 0$ et $r \neq 0$).

4. On se place dans le cas $r \neq 0$ et on désigne par T_0 le temps d'entrée dans 0.

   (a) Calculer $\mathbb{P}_x(T_0 \leq n)$ pour $x = \pm 1$.

   (b) En déduire $\lim_{n \to \infty} Q^n(x, y)$ et écrire la matrice limite de Q^n soit Π. Quelle est la loi limite de X_n si X_0 a pour loi $\mu = (\alpha, \beta, \gamma)$?

5. On se place dans le cas $r = 0$. En étudiant les propriétés de la chaîne restreinte à l'ensemble $F = \{-1, +1\}$, trouver $\lim_{n \to \infty} Q^n(x, y)$ pour x et y dans F et en déduire la matrice limite de Q^n, soit Π, dans ce cas. Quelle est la loi limite de X_n si X_0 a pour loi $\mu = (\alpha, \beta, \gamma)$?

EXERCICE II

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, X_n, \mathbb{P}_x)$ une chaîne de Markov de transition Q sur un espace dénombrable E. Soit f une fonction <u>positive</u> et <u>bornée</u> sur E. On pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} Qf(X_k)$.

1. Montrer que $Z_n = U_n - V_n$ est une $\mathbb{P}_x$ martingale de carré intégrable pour tout $x \in E$.
2. Montrer que $\mathbb{E}_x((Z_{n+1} - Z_n)^2 | \mathcal{F}_n) = Q(f^2)(X_n) - (Qf(X_n))^2 \leq ||f||_\infty Qf(X_n)$
3. En déduire l'expression du processus croissant A_n dans la décomposition de Doob de la $\mathbb{P}_x$ sous-martingale Z_n^2, puis que $A_n \leq ||f||_\infty V_n$.
4. En déduire que, sur l'ensemble $(\lim_n \uparrow V_n = +\infty)$, on a $\lim_n \dfrac{U_n}{V_n} = 1$, $\mathbb{P}_x$ p.s., pour tout $x \in E$ (on pourra se placer successivement sur les ensembles $(A_\infty < \infty)$ et $(A_\infty = \infty)$).
5. On se place dans le cas récurrent irréductible.
   (a) Soit g une fonction positive, non indentiquement nulle sur E. Montrer que pour pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_x(\lim_n \uparrow \sum_{k=1}^{n} g(X_k) = +\infty) = 1$ (on pourra minorer g par un multiple de l'indicatrice d'un point bien choisi...).
   (b) Quel rapport le résultat établi en 4. a-t-il avec le théorème ergodique?

EXERCICE III

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, X_n, \mathbb{P}_x)$ une chaîne de Markov de transition Q sur un espace E avec $Q(x,x) < 1$ pour tout $x \in E$. Soit R_k la suite de temps d'arrêt définie par $R_0 = 0$, $R_{k+1} = \inf\{n > R_k,\ X_n \neq X_{R_k}\}$, où, par convention, on pose $R_{k+1} = +\infty$ si $R_k = \infty$ ou bien lorsque $X_n = X_{R_k}$, $\forall n > R_k$.

1. Que représente la suite R_k pour la chaîne X_n?
2. Calculer $\mathbb{P}_x(R_1 \geq n)$ en fonction de $Q(x,x)$. En déduire que $\mathbb{P}_x(R_1 < \infty) = 1$, $\forall x \in E$.
3. Préciser une relation liant R_{k+1}, R_1 et R_k (utilisant l'opérateur de translation θ) et en déduire que pour $k \geq 1$, R_k est $\mathbb{P}_x$ presque sûrement fini pour tout $x \in E$.
4. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $Y_n = X_{R_n}$ est une $\mathbb{P}_x$ chaîne de Markov sur E (on pourra utiliser la filtration $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{R_n}$). Montrer que la matrice de transition de la chaîne Y_n, soit $\overline{Q}$, est donnée par:

$$\overline{Q}(x,x) = 0, \quad \overline{Q}(x,y) = \frac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)} \ \text{ pour } x \neq y$$

5. Comparer, pour ω donné, les ensembles de points de E définis par $\{X_n(\omega)\ ;\ n \geq 0\}$ et $\{Y_n(\omega)\ ;\ n \geq 0\}$. En déduire une relation entre $(T_y < \infty)$ et $(\overline{T}_y < \infty)$ où T_y (resp. $\overline{T}_y$) est le temps d'entrée de la chaîne X_n (resp. Y_n) dans y.

   (a) Montrer que la chaîne X_n est irréductible si et seulement si il en est de même pour la chaîne Y_n.

   (b) Etablir que la chaîne X_n est récurrente irréductible si et seulement si $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$ pour tout couple (x, y). En déduire que la chaîne X_n est récurrente irréductible si et seulement si il en est de même pour la chaîne Y_n.

   (c) Montrer que si la chaîne X_n est récurrente irréductible positive il en est de même de la chaîne Y_n (on pourra construire une mesure invariante pour Y_n à partir d'une mesure invariante pour X_n). Donner une condition suffisante pour que l'implication inverse soit vraie.

Corrigé

EXERCICE I

1. On a $X_{n+1} = X_n U_{n+1}$ où U_n est une suite i.i.d. et indépendante de X_0 ce qui prouve que X_n est une chaîne de Markov. D'autre part, $Q(x, y) = \mathbb{P}(x.U_{n+1} = y)$ et l'on obtient donc la matrice de transition dont les trois lignes sont: (p, r, q), $(0, 1, 0)$ et (q, r, p).

2. L'élément 0 ne conduit qu'à 0 alors que 1 et -1 conduisent l'un à l'autre. La chaîne n'est donc pas irréductible et possède deux classes soit $\{0\}$ et $\{-1, +1\}$. La classe $\{0\}$ est manifestement récurrente, alors que la classe $\{-1, +1\}$ n'est close que si $r = 0$. Par conséquent si $r > 0$ c'est une classe transitoire et si $r = 0$ alors c'est une classe récurrente puisque partant d'un point de cette classe, la chaîne reste dans cet ensemble fini.

3. Soit $\pi = (\alpha, \beta, \gamma)$. L'équation $\pi Q = \pi$ est équivalente au système: $q(\gamma - \alpha) = \alpha r$, $r(\alpha + \gamma) = 0$, $q(\alpha - \gamma) = \alpha r$. Par conséquent si $r \neq 0$ on a l'unique solution $\pi = (0, 1, 0)$, sinon on a la famille de solutions $\pi = ((1-\beta)/2, \beta, (1-\beta)/2)$ pour $0 \leq \beta \leq 1$.

4.(**a**) Pour $x = \pm 1$, $\mathbb{P}_x(T \leq n) = 1 - \mathbb{P}_x(T > n) = 1 - \mathbb{P}(U_k \neq 0\ ;\ k = 1, \dots, n) = 1 - (1-r)^n$

4.(**b**) $Q^n(x, y) = \mathbb{P}_x(X_n = y)$ donc si $x = 0$ alors $Q^n(0, 0) = 1$ et $Q^n(0, y) = 0$ pour $y = \pm 1$. Si $x = \pm 1$ alors $\mathbb{P}_x(X_n = 0) = \mathbb{P}_x(T \leq n) = 1 - (1-r)^n$ et donc $Q^n(x, 0) \to 1$. Il s'en suit que $\mathbb{P}_x(X_n = y) \to 0$ pour $y = \pm 1$. En définitive, la matrice limite de Q^n est donc la matrice Π, dont les trois lignes sont égales à $(0, 1, 0)$. La loi limite de X_n avec loi initiale μ est donnée par $\mu \Pi$ soit $(0, 1, 0)$. Elle ne dépend pas de μ, et c'est l'unique probabilité invariante.

5. La restriction de la chaîne à F est irréductible, récurrente positive puisque F est fini et elle admet (l'unique) probabilité invariante $(1/2, 1/2)$. Comme $Q(1, 1) = p > 0$, cette chaîne est apériodique et par conséquent $\lim Q^n(x, y) = 1/2$ pour x et y dans F. D'autre part, pour $x \in F$, on a $Q^n(x, 0) = 0$ et $Q^n(0, x) = 0$. On en déduit que la matrice limite Π a pour lignes les trois vecteurs: $(1/2, 0, 1/2)$, $(0, 1, 0)$ et $(1/2, 0, 1/2)$. La loi limite de X_n avec loi initiale μ est donnée par $\mu\Pi$ soit $((1-\beta)/2, \beta, (1-\beta)/2)$. Elle dépend de μ et l'on obtient toute la famille des probabilités invariantes dans ce cas.

EXERCICE II

1. On a $|Z_{n+1} - Z_n| \leq 2||f||_\infty$, chaque variable aléatoire Z_n est donc bornée et, par conséquent, de carré intégrable. De plus, $Z_{n+1} - Z_n = f(X_{n+1}) - Qf(X_n)$ et donc $\mathbb{E}_x((Z_{n+1} - Z_n)|\mathcal{F}_n) = Qf(X_n) - Qf(X_n) = 0$. La suite Z_n est donc une martingale de carré intégrable.

2. En développant le carré on obtient:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x((Z_{n+1} - Z_n)^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}_x((f^2(X_{n+1}) - 2f(X_{n+1})Qf(X_n) + (Qf(X_n))^2)|\mathcal{F}_n) \\ &= Q(f^2)(X_n) - (Qf(X_n))^2\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est majorée par $Q(f^2)(X_n) \leq ||f||_\infty Qf(X_n)$.

3. On en déduit que, sous la probabilité $\mathbb{P}_x$, le processus croissant $A_n = \sum_{k=0}^{n-1}(A_{k+1} - A_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_x((Z_{k+1} - Z_k)^2|\mathcal{F}_k)$ est majoré par $||f||_\infty V_n$.

4. Tout revient à prouver que la limite de Z_n/V_n est nulle sur $(V_\infty = \infty)$. Sur $(A_\infty < \infty) \cap (V_\infty = \infty)$ on sait que Z_n converge $\mathbb{P}_x$ p.s. vers une variable aléatoire finie et donc le résultat est prouvé dans ce cas. Sur $(A_\infty = \infty) \cap (V_\infty = \infty)$, on peut écrire $Z_n/V_n = (Z_n/A_n)(A_n/V_n)$. D'après la question précédente la suite A_n/V_n est bornée et l'on sait que sur $A_\infty = \infty$ la suite Z_n/A_n tend $\mathbb{P}_x$ p.s. vers 0. Le résultat est donc prouvé dans tous les cas.

5. Si l'on suppose la chaîne récurrente irréductible, elle possède une unique mesure invariante non triviale π (à une constante multiplicative près).

(**a**) La fonction g étant non identiquement nulle, il existe un point x_0 avec $g(x_0) > 0$ et donc $g(x) \geq g(x_0)\mathbb{1}_{\{x_0\}}(x)$. On en déduit que $\lim_n \uparrow \sum_{k=1}^n g(X_k) = \sum_{k=0}^\infty g(X_k) \geq g(x_0)N_{x_0}$. Or on sait que $\mathbb{P}_x(N_{x_0} = \infty) = 1$ pour tout couple de points (x, x_0).

(**b**) En posant $g = Qf$, si l'on suppose que f n'est pas identiquement nulle, alors $\pi(f) > 0$ (car π est strictement positive) et donc $\pi(g) = \pi(f) > 0$. Il s'en suit que g n'est pas identiquement nulle non plus. Si l'on suppose de plus que f soit π intégrable, alors le théorème ergodique implique que le quotient U_n/V_n converge $\mathbb{P}_x$ p.s. vers $\pi(f)/\pi(g)$ c'est à dire 1. Mais d'après la question 4, le résultat reste donc vrai si l'on suppose seulement f bornée non identiquement nulle (ce qui est une amélioration du théorème ergodique dans le cas récurrent nul, mais pas dans le cas récurrent positif...).

EXERCICE III

1. Les R_k sont les instants de saut successifs de la chaîne X_n.

2. $\mathbb{P}_x(R_1 \geq n) = \mathbb{P}_x(X_1 = x, \ldots, X_{n-1} = x) = (Q(x,x))^{n-1}$. Or $Q(x,x) < 1$ et donc $\mathbb{P}_x(R_1 = \infty) = \lim_n \downarrow \mathbb{P}_x(R_1 \geq n) = 0$.

3. Sur l'ensemble $(R_k < \infty)$ on a $R_{k+1} = R_k + R_1 \circ \theta_{R_k}$. Par conséquent si l'on suppose que R_k est $\mathbb{P}_x$ p.s. fini pour tout x on peut écrire en utilisant Markov fort:

$\mathbb{P}_x(R_{k+1} < \infty) = \mathbb{P}_x(R_1 \circ \theta_{R_k} < \infty) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{P}_x(R_1 \circ \theta_{R_k} < \infty | \mathcal{F}_{R_k})\right) = \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{X_{R_k}}(R_1 < \infty)) = 1$

4. On utilise la filtration $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{R_n}$. Le processus Y_n est adapté à cette filtration et $Y_{n+1} = Y_1 \circ \theta_{R_n}$. Soit alors $f \geq 0$, en utilisant de nouveau Markov fort on obtient:
$\mathbb{E}_x(f(Y_{n+1})|\mathcal{G}_n) = \mathbb{E}_x(f(Y_1) \circ \theta_{R_n} | \mathcal{F}_{R_n}) = \mathbb{E}_{X_{R_n}}(f(Y_1)) = \mathbb{E}_{Y_n}(f(Y_1)) = \overline{Q}f(Y_n)$
où l'on a posé $\overline{Q}f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_{R_1}))$. Sous la probabilité $\mathbb{P}_x$, la suite Y_n est donc une chaîne de Markov d'état initial x et de transition $\overline{Q}$. On a bien sûr $\overline{Q}(x,x) = 0$ et pour $x \neq y$
$\overline{Q}(x,y) = \mathbb{P}_x(X_{R_1} = y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y, R_1 = n) = Q(x,y) \sum_{k=1}^{\infty} Q^{n-1}(x,x) = \dfrac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)}$ Autrement dit, on met la diagonale de Q à zéro et on renormalise les lignes.

5. La trajectoire $\{Y_n(\omega)\ ;\ n \geq 0\}$ est obtenue à partir de $\{X_n(\omega)\ ;\ n \geq 0\}$ en remplaçant toute suite de points consécutifs identiques par un seul d'entre eux. Les deux ensembles de points sont donc identiques et $(T_y(\omega) < \infty) \Leftrightarrow (\overline{T}_y(\omega) < \infty)$.

5.(**a**) D'aprés la remarque précédente, $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = \mathbb{P}_x(\overline{T}_y < \infty)$. Ces deux quantités sont donc simultanément strictement positives ou nulles.

5.(**b**) Si X_n est récurrente irréductible alors $u(x) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty) \equiv 1$ (on a même $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) \equiv 1$). Réciproquement, si $u(x) \equiv 1$, alors X_n est irréductible et $v(x) = \mathbb{P}_x(S_y < \infty) = Qu(x) \equiv 1$, d'où $v(y) = \mathbb{P}_y(S_y < \infty) = 1$. Il suffit alors d'utiliser la relation $u(x) = \overline{u}(x)$ pour conclure.

5.(**c**) Soit π une mesure non triviale sur E. En posant $\overline{\pi}(x) = (1 - Q(x,x))\pi(x)$ on a $\overline{\pi}\overline{Q}(y) = \sum_x \overline{\pi}(x)\overline{Q}(x,y) = \sum_{x \neq y} \pi(x)Q(x,y) = \pi Q(y) - \pi(y)Q(y,y)$ et donc, $\overline{\pi}$ est $\overline{Q}$ invariante si et seulement si π est Q invariante. De plus $\sum_x \overline{\pi}(x) \leq \sum_x \pi(x)$. Par conséquent si π est de masse totale finie, il en est de même de $\overline{\pi}$. La réciproque est en général fausse, sauf si l'on impose la majoration $Q(x,x) \leq c < 1$.

2.4. Année universitaire 04-05

25 Janvier 2005

EXERCICE I

Préambule

1. *Soit Z une variable aléatoire intégrable. Exprimer $\mathbb{E}(|Z|)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{E}(Z^-)$. En déduire que pour une surmartingale Z_n, il suffit que la suite Z_n^- soit bornée dans L^1 pour qu'il en soit de même de la suite Z_n.*

2. *Soit Z_n une surmartingale de la forme $Z_n = U_n - V_n$ où U_n et V_n sont des processus positifs avec V_n borné dans L^1. Pourquoi peut-on dire que Z_n converge p.s. vers une variable aléatoire p.s. finie?*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et, pour $n \geq 0$, des variables aléatoires X_n, Y_n qui sont $\mathcal{F}_n$ mesurables, positives, intégrables, vérifiant l'inégalité:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n + Y_n \qquad (\clubsuit)$$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k$ et $\Gamma = \{\omega \; ; \; \lim_n \uparrow S_n(\omega) < \infty\}$. Pour un entier $N \geq 1$ on définit le temps d'arrêt T_N par $T_N(\omega) = \inf\{n \geq 0 \,; \, S_n(\omega) > N\}$ s'il existe n avec $S_n(\omega) > N$ et $T_N(\omega) = +\infty$ sinon.

1. Pour $n \geq 1$ on pose $Z_n = X_n - S_{n-1}$. Montrer que Z_n est une surmartingale.

2. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, la suite $Z_{n \wedge T_N}$ converge p.s. vers une variable aléatoire finie.

3. En déduire que X_n converge p.s vers une variable aléatoire finie sur l'ensemble Γ.

4. Soit X_n une sousmartingale positive et $X_n = M_n + A_n$ sa décomposition de Doob. Montrer que X_n vérifie une relation de la forme $(\clubsuit)$ (où l'inégalité est en fait une égalité ...) et en déduire que la suite X_n converge p.s. vers une variable aléatoire finie sur l'ensemble $\{A_\infty < \infty\}$, où $A_\infty = \lim_n \uparrow A_n$.

EXERCICE II

On considère une chaîne de Markov canonique $(\Omega, \mathcal{F}_n, X_n, \mathbb{P}_x)$ sur un espace d'états E.

A

On suppose, dans cette partie que la chaîne est irréductible. Soit F une partie finie de E. On note T le temps d'entrée dans le complémentaire de F (supposé non vide).

1. Prouver que $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$ pour tout $x \in E$. Pour ceci on considérera successivement les deux comportements possibles de la chaîne (dans le cas transitoire, on pourra considérer la quantité $\mathbb{E}_x(N_F)$).

2. Soit φ une fonction positive sur E telle que $Q\varphi(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in F$. On pose $Z_n = \varphi(X_{n \wedge T})$:

   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\mathbb{E}_x(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Z_n$

   (b) Soit $c \in E$. Montrer que si la suite Z_n est $\mathbb{P}_c$ p.s. bornée, alors $\varphi(c) = \mathbb{E}_c(\varphi(X_T))$.

B

Soit p, q, r des réels positifs avec $p + q + r = 1$, $p > 0$, $q > 0$ (r peut être nul). On considère alors la chaîne à valeurs dans $E = \mathbb{N}$, de noyau de transition Q défini par $Q(0, 1) = 1$, puis, lorsque $x \geq 1$, $Q(x, x+1) = p$, $Q(x, x-1) = q$, $Q(x, x) = r$.

1. Montrer que cette chaîne est irréductible. Est-elle apériodique?

2. Construire une fonction positive φ sur E, vérifiant $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $Q\varphi(x) = \varphi(x)$ pour $x \geq 1$.

3. Soit $0 \leq a < c < b$ trois entiers. On pose $T = T_a \wedge T_b$.

   (a) Comparer, $\mathbb{P}_c$ p.s., le temps T à un temps d'entrée du type étudié dans (**A**).

   (b) En déduire que $\varphi(c) = \mathbb{E}_c\{\varphi(X_T)\}$ (justifiez votre réponse !)

   (c) En déduire que $\mathbb{P}_c\{T_a < T_b\} = \dfrac{\varphi(b) - \varphi(c)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$

4. On se place dans le cas $a = 0$ et on fait tendre b vers $+\infty$.

   (a) Montrer que, $\mathbb{P}_c$ p.s., la suite T_b est croissante vers $+\infty$.

   (b) Calculer $\lim_{b\to\infty} \varphi(b)$ et en déduire l'expression de $u(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < \infty)$ pour tout $x \geq 0$, puis de $v(x) = \mathbb{P}_x(S_0 < \infty)$ pour tout $x \geq 0$ (on distinguera deux cas). En déduire la nature de la chaîne dans chaque cas.

EXERCICE III

On considère des variables aléatoires X_0, $(U_n)_{n\geq1}$, $(Y_n)_{n\geq1}$, $(Z_n)_{n\geq1}$ toutes indépendantes entre elles. La variable aléatoire X_0 est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, les Y_n sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et de même loi μ, les Z_n sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et de même loi ν et les U_n suivent la même loi de Bernoulli avec $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $0 < p < 1$ (on posera $q = 1 - p$). La suite X_n est définie par récurrence de la façon suivante:

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} \text{ si } U_{n+1} = 0 \ , \quad X_{n+1} = Y_{n+1} \text{ si } U_{n+1} = 1$$

1. On pose $A_n = \{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$. Comparer $\mathbb{P}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}(A_n)$. En déduire que X_n est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $E = \mathbb{Z}$, dont on donnera la matrice de transition $Q(x, y)$

2. Quel est le comportement de $Q^n(x, y)$ lorsque $n \to \infty$?

3. On suppose que les Y_n sont p.s. nulles et l'on désigne par ν^{*n} la loi de $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ (avec $\nu^{*0} = \partial_0$). Montrer que la mesure $\pi = p\sum_{n=0}^{\infty} q^n \nu^{*n}$ est une probabilité invariante. Calculer explicitement la limite de $Q^n(x, y)$ lorsque ν est une loi géométrique de paramètre p (i.e. $\nu(k) = qp^k$ pour $k \geq 0$).

Corrigé

EXERCICE I

P1. $|Z| = Z + 2Z^-$ et donc pour une surmartingale Z_n on a $\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}(Z_n) + 2\mathbb{E}(Z_n^-) \leq \mathbb{E}(Z_0) + 2\mathbb{E}(Z_n^-)$ d'où $\sup_n \mathbb{E}(|Z_n|) \leq \mathbb{E}(Z_0) + 2\sup_n \mathbb{E}(Z_n^-)$.

P2. Si un réel x s'écrit $x = a - b$ avec a et b positifs, alors $x^- \leq b$. Par conséquent $Z_n^- \leq V_n$ et si V_n est borné dans L^1, il en sera de même de Z_n^- et donc de Z_n. Une surmartingale bornée dans L^1 converge p.s. vers une variable aléatoire intégrable, donc finie p.s.

1. $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - S_n \le X_n + Y_n - S_n = Z_n$

2. Pour $0 \le k \le T - 1$ on a $S_k \le N$. La suite positive $S_{(n\wedge T_N - 1)}$ est donc bornée par l'entier N et par conséquent bornée dans L^1. Il s'en suit, d'après le préambule, que la surmartingale $Z_{n\wedge T_N} = X_{n\wedge T_N} - S_{(n\wedge T_N-1)}$ est bornée dans L^1 et qu'il existe un ensemble Ω_N de probabilité 1 sur lequel la suite $Z_{n\wedge T_N}$ converge vers une limite finie.

3. On a $\mathbb{P}(\cap_N \Omega_N) = 1$. Si $\omega \in \Gamma$, il existe N_0 avec $T_{N_0}(\omega) = \infty$, il s'en suit que $Z_{n\wedge T_{N_0}}(\omega) = Z_n(\omega)$. Si de plus $\omega \in (\cap_N \Omega_N)$, alors $Z_n(\omega)$ converge vers une limite finie puisqu'en particulier $\omega \in \Omega_{N_0}$. Sur $\Gamma \cap (\cap_N \Omega_N)$, les suites Z_n et S_n convergent donc vers une limite finie, et il en est de même de $X_n = Z_n + S_{n-1}$.

4. On a $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) + A_{n+1} = M_n + A_{n+1} = X_n + (A_{n+1} - A_n)$ La propriété ($\clubsuit$) est donc vérifiée avec $Y_n = A_{n+1} - A_n$ qui est bien positif et $\mathcal{F}_n$ mesurable. De plus $S_n = A_{n+1}$ et par conséquent $\Gamma = (A_\infty < \infty)$, d'où le résultat.

EXERCICE II

A1. La chaîne étant irréductible, elle est soit récurrente, soit transitoire. Soit y un point du complémentaire de F. Dans le cas récurrent irréductible, on sait que pour tout x on a $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$, or $T \le T_y$. Dans le cas transitoire on a $U(x, y) < \infty$ pour tout couple x,y. Par conséquent $\mathbb{E}_x(N_F) = \sum_{y\in F} U(x, y) < \infty$. On en déduit que $\mathbb{P}_x(N_F < \infty) = 1$, or $(N_F < \infty) \subset (T < \infty)$.

A2.a. En "découpant" selon les valeurs de T on obtient:

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \varphi(X_k)\mathbb{1}_{\{T=k\}} + \varphi(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{T>n\}} = Z_n\mathbb{1}_{\{T\le n\}} + \varphi(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{T>n\}} \\ \mathbb{E}_x(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= Z_n\mathbb{1}_{\{T\le n\}} + \mathbb{1}_{\{T>n\}}Q\varphi(X_n) = Z_n \end{aligned}$$

En effet, la variable aléatoire $Z_n\mathbb{1}_{\{T\le n\}}$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable ainsi que $\mathbb{1}_{\{T>n\}}$. De plus, sur l'ensemble $(T > n)$ on a $X_n \in F$ et donc $\mathbb{1}_{\{T>n\}}Q\varphi(X_n) = \mathbb{1}_{\{T>n\}}\varphi(X_n)$.

A2.b. La suite Z_n est alors une martingale bornée dans $L^1(\mathbb{P}_c)$), elle converge donc $\mathbb{P}_c$ presque sûrement, et puisque T est $\mathbb{P}_c$ p.s. fini, sa limite est $\varphi(X_T)$. Comme la suite Z_n est bornée, elle converge aussi dans $L^1(\mathbb{P}_c)$) d'après le théorème de Lebesgue, d'où la formule annoncée puisque $\mathbb{E}_c(Z_n) = \mathbb{E}_c(Z_0) = \mathbb{E}_c(\varphi(X_0)) = \varphi(c)$.

B.1. L'irréductibilité est évidente. Si $r > 0$ alors $Q(1, 1) > 0$ et la chaîne est apériodique. Par contre, si $r = 0$, alors $\{n \ge 1\,;\, Q^n(0, 0) > 0\} = 2\mathbb{N}^*$ et la période est 2.

B2. On vérifie facilement par récurrence, que la solution de l'équation $Q\varphi(x) = \varphi(x)$ pour $x \ge 1$, soit encore $p\varphi(x + 1) + r\varphi(x) + q\varphi(x - 1) = \varphi(x)$, et satisfaisant aux conditions initiales imposées, est donnée par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{x-1}(q/p)^n$ pour $x \ge 1$.

(**B3.a**.) La chaîne partant de c et ne faisant que des sauts d'amplitude ± 1, le temps T est du type considéré dans la partie (**A**) avec $F =]a, b[$.

B3.b. On a bien $Q\varphi(x) = \varphi(x)$ pour $x \in F$. De plus, la chaîne est irréductible et comme $X_{n\wedge T} \in [a, b]$, $\mathbb{P}_c$ p.s. on obtient $Z_n \le \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x) = \varphi(b)$. Toutes les conditions sont donc réunies pour appliquer les résultats précédents.

(**B3**.**c**.) L'égalité précédente peut s'écrire $\varphi(c) = \varphi(a)\mathbb{P}_c(T = T_a) + \varphi(b)\mathbb{P}_c(T = T_b)$. Or $(T = T_a) = (T_a < T_b)$ puisque $(T_a = T_b) = \emptyset$.

(**B4**.**a**.) Partant de $c < b$ et ne faisant que des sauts d'amplitude ± 1 on a $T_{b+1} \geq 1 + T_b$. Par conséquent la suite T_b est croissante vers $+\infty$.

(**B4**.**b**.) Dans le cas $q \geq 1/2$ on a $\lim_{b\uparrow+\infty} \varphi(b) = +\infty$ et cette limite vaut $p/(p-q)$ dans le cas contraire. D'après la question précédente, la suite d'événements $(T_0 < T_b)$ est $\mathbb{P}_c$ p.s. croissante vers $(T_0 < +\infty)$ donc, pour $c \geq 1$, $\mathbb{P}_c(T_0 < \infty) = \lim_{b\uparrow+\infty} \mathbb{P}_c(T_0 < T_b) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \geq 1/2 \\ (q/p)^c & \text{si } q < 1/2 \end{cases}$ Comme on a toujours $\mathbb{P}_0(T_0 < \infty) = 1$, il en résulte que $u(x) = v(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$ dans le cas $q \geq 1/2$ et la chaîne est alors récurrente. Lorsque $q < 1/2$ on a $u(x) = (q/p)^x$ pour tout $x \geq 0$ et donc $v(0) = \mathbb{P}_0(S_0 < \infty) = u(1) = q/p < 1$, la chaîne est alors transitoire, et pour $x \geq 1$ on a $v(x) = u(x) = (q/p)^x$.

EXERCICE III

1. D'après la construction de X_n, le triplet $(U_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$ est indépendant de la famille $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ et de plus, ces trois variables aléatoires sont indépendantes entre elles. On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap (U_{n+1} = 1)) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap (U_{n+1} = 0)) \\ &= \mathbb{P}(A_n \cap (U_{n+1} = 1) \cap (Y_{n+1} = x_{n+1})) + \mathbb{P}(A_n \cap (U_{n+1} = 0) \cap (Z_{n+1} = x_{n+1} - x_n)) \\ &= \mathbb{P}(A_n)(p\mu(x_{n+1}) + q\nu(x_{n+1} - x_n)) \end{aligned}$$

Il s'en suit que X_n est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, de transition $Q(x, y) = p\mu(y) + q\nu(y - x)$

2. La chaîne X_n est une chaîne de Doeblin puisque $Q(x, y) \geq p\mu(y)$. Il existe donc une unique probabilité invariante π vérifiant $\sup_x \sum_{y\in\mathbb{Z}} |Q^n(x, y) - \pi(y)| \leq 2q^n$. Il s'en suit que l'on a stabilisation, c'est à dire que $Q^n(x, y)$ converge vers $\pi(y)$.

3. Tout d'abord π est bien une probabilité car $\pi(\mathbb{Z}) = p \sum_{n\geq 0} q^n \nu^{*n}(\mathbb{Z}) = p \sum_{n\geq 0} q^n = 1$. Ensuite l'invariance de π s'exprime par $\pi(y) = \pi Q(y) = \sum_x (p\pi(x)\delta_0(y) + q\pi(x)\nu(y - x)) = p\delta_0(y) + q(\pi * \nu)(y)$ pour tout $y \in \mathbb{Z}$ Or $\pi = p(\partial_0 + q\nu + q^2\nu^{*2} + \ldots)$ et donc $q(\pi * \nu) = p(q\nu + q^2\nu^{*2} + \ldots)$ d'où la relation d'invariance. Pour trouver $\lim_n Q^n(x, y)$, on doit donc expliciter la loi π. Dans le cas proposé, π est manifestement portée par $\mathbb{N}$, on peut donc utiliser sa fonction génératrice soit $\psi(t)$, en utilisant la fonction génératrice de ν soit $\varphi(t) = q/(1 - pt)$. En effet,

$$\psi(t) = p \sum_{n\geq 0} (q\varphi(t))^n = \frac{p}{1 - q^2/(1 - pt)} = p + \frac{q^2/(1 + q)}{1 - t/(1 + q)}$$

On en déduit que $\pi(0) = 1/(1 + q)$ et $\pi(y) = \dfrac{q^2}{(1 + q)^{y+1}}$ pour $y \geq 1$. On a bien sûr $\pi(y) = 0$ pour $y \leq -1$.

2.5. Année universitaire 05-06

25 Janvier 2006

EXERCICE I

La partie B est indépendante de A, si l'on admet le résultat de la question **A.3**.

Préambule *Soit X_n une martingale et K un réel tel que $X_n \geq K$ pour tout n (ou bien tel que $X_n \leq K$ pour tout n). Pourquoi peut-on dire que X_n converge p.s. vers une variable aléatoire p.s. finie?*

Soit Y une variable aléatoire réelle, non presque sûrement nulle. On considère une suite Y_n, $n \geq 1$, de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y et on pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ pour $n \geq 1$. Soit a et b deux réels, avec $a < 0$, $b > 0$, $I =]a, b[$, $c = b - a$ et T le temps de sortie de l'intervalle I défini par $T = \inf\{n \geq 0 \,|\, S_n \notin I\}$.

A.1. On suppose, uniquement dans cette question, que de plus, il existe une constante γ telle que $|Y| \leq \gamma$ et on pose alors $\alpha = \mathbb{E}(Y)$.

- **a)** Montrer que $Z_n = S_n - n\alpha$ est une martingale puis que $X_n = S_{T\wedge n} - \alpha(n \wedge T)$ vérifie $X_n \leq (b+\gamma)$ ou bien $X_n \geq (a-\gamma)$, suivant le signe de α. Que peut-on en conclure sur le comportement asymptotique de X_n?
- **b)** Soit $B = \{\omega \; ; \; Y_n(\omega) \to \alpha\}$. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(B)$? Lorsque $\mathbb{P}(B) = 1$ que peut-on dire de la variable aléatoire Y?
- **c)** Montrer que $(T = \infty) \subset B$ et en déduire que $\mathbb{P}\{T = \infty\} = 0$ dans tous les cas.

A.2. On revient au cas général pour Y et on pose $Y'_n = Y_n \mathbb{1}_{\{|Y_n| \leq c\}} + c\mathbb{1}_{\{|Y_n| > c\}}$. On note T' le temps de sortie de l'intervalle I associé à la suite $S'_n = Y'_1 + \ldots + Y'_n$.
Montrer que $((S_{n-1} \in I) \cap (S_n \in I)) \subset (Y_n = Y'_n)$, puis que $(T > n) \subset (T' > n)$.

A.3. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$. Si l'on suppose Y intégrable, quand peut-on obtenir ce résultat beaucoup plus rapidement?

On suppose que $\rho = \mathbb{E}(\exp(Y)) < \infty$ et on pose maintenant $X_n = \dfrac{\exp(S_n)}{\rho^n}$ pour $n \geq 0$.

B.1. Montrer que X_n est une martingale.

B.2. On considère une suite i.i.d. $\widetilde{Y_n}$ dont la loi a pour densité $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{\rho}$ par rapport à la loi de Y. On note $\widetilde{T}$ le temps de sortie de l'intervalle I associé à la suite $\widetilde{S}_n = \widetilde{Y}_1 + \cdots + \widetilde{Y}_n$. Montrer que $\mathbb{P}(\widetilde{T} > n) = \int_{T>n} X_n \, d\mathbb{P}$.

B.3. En utilisant la suite $X_{n\wedge T}$, montrer que $\mathbb{E}(X_T) = 1$

B.4. On suppose que Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a = -b$. Calculer la limite presque sûre de X_n. Cette martingale est-elle régulière? Le résultat **B.3.** résulte-t-il d'un théorème d'arrêt de martingale? Déterminer $\mathbb{E}(A_\infty)$ si A_n est le processus croissant associé à la décomposition de Doob de X_n^2.

EXERCICE II

Soit λ une probabilité sur $\mathbb{N}$, non portée par un sous ensemble fini, et telle que $\lambda(0) = 0$. On pose $\rho = \sum_{x \geq 1} x\lambda(x)$, quantité qui peut être finie ou non. On définit la matrice de transition Q sur $\mathbb{N}$ par $Q(0, y) = \lambda(y)$ et pour $x \geq 1$, la probabilité $Q(x, \bullet)$ est uniformément répartie sur les entiers $\{0, 1, \ldots, x - 1\}$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, X_n, \mathbb{P}_x)$, la chaîne de Markov canonique sur l'espace d'états $E = \mathbb{N}$, associée à Q. Dans la suite on note T_0 le temps d'entrée dans 0 et S_0 le temps de retour dans 0 soit $T_0 = \inf\{n \geq 0 \ ; \ X_n = 0\}$, $S_0 = \inf\{n \geq 1 \ ; \ X_n = 0\}$, ces temps d'arrêt étant infinis si l'ensemble des valeurs de n dont on calcule l'infimum est vide.

1. Soit μ une probabilité sur E. Calculer $\mathbb{E}_\mu(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ en fonction de X_n et ρ.

2. Montrer que la chaîne est irréductible.

3. La chaîne est-elle apériodique?

4. Soit $x \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}_x(T_0 \leq x) = 1$. En utilisant une relation entre S_0 et T_0, montrer que la chaîne est récurrente et que $\rho < \infty$ est une condition suffisante de récurrence positive.

5. On pose $u(x) = \mathbb{E}_x(T_0)$. Écrire le système d'équations satisfaites par $u(x)$. Vérifier que ce système possède une solution unique donnée par $u(x) = \sum_{k=1}^{x} 1/k$ pour $x \geq 1$. En déduire que $\sum_{x \geq 2} \log(x)\lambda(x) < \infty$ est une condition nécessaire et suffisante de récurrence positive.

6. On choisit maintenant $\lambda(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$ pour $x \geq 1$. Vérifier que λ est bien une probabilité puis calculer $\mathbb{E}_0(S_0)$. Soit μ une probabilité sur E. Que peut-on dire du comportement asymptotique de la suite $\mathbb{P}_\mu(X_n = 0)$?

EXERCICE III

Soit Y une variable aléatoire de loi ν à valeurs dans $\mathbb{Z}$, Q la matrice de transition définie par $Q(x, y) = \nu(y - x)$ et U la matrice potentielle associée. Soit Y_n, $n \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ pour $n \geq 1$.

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, exprimer $Q^n(x, y)$ à l'aide de la loi de S_n (pour x fixé dans $\mathbb{Z}$, on pourra considérer le processus $X_n^{(x)} = x + S_n$, $n \geq 0$). En déduire que $U(x, y) = U(x + z, y + z)$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$, puis que $U(x, y) \leq U(0, 0)$.

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leq m) \leq (2m + 1)U(0, 0)$

3. Pour $t \in \mathbb{R}^+$ on pose $u_n(t) = \mathbb{P}(|S_n| \le t)$. Soit A et m des entiers positifs. Montrer, en utilisant une propriété évidente de la fonction $t \hookrightarrow u_n(t)$, que

$$\sum_{n=0}^{mA} u_n(m) \ge \sum_{n=0}^{mA} u_n(n/A)$$

4. On suppose que $S_n/n \to 0$ en probabilité . Montrer que le point 0 est récurrent pour la marche aléatoire de loi ν. Déduire de ce qui précède que si Y est intégrable et de moyenne nulle alors tout point de $\mathbb{Z}$ est récurrent pour la marche aléatoire de loi ν.

Corrigé

EXERCICE I

P. La minoration $X_n \ge K$ implique que $M_n = X_n - K$ est une martingale positive donc bornée dans L^1 (on rappelle qu'une martingale est toujours supposée intégrable!). Elle converge alors p.s. vers une variable aléatoire intégrable, donc finie p.s. En considérant $M_n = K - X_n$, on a la même conclusion si $X_n \le K$ pour tout n.

A.1.a. Le fait que Z_n soit une martingale est classique. Pour tout $k < T$, $S_k \in I$ et pour $k = T$, le "saut" de S_k est d'au plus γ. Par conséquent on a l'encadrement $a - \gamma \le S_{n\wedge T} \le b + \gamma$. Si $\alpha \le 0$, alors $X_n \ge S_{n\wedge T} \ge a - \gamma$ et si $\alpha \ge 0$, alors $X_n \le S_{n\wedge T} \le b + \gamma$. La suite Z_n étant une martingale, il en est donc de même de X_n. D'après le préambule, X_n converge p.s. vers une limite finie dans les deux cas.

A.1.b L'ensemble B appartient à la la tribu asymptotique, il est donc de probabilité 0 ou 1. Dans le second cas, pour tout $\epsilon > 0$, la suite $\mathbb{P}(|Y_n - \alpha| > \epsilon)$ tend vers 0 puisque la convergence p.s. implique la convergence en probabilité . Or cette suite est constante, égale à $\mathbb{P}(|Y - \alpha| > \epsilon)$ et donc $\mathbb{P}(|Y - \alpha| > \epsilon) = 0$ pour $\forall\epsilon > 0$. Il s'en suit que dans ce cas, Y est p.s. égale à α, mais on remarque qu'alors nécessairement, $\alpha \ne 0$ puisque Y n'est pas p.s. nulle.

A.1.c. Sur $(T = \infty)$, on a $Z_n = X_n$ qui converge donc p.s vers une limite finie et par conséquent $Y_n - \alpha = Z_n - Z_{n-1}$ tend vers 0. Lorsque $\mathbb{P}(B) = 0)$ on a $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$. Dans l'autre cas, i.e. $\mathbb{P}(B) = 1$, alors $S_n = n\alpha$ et T est bien sûr p.s. fini puisque $\alpha \ne 0$.

A.2. $Y_n = S_n - S_{n-1}$ par conséquent sur $((S_{n-1} \in I) \cap (S_n \in I))$, Y_n s'écrit comme différence de deux éléments de I et donc $|Y_n| \le c$ d'où $Y_n = Y'_n$. Il s'en suit que $(T > n) = (S_1 \in I, S_2 \in I, \ldots, S_n \in I) = (S_1 \in I, S_2 \in I, \ldots, S_n \in I, Y_1 = Y'_1, Y_2 = Y'_2, \ldots, Y_n = Y'_n) \subset (T' > n)$.

A.3. $(T = \infty) = \cap_n (T > n) \subset \cap_n (T' > n) = (T' = \infty)$. On a prouvé que $\mathbb{P}(T'_n = \infty) = 0$ dans la question précédente car Y' est bornée et non p.s. constante, d'où le résultat demandé. Celui-ci est évident si l'on suppose Y intégrable et $\mathbb{E}(Y) \ne 0$, car alors, d'après la loi forte des grands nombres, on a $S_n \to \infty$ p.s. ou $S_n \to -\infty$ p.s., suivant que $\mathbb{E}(Y) > 0$ ou $\mathbb{E}(Y) < 0$.

B.1. On considère la filtration $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$ et pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_k)_{k \leq n}$. Puisque X_n est un produits de variables aléatoires indépendantes intégrables, X_n est lui-même intégrable et de la relation $X_{n+1} = X_n \exp(Y_{n+1})/\rho$ on déduit que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \mathbb{E}(\exp(Y_{n+1})/\rho|\mathcal{F}_n) = X_n \mathbb{E}(\exp(Y_{n+1})/\rho) = X_n$, puisque X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable et Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$.

B.2. Soit μ la loi de Y et Δ_n la région de $\mathbb{R}^n$ définie par $(y_1 \in I, y_1 + y_2 \in I, \ldots, y_1 + y_2 + \ldots + y_n \in I)$. On a $\mathbb{P}(\widetilde{T} > n) = \int_{\Delta_n} \exp(y_1 + \ldots + y_n)/\rho^n \, d\mu(y_1) \ldots d\mu(y_n) = \int_{T>n} X_n \, d\mathbb{P}$.

B.3. En considérant la martingale $X_{n \wedge T}$ on obtient $\mathbb{E}(X_{n \wedge T}) = \mathbb{E}(X_0) = 1$. D'autre part, $\mathbb{E}(X_{n \wedge T}) = \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_{\{T \leq n\}}) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{T > n\}})$. Le terme $\mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_{\{T \leq n\}})$ tend en croissant vers $\mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_{\{T < \infty\}}) = \mathbb{E}(X_T)$ par le théorème de limite croissante, et le dernier terme tend vers 0 d'après la question précédente et le résultat $A.3$. appliqué à la suite $\widetilde{Y}_n$.

B.4. Dans ce cas $\rho = (e^b - e^{-b})/2b = \mathrm{sh}(b)/b > 1$. Or $\log(X_n)/n = S_n/n - \log(\rho)$. D'après la loi forte des grands nombres S_n/n tend p.s. vers 0 et on sait que $\log(\rho) > 0$. On en conclut que X_n tend p.s. vers $X_\infty = 0$. La martingale n'est donc pas régulière puisqu'elle ne converge pas dans L^1 vers 0. Pour pouvoir appliquer un théorème d'arrêt, il faudrait soit T borné, ce qui n'est certainement pas le cas, soit $X_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ avec $Z \geq 0$ ou intégrable. Mais dans ce cas, on sait que l'on a aussi $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ ce qui est manifestement faux. On a $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_0^2) + \mathbb{E}(A_n) = 1 + \mathbb{E}(A_n)$. Or $\mathbb{E}(X_n^2)$ tend vers $+\infty$ car c'est une suite croissante et la martingale X_n n'est certainement pas bornée dans L^2 (sinon elle serait régulière). On a donc $\mathbb{E}(A_\infty) = +\infty$ d'après le théorème de limite croissante.

EXERCICE II

1. On sait que pour $f \geq 0$, $\mathbb{E}_\mu(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = Qf(X_n)$. Or ici $Qf(x) = \lambda(f)\mathbb{1}_{\{x=0\}} + \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}(\sum_{k=0}^{x-1} f(k))/x$. Par conséquent $\mathbb{E}_\mu(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = (\rho + 1/2)\mathbb{1}_{\{X_n = 0\}} + (X_n - 1)/2$.

2. Si $y < x$ alors $Q(x, y) = 1/x > 0$. Si $y \geq x$, on choisit $z > y$ avec $\lambda(z) > 0$ (un tel point existe toujours puisque λ a un support infini), le chemin $x \to 0 \to z \to y$ est alors de probabilité $\lambda(z)/(xz)$ qui est strictement positive. La chaîne est donc irréductible.

3. Soit $z > 1$ avec $\lambda(z) > 0$. Les chemins $0 \to z \to 0$ et $0 \to z \to z - 1 \to 0$ sont de probabilité strictement positive. On en déduit que $Q^2(0, 0) > 0$ et $Q^3(0, 0) > 0$. La période de 0 est donc 1, et puisque la chaîne est irréductible, elle est apériodique.

4. Partant de $x \geq 1$, la suite X_n est strictement décroissante jusqu'à l'instant T_0 et par conséquent $\mathbb{P}_x(T_0 \leq x) = 1$ (même pour $x = 0$). On en déduit que $f(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < \infty) \equiv 1$ et par conséquent $g(x) = \mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = Qf(x) \equiv 1$. On a donc $g(0) = \mathbb{P}_0(S_0 < \infty) = 1$ ce qui prouve que le point 0 est récurrent et que la chaîne est donc récurrente. La relation $\mathbb{P}_x(T_0 \leq x) = 1$ implique aussi que $h(x) = \mathbb{E}_x(T_0) \leq x$ et que donc $\mathbb{E}_0(S_0) = 1 + Qh(0) = 1 + \lambda(h) \leq 1 + \rho$. La condition $\rho < \infty$ implique donc bien la récurrence positive.

5. La fonction $u(x) = \mathbb{E}_x(T_0)$ est la plus petite solution positive de $u(0) = 0$ et $u(x) = 1 + Qu(x)$ si $x \geq 1$ soit encore $u(x + 1) = 1 + (u(1) + \ldots + u(x))/(x + 1)$ pour $x \geq 0$.

Ce système n'a qu'une solution que l'on calcule de proche en proche, et si l'on suppose que $u(y) = \sum_{k=1}^{y} 1/k$ pour $y \leq x$ alors $u(x+1) = 1 + \{\sum_{y=1}^{x}(\sum_{k=1}^{y} 1/k)\}/(x+1) = 1 + \{\sum_{k=1}^{x}(x-k+1)/k\}/(x+1) = 1 + (\sum_{k=1}^{x} 1/k) - x/(x+1) = \sum_{k=1}^{x+1} 1/k$, donc $u(y)$ est encore donné par la même formule pour $y = x+1$. En reprenant le calcul ci dessus, on obtient que 0 est récurrent positif si et seulement si $Qu(0) = \sum_{x=1}^{\infty} u(x)\lambda(x) < \infty$. Or $u(x) \sim \log(x)$.

6. On a $\lambda(x) = 1/x - 1/(x+1)$, d'où $\sum_{k=1}^{n} \lambda(k) = 1 - 1/(n+1)$ et donc $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(k) = 1$, i.e. λ est bien une probabilité . De plus, $\mathbb{E}_0(S_0) = 1 + \sum_{x\geq 1} \lambda(x)u(x) = 1 + \sum_{x\geq 1} \lambda(x)(\sum_{k\leq x} 1/k) = 1 + \sum_{k\geq 1} 1/k(\sum_{x\geq k} \lambda(x)) = 1 + \sum_{k\geq 1} 1/k^2$. On en déduit que $\mathbb{E}_0(S_0) = 1 + \pi^2/6$ et que l'on est bien dans le cas récurrent positif (ce que l'on savait par le résultat de 5.). La probabilité invariante π vérifie $\pi(0) = 1/\mathbb{E}_0(S_0)$, et la chaîne étant apériodique, on a stabilisation, i.e. la suite $\mathbb{P}_\mu(X_n = y)$ converge vers $\pi(y)$, en particulier, $\lim \mathbb{P}_\mu(X_n = 0) = \pi(0) = 1/(1 + \pi^2/6)$.

EXERCICE III

1. Le processus $X_n^{(x)}$ est une chaîne de Markov issue de x et de transition Q, par conséquent $Q^n(x,y) = \mathbb{P}(X_n^{(x)} = y) = \mathbb{P}(S_n = y - x)$. On en déduit que $U(x,y) = \sum_n \mathbb{P}(S_n = y - x)$. Par conséquent, $U(x,y) = U(x+z, y+z)$. En choisissant $z = -y$ on obtient $U(x,y) = U(x-y, 0)$ et cette dernière quantité est majorée par $U(0,0)$ d'après le principe du maximum.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leq m) = \sum_{y=-m}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = y) = \sum_{y=-m}^{m} U(0,y) \leq (2m+1)U(0,0)$

3. La fonction $t \hookrightarrow u_n(t)$ est croissante en t et pour $0 \leq n \leq mA$ on a $m \geq n/A$ donc $u_n(m) \geq u_n(n/A)$.

4. Soit A un entier ≥ 1 fixé. On peut écrire:
$U(0,0) \geq \Big(\sum_{n=0}^{mA} u_n(m)\Big)/(2m+1) \geq \dfrac{mA+1}{2m+1}\Big(\sum_{n=0}^{mA} u_n(n/A)\Big)/(mA+1)$
Or si S_n/n tend vers 0 en probabilité , la suite $u_n(n/A) = \mathbb{P}(|S_n|/n \geq 1/A)$ tend donc vers 1 et il en est de même de sa moyenne c'est à dire que $\lim_{m\to\infty}\Big((\sum_{n=0}^{mA} u_n(n/A))/(mA+1)\Big) = 1$. Par conséquent on obtient, en passant à la limite sur m, que $U(0,0) \geq A/2$ pour tout entier A et donc $U(0,0) = +\infty$, i.e. 0 est récurrent. Ceci reste bien sûr vrai si Y est intégrable et de moyenne nulle, puisqu'alors S_n/n tend vers 0 p.s. et de plus, la relation $U(x,x) = U(0,0)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, montre qu'en fait tout point $x \in \mathbb{Z}$ est récurrent.