# Université Pierre et Marie Curie
# Master de Mathématique
# 2006-2007

## Textes d'examens de Probabilités Approfondies (2001-2006)

### 1. Partiels

#### 1.1. Année universitaire 01-02

**19 Novembre 2001**

PROBLEME I

Soient $X, Y, Z$, des variables aléatoires indépendantes, $X$ et $Y$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ (c'est à dire de densité $\theta \exp(-\theta x) \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}^+\}}(x)$) et $Z$ prenant les valeurs $\pm 1$ avec la probabilité $1/2$. On pose $U = X - Y$, $V = XZ$, $W = YZ$.

**1.** Calculer l'espérance et la matrice de covariance du vecteur $(U, V, W)$. Les variables aléatoires $U$ et $V$ sont-elles indépendantes?

On considère maintenant des variables aléatoires $X_k, Y_k, Z_k$, $k \geq 1$, toutes indépendantes, les $X_k$ et $Y_k$ de même loi que $X$ et $Y$, les $Z_k$ de même loi que $Z$. On pose:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k) \quad , \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} X_k Z_k \quad , \quad W_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k Z_k$$

**2.** Trouver la limite en loi de la suite de vecteurs tridimensionnels $(U_n, V_n, W_n)/\sqrt{n}$.

## PROBLEME II

*Les question 3,4,5 sont indépendante du reste du problème.*

On considère des variables aléatoires $X, Y, Z$ telles que la loi du couple $(X, Z)$ soit identique à la loi du couple $(Y, Z)$. Soit $f$ une fonction réelle telle que $f(X)$ soit intégrable.

**1.** Montrer que $f(Y)$ est aussi intégrable et que $\mathbb{E}(f(X)|Z) = \mathbb{E}(f(Y)|Z)$.

Soit $(X_k;\ k = 1 \ldots n)$, $n \geq 2$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi , réelles et intégrables. On pose $T = \sum_{k=1}^n X_k$.

**2.** Montrer que $\mathbb{E}(X_1|T) = \dfrac{T}{n}$. Que vaut $\mathbb{E}(T|X_1)$ ?

On suppose maintenant que la loi commune des $X_k$ est une loi gaussienne centrée réduite.

**3.** Calculer la projection orthogonale de $X_1$ sur $T$ dans $L^2$. En déduire la loi conditionnelle de $X_1$ sachant que $T = t$.

**4.** Retrouver ce résultat par un calcul de densités.

**5.** Trouver, par une méthode analogue à **3.**, la loi du couple $(X_1, X_2)$ sachant que $T = t$. Cette loi a-t-elle toujours une densité sur $\mathbb{R}^2$ ?

## PROBLEME III

Préambule: *Soit $Z_n$ une suite de variables aléatoires réelles et $A_n$ une suite d'événements. Montrer que l'une ou l'autre des conditions suivantes implique la convergence en probabilité vers zéro de la suite $Z_n \mathbb{1}_{\{A_n\}}$:*

**i)** *La suite $Z_n$ tend vers 0 en probabilité .*

**ii)** *La suite $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers 0.*

Soit $X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et $b_n$ une suite de réels positifs qui tend vers $+\infty$. On pose alors pour $k = 1, \ldots, n$:

$$X'_{(n,k)} = X_k \ \text{ si } \ |X_k| \leq b_n, \qquad X'_{(n,k)} = 0 \ \text{ si } \ |X_k| > b_n$$

et on suppose que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > b_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X'_{(n,k)}|^2))/b_n^2 = 0, \qquad (\clubsuit)$$

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_n$, $S'_n = \sum_{k=1}^n X'_{(n,k)}$ et $a_n = \mathbb{E}(S'_n)$. Montrer que:

**1.** La suite $\dfrac{S'_n - a_n}{b_n}$ tend vers 0 en probabilité .

**2.** On pose $A_n = \{S'_n \neq S_n\}$. Montrer que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$.

**3.** En déduire:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{en probabilité}$$

**Application:**
Une partie dans un casino est constituée d'une suite de tirages de pile ou face équiprobables et si le premier face apparaît à l'instant $k$ le joueur gagne $2^k$ francs et la partie se termine. On note par $X_n$ ($n \geq 1$) les gains d'un joueur au cours de parties successives (on remarquera que les $X_n$ ont la même loi).

**4.** Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

**5.** Montrer que la suite $X_n$ satisfait aux conditions (♣) avec $b_n = n\log_2(n)$

**6.** En déduire la limite en probabilité de la suite $\dfrac{S_n}{n\log_2(n)}$.

En déduire qu'il est impossible de fixer le prix d'une partie de façon à obtenir un jeu équitable.

## Corrigé

PROBLEME I

**1**. On vérifie rapidement que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1/\theta$, que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 2/\theta^2$ et que $\mathbb{E}(Z) = 0$, $\mathbb{E}(Z^2) = 1$. On en conclut que $\mathbb{E}(U) = 0$, $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = 0$, de même $\mathbb{E}(W) = 0$, le vecteur est donc centré. Ensuite on a $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 2/\theta^2$, $\mathrm{Var}(V) = \mathbb{E}(X^2Z^2) = \mathbb{E}(X^2) = 2/\theta^2$ et de même $\mathrm{Var}(W) = 2/\theta^2$. Pour les covariances, $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}((X-Y)XZ) = \mathbb{E}((X-Y)X)\mathbb{E}(Z) = 0$, de même pour $\mathrm{Cov}(U,W)$. Par contre $\mathrm{Cov}(V,W) = \mathbb{E}(XYZ^2) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 1/\theta^2$. La matrice de covariance est donc $K = 1/\theta^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les variables aléatoires $U$ et $V$ ne sont pas indépendantes puisque par exemple $\mathbb{E}(UV^2) = \mathbb{E}((X-Y)X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X^2) = 4/\theta^3$ alors que $\mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V^2) = 0$

**2**. Le vecteur $(U_n, V_n, W_n)$ est la somme de $n$ vecteurs indépendants et de même loi que $(U,V,W)$. Le T.C.L. implique donc la convergence en loi vers une loi gaussienne centrée sur $\mathbb{R}^3$ et de matrice de covariance $K$.

PROBLEME II

**1**. Puisque $(X,Z)$ et $(Y,Z)$ ont même loi, il en est de même pour $X$ et $Y$ par conséquent $f(Y)$ est aussi intégrable. On sait que $\mathbb{E}(f(X)|Z) = \Phi(Z)$ où $\Phi$ est définie comme la $\mathbb{P}_Z$ classe d'équivalence de fonctions mesurables sur l'espace des valeurs de $Z$ vérifiant

$$\int \Psi(z)\Phi(z)\, d\mathbb{P}_Z(z) = \int f(x)\Psi(z)\, d\mathbb{P}_{(X,Z)}(x,z)$$

pour toute fonction $\Psi$ mesurable bornée. On peut bien sûr remplacer $f(x)$ par $f(y)$ et $\mathbb{P}_{(X,Z)}$ par $\mathbb{P}_{(Y,Z)}$ ce qui montre que c'est aussi la relation définissant $\mathbb{E}(f(Y)|Z)$.

**2**. La loi de $(X_k, T)$ ne dépend pas de $k$. Par conséquent $T = \mathbb{E}(T|T) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k|T) = n\mathbb{E}(X_1|T)$. D'autre part $\mathbb{E}(T|X_1) = \mathbb{E}(X_1|X_1) + \sum_{k=2}^n \mathbb{E}(X_k|X_1) = X_1 + (n-1)\mathbb{E}(X_1)$.

**3**. Le vecteur $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est gaussien, il en est donc de même de son image linéaire $(X_1, T)$. D'autre part la projection $\widehat{X_1}$ de $X_1$ sur $T$ s'écrit $\widehat{X_1} = \rho T$ avec $X_1 - \widehat{X_1}$ othogonal à $T$ c'est à dire $\mathrm{Cov}(X_1, T) = \rho \mathrm{Var}(T)$ soit $1 = \rho n$. On en déduit $\rho = 1/n$. De plus la loi de $(X_1|T = t)$ est la loi de $\rho t + X_1 - \widehat{X_1}$ soit une loi gaussienne $G(t/n, 1 - 1/n)$.

**4**. La loi du couple $(X_1, T)$ est une loi gaussienne centrée de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ elle admet donc la densité $h(x_1, t) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{n-1}} \exp(-\frac{1}{2(n-1)}(nx_1^2 + t^2 - 2x_1 t))$. La variable aléatoire $T$ possède la densité $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-t^2/2n)$ et l'on retrouve bien le résultat $n(x_1, t) = h(x_1, t)/\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-1/n)}} \exp(-\frac{1}{2(1-1/n)}(x_1 - t/n)^2)$

**4**. On a bien sûr $\widehat{X_2} = T/n$ et par conséquent $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T/n \\ T/n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 - T/n \\ X_2 - T/n \end{pmatrix}$. La loi de $(X_1, X_2)|T = t)$ est donc la loi gaussienne dans $\mathbb{R}^2$ d'espérance $\begin{pmatrix} t/n \\ t/n \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $K = \begin{pmatrix} 1 - 1/n & -1/n \\ -1/n & 1 - 1/n \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant $1 - 2/n$ n'est pas nul, soit $n \geq 3$.

## PROBLEME III

**Préambule.** Pour $\epsilon > 0$ on a $(|Z_n \mathbb{1}_{\{A_n\}}| > \epsilon) \subset ((|Z_n| > \epsilon) \cap (A_n))$.

**1**. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev on a:

$$\mathbb{P}(|\frac{S'_n - a_n}{b_n}| > \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(S'_n)}{\epsilon^2 b_n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X'_{(n,k)})}{\epsilon^2 b_n^2} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X'_{(n,k)})^2)}{\epsilon^2 b_n^2}$$

et cette dernière quantité tend vers zéro par hypothèse.

**2**. On a $A_n \subset \bigcup_{k=1}^n (|X_k| > b_n)$ et donc $\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k| > b_n)$ et cette dernière quantité tend vers zéro par hypothèse.

**3**. Il suffit d'écrire:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \frac{S'_n - a_n}{b_n} \mathbb{1}_{\{S'_n = S_n\}} + \frac{S_n - a_n}{b_n} \mathbb{1}_{\{S'_n \neq S_n\}}$$

et d'appliquer les deux résultats ci dessus ainsi que le préambule.

**Application**

On remarque que la variable aléatoire $X$ prend les valeurs $x_k = 2^k$, $k \geq 1$ avec la probabilité $p_k = 2^{-k}$.

**4**. $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = +\infty$

**5**. On a:

$$\mathbb{P}(X > b_n) = \sum_{k\geq 1\ ;\ 2^k > b_n} 2^{-k} \leq 2/b_n$$

Or $\lim(n/b_n) = 0$. On a donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k| > b_n) = 0$. De même:

$$\mathbb{E}(X^2 > \mathbb{1}_{\{X\leq b_n\}}) = \sum_{k\geq 1\ ;\ 2^k \leq b_n} 2^k \leq 2b_n - 1$$

Or $\lim(n(2b_n - 1)/b_n^2) = 0$. On a donc $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X'_{(n,k)}|^2))/b_n^2 = 0$

**6**. Pour pouvoir appliquer le résultat principal, il faut calculer $a_n$, or:

$$a_n = \mathbb{E}(S'_n) = n\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X\leq b_n\}}) = \sum_{k\geq 1\ ;\ 2^k\leq b_n} 1 = n[\log_2(b_n)]$$

où $[x]$ représente la partie entière de $x$. Or $\lim(n[\log_2(b_n)]/b_n) = 1$. On en conclut donc que la limite demandée vaut 1. Il n'est bien sûr pas possible de fixer le prix $\alpha$ d'une partie, de façon à ce que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n - n\alpha}{b_n} = 0$. Par contre on peut fixer un prix "variable" $\alpha_n$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \sim b_n$ par exemple en prenant $\alpha_1 = b_1 = 0$ puis $\alpha_n = b_n - b_{n-1}\ldots$

## 1.2. Année universitaire 02-03

**18 Novembre 2002**

PROBLEME I

Préambule: *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_n\ ;\ n \geq 0)$, $X_n$ *un processus réel, adapté à cette filtration et de carré sommable. On pose* $H_n = L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ *et pour* $n \geq 1$, *on définit* $Z_n = X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$.

**i)** *Montrer que la suite* $Z_n$ *est centrée, que* $Z_n \in H_n$ *et que* $Z_n$ *est orthogonale à* $H_{n-1}$.

**ii)** *Montrer que la suite* $Z_n$ *est orthogonale, c'est à dire que pour* $m \neq n$ *on a* $E(Z_nZ_m) = 0$.

*Soit* $M$ *une matrice de transition sur l'espace à deux éléments* $E = \{0,1\}$ *et* $f$ *la fonction définie sur* $E$ *par* $f(x) = x$. *Montrer que:*

**iii)** $Mf(x) = M(x, 1) = xM(1, 1) + (1 - x)M(0, 1)$

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, de loi initiale $\mu$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec des réels $a$ et $b$ strictement compris entre 0 et 1.

1. Pour $n \geq 1$, calculer l'espérance conditionnelle $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$. En déduire que la suite $X_n$ satisfait une relation du type

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \beta + Z_n$$

où $Z_n$ est une suite de variables aléatoires centrées et orthogonales. Donner l'expression de $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $a, b$.

2. On pose $m_n = \mathbb{E}(X_n)$. Calculer $m_n$ par récurrence en fonction de $n, a, b, \mu$.

3. Pour $p \geq 0$, calculer $K(n, n+p) = \mathbb{E}(X_n X_{n+p})$ en fonction de $Q^p$ et de $m_n$.

4. On dit que le processus $X_n$ est stationnaire si la suite $m_n$ est constante et si $K(n, n+p)$ ne dépend pas de $n$. Montrer qu'il n'existe qu'une seule loi $\mu$ pour laquelle le processus $X_n$ est stationnaire. Montrer qu'alors cette loi est invariante, c'est à dire vérifie $\mu Q = \mu$.

5. Montrer que pour une loi initiale $\mu$ quelconque, le processus $X_n$ se comporte comme un processus stationnaire lorsque $n$ tend vers $\infty$.

## PROBLEME II

Soient $X$ et $T$ deux variables aléatoires réelles. On suppose que $T$ suit une loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ de densité $\mathbb{1}_{\{t>0\}} \exp(-t)$ et que la loi conditionnelle de $(X|T=t)$ est une loi normale centrée, de variance $2t$. On se propose de trouver la loi de $X$.

1. Comment obtiendrait-on la loi de $X$ par un calcul direct de densité? Cette procédure vous paraît-elle praticable?

2. Calculer $\mathbb{E}(e^{isX}|T=t)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

3. En déduire $\mathbb{E}(e^{isX})$ puis la loi de $X$.

## PROBLEME III

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ de densité $\mathbb{1}_{\{x>0\}}\lambda e^{-\lambda x}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(e^{-X})$ et $\int_{X>a} X \, d\mathbb{P}$.

2. On considère maintenant une suite $X_n$ de variables aléatoires indépendantes, $X_n$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$. Dans la suite on posera $S_n = \sum_{k=1}^n X_k,\ S_\infty = \sum X_n = \lim \uparrow S_n$. Montrer que:

$$\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}((S_\infty) < \infty) = 1$$

3. Calculer $\mathbb{E}(e^{-S_\infty})$. En déduire que:

$$\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty \Longrightarrow \mathbb{P}((S_\infty) < \infty) = 0$$

4. Quel rapport ce résultat a-t-il avec la loi du $(0, 1)$ ?

5. Montrer que la famille $X_n$ est uniformément intégrable si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que $\lambda_n \geq c$. Pour établir que cette condition est suffisante on pourra étudier la fonction $\varphi(\lambda) = \int_{X>a} X \, d\mathbb{P}$.

6. On pose $Z_n = \inf_{k=1,\ldots,n} X_k$ et on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\lambda_n \geq c$. Montrer que $Z_n$ converge presque sûrement vers 0. Proposer une condition plus faible sur la suite $\lambda_n$ assurant cette convergence.

## Corrigé

PROBLEME I

**Préambule.**

**i**) On a $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n) = 0$ donc la suite $Z_n$ est centrée. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$ est la projection orthogonale de $X_n$ sur $H_{n-1}$ et donc $Z_n \perp H_{n-1}$. La suite $H_n$ est croissante et de plus $X_n \in H_n$ et $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \in H_{n-1}$. Il en résulte que $Z_n \in H_n$.

**ii**) Supposons par exemple $m > n$, soit $m - 1 \geq n$. D'après la question précédente on a $Z_m \perp H_{m-1}$ et donc $Z_m \perp H_n$ puisque $H_n \subset H_{m-1}$. Il suffit alors d'utiliser le fait que $Z_n \in H_n$ pour obtenir $Z_m \perp Z_n$.

**iii**) Par définition $Mf(x) = \sum_{y\in E} M(x, y)f(y) = M(x, 1)$. On vérifie ensuite que la seconde égalité est satisfaite pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

**Problème.**

**1**. On sait que $E(f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = Qf(X_{n-1})$. En appliquant la formule établie au (iii) du préambule on obtient que $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}Q(1, 1)+(1-X_{n-1})Q(0, 1) = \alpha X_{n-1}+\beta$ avec $\alpha = a + b - 1$ et $\beta = 1 - a$. Il suffit alors d'appliquer (i) et (ii) pour obtenir que la suite $Z_n$ est centrée et orthogonale.

**2**. D'après l'énoncé on a $0 < a + b < 2$ et donc $|\alpha| < 1$. La solution de l'équation de récurrence $m_n = \alpha m_{n-1} + \beta$ est donc $m_n = \lambda\alpha^n + c$ avec $c = \dfrac{1 - a}{2 - (a + b)}$, où $\lambda$ est une constante déterminée par la condition initiale $m_0 = \lambda + c = \mu(1)$. En définitive on obtient donc: $m_n = (\mu(1) - c)(a + b - 1)^n + c$

**3**. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n X_{+p}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n X_{n+p}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{E}(X_{n+p}|\mathcal{F}_n)) \\
&= \mathbb{E}(X_n(X_n Q^p(1, 1) + (1 - X_n)Q^p(0, 1))) = Q^p(1, 1)\mathbb{E}(X_n) = Q^p(1, 1)m_n
\end{aligned}$$

car $X_n(1 - X_n) = 0$ et $X_n^2 = X_n$.

**4**. Pour que $m_n$ soit constante il faut et il suffit que $\mu(1) = c$ et alors $m_n = c$ et la quantité $K(n, n + p)$ ne dépend pas de $n$. Par conséquent la probabilité $\mu$ est complétement déterminée puisqu'alors $\mu(0) = 1 - c = \dfrac{1-b}{2-(a+b)}$. La vérification de la relation $\mu = \mu Q$ est immédiate.

**5**. Si on revient au cas général, on voit que $\lim_n m_n = c$ car $|\alpha| = |a+b-1| < 1$ et que donc $\lim_n K(n, n+p) = cQ^p(1,1)$. On retouve donc le régime stationnaire pour "$n$ grand"...

PROBLEME II

**1**. La densité de la loi de $(X|T=t)$ est donnée par $\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$ et la densité de la loi de $T$ est $\mathbb{1}_{\{t>0\}} e^{-t}$. On obtiendrait donc la densité de $X$ en intégrant en $t$ la densité du couple $(X,T)$ qui est le produit des deux densités précédentes c'est à dire $\int_0^\infty \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-t-x^2/4t}\, dt$. Cette intégrale ne se calcule que par une méthode de résidu relativement difficile à mettre en œuvre.

**2**. $\mathbb{E}(e^{isX}|T=t)$ représente la fonction caractéristique de la loi de $(X|T=t)$ soit $e^{-ts^2}$.

**3**. $\mathbb{E}(e^{isX}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{isX}|T=t)) = \int_0^\infty e^{-ts^2-t}\, dt = \dfrac{1}{1+s^2}$. Par conséquent la densité de $X$ est donnée par la formule d'inversion de Fourier soit:

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{-isx}}{1+s^2}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{isx}}{1+s^2}\, ds = e^{-|x|}/2$$

puisque l'on sait que la loi de Cauchy a pour fonction caractéristique $u \hookrightarrow e^{-|u|}$ (ceci fournit la réponse au calcul de l'intégrale dans **1.**).

PROBLEME III

**1**. Un simple calcul de primitives fournit:

$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda,\ \mathbb{E}(e^{-X}) = \lambda/(1+\lambda),\ \int_{X>a} X\, d\mathbb{P} = e^{-a\lambda}(a + 1/\lambda)$$

**2**. On a $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\lambda_k}$ et par le théorème de limite monotone $\mathbb{E}(S_\infty) = \sum \dfrac{1}{\lambda_n}$. Si cette dernière série est convergente, la variable aléatoire $S_\infty$ est intégrable et elle est donc presque sûrement finie.

**3**. Les variables aléatoires $X_n$ étant indépendantes on a $\mathbb{E}(e^{-S_n}) = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}$ et par le théorème de limite monotone, $\mathbb{E}(e^{-S_\infty}) = \lim_n \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}$. Or le fait que la série $1/\lambda_n$ soit divergente implique que le produit infini ci dessus tend vers 0. En effet $-\log(\prod_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}) = \sum_{k=1}^n \log(1 + 1/\lambda_k)$. Si la suite $1/\lambda_k$ ne tend pas vers 0 cette série est divergente et si $\lambda_k \to 0$ son terme général est équivalent à $1/\lambda_k$ qui est le terme général d'une série divergente. On a donc dans tous les cas $\mathbb{E}(e^{-S_\infty}) = 0$ et par conséquent $S_\infty = +\infty$ presque sûrement.

**4**. On note $A = \{S_\infty < \infty\}$. Pour tout $n$, la convergence de la série $S_\infty$ ne dépend que des $(X_k\ ;\ k \geq n)$. L'ensemble $A$ est donc mesurable par rapport à $\beta_n = \sigma(X_k\ ;\ k \geq n)$ pour tout $n$ et donc par rapport à $\beta_\infty = \cap_n \beta_n$. La loi du $(0,1)$ nous dit que $A$ est donc de probabilité 0 ou 1 ce que l'on retrouve bien ci dessus.

**5**. Si la suite $X_n$ est unifomément intégrable elle est bornée dans $L^1$. Il existe donc une constante finie $K$ telle que $\mathbb{E}(X_n) = 1/\lambda_n \leq K$ et donc $\lambda_n \geq 1/K = c$. Pour établir la condition suffisante on remarque que la fonction $\varphi(\lambda)$ est manifestement décroissante. On a donc:

$$\sup_n \int_{X_n > a} X_n \, d\mathbb{P} = \sup_n \varphi(\lambda_n) \leq \varphi(c) = e^{-ac}(a + 1/c)$$

Or cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $a \to \infty$, il en résulte que la suite $X_n$ est unifomément intégrable d'après la définition. (On peut aussi obtenir ce résultat en utilisant le fait que la suite $X_n$ est alors bornée dans $L^2$ puisque $\mathbb{E}(X_n^2) = 2/\lambda_n^2$).

**6**. Soit $\epsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}(Z_n > \epsilon) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n (X_k > \epsilon)) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > \epsilon) = e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k}$$

Par conséquent si $\lambda_n \geq c$ on obtient $\mathbb{P}(Z_n > \epsilon) \leq e^{-nc} = (e^{-c})^n$ et cette dernière série est convergente puisque $e^{-c} < 1$. Ceci assure la convergence presque sûre de $Z_n$ vers 0. En appliquant le critère de Cauchy pour les séries numériques convergentes, on voit qu'il suffit que $\overline{\lim}_n (e^{-(\sum_{k=1}^n \lambda_k)/n}) < 1$ soit encore $\underline{\lim} \, (\sum_{k=1}^n \lambda_k)/n) > 0$. Ceci se produit par exemple pour $\lambda_n = 1/n$ si $n$ pair et $\lambda_n = c$ pour $n$ impair qui ne vérifie pas la condition imposée dans cette question.

## 1.3. Année universitaire 03-04

**20 Novembre 2003**

PROBLEME I

Soit $U$ une variable aléatoire de loi exponentielle de densité $\exp(-u)\mathbb{1}_{\{u>0\}}$ et soit $U_n$, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $U$. On considère la suite $S_n$ définie par $S_0 = 0$ puis $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$ ainsi que la filtration $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(U_k \; ; \; k \leq n)$ pour $n \geq 1$. Soit $t$ un réel strictement positif fixé. On pose $X_n = (1+t)^n \exp(-tS_n)$

1. Vérifier que $\mathbb{E}(\exp(-tU)) = \dfrac{1}{1+t}$. Écrire $X_{n+1}$ en fonction de $X_n$ et $U_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_n^2)$. La suite $X_n$ est-elle bornée dans $L^1$ ? bornée dans $L^2$ ?
2. Montrer que la suite $\log(X_n)/n$ converge p.s. vers un réel $\ell$. Déterminer le signe de $\ell$ et en déduire la limite p.s. de $X_n$.
3. La suite $X_n$ converge-t-elle dans $L^1$? Est-elle uniformément intégrable?
4. On pose $Y_n = \sqrt{X_n}$. La suite $Y_n$ est-elle uniformément intégrable? cette suite converge-t-elle dans $L^1$ ?

5. Dans le cas $t = 1$, calculer explicitement (en fonction de $X_n$) la valeur de $\mathbb{E}(\sin(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)$.

## PROBLEME II

*Les questions 1. et 2. sont indépendantes du reste du problème*

Soit $U$ une variable aléatoire de Bernoulli avec $\mathbb{P}(U = 1) = p$, $\mathbb{P}(U = 0) = 1 - p = q$, $0 < p < 1$ et soit $U_n$, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $U$. On considère la suite $X_n$ définie par $X_0 = 0$ puis $X_{n+1} = U_{n+1}(1 + X_n)$ $(n \geq 0)$

1. Dire rapidement pourquoi $X_n$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \mathbb{N}$ et donner sa matrice de transition $Q(x, y)$.

2. Étudier l'existence d'une fonction $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $f(x_0) < \infty$, solution de l'équation

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x) + Qf(x), \qquad \forall x \in E$$

   et en déduire la valeur de $U(0, 0)$ (justifier votre réponse).

3. Soit $S_0$ le temps de retour dans le point 0 c'est à dire $S_0 = \inf\{n \geq 1; X_n = 0\}$. Calculer $\mathbb{P}(S_0 > n)$. En déduire $\mathbb{P}(S_0 < \infty)$.

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X_n > k) \leq p^{k+1}$. En déduire la limite p.s. de la suite $X_n/n$.

5. Soit $\psi_n(t) = \mathbb{E}(t^{X_n})$, $t \in [0,\ 1]$. Exprimer $\psi_{n+1}$ en fonction de $\psi_n$. En déduire $\psi_n(t)$ ainsi que la loi de $X_n$.

6. La suite $X_n$ est-elle uniformément intégrable?

## PROBLEME III

Soit $\rho$ un réel avec $\rho^2 \leq 1/2$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^3$, centré et de matrice de covariance:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho \\ 0 & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

(On admettra tout d'abord que $\Sigma$ est bien une matrice de covariance.) On note $T = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A = (a, b)$ telle que $Z = X_3 - AT$ et $T$ soient des variables aléatoires indépendantes (justifier votre réponse).

2. En écrivant $X_3 = Z+U$, calculer (en fonction de $X_1$ et $X_2$) $\mathbb{E}(X_3|T)$ puis $\mathbb{E}(X_3^2|T)$.

3. Montrer que $\rho^2 \leq 1/2$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma$ soit une matrice de covariance.

## Corrigé

PROBLEME I

**1**. $\mathbb{E}(\exp(-tU)) = \int_0^{+\infty} \exp(-tu)\exp(-u)\,du = \dfrac{1}{1+t}$ et $X_{n+1} = (t+1)X_n \exp(-tU_{n+1})$. Or $X_n$ et $U_{n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et par conséquent:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= (t+1)\mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(\exp(-tU_{n+1})) = \mathbb{E}(X_n) \\
\mathbb{E}(X_{n+1}^2) &= (t+1)^2\mathbb{E}(X_n^2)\mathbb{E}(\exp(-2tU_{n+1})) = \frac{(t+1)^2}{1+2t}\mathbb{E}(X_n^2) = \rho\mathbb{E}(X_n^2)
\end{aligned}$$

avec $\rho > 1$. On en déduit que $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = 1$ et $\mathbb{E}(X_n^2) = \rho^n\mathbb{E}(X_0^2) = \rho^n$. La suite $X_n$ est donc bornée dans $L^1$ mais non bornée dans $L^2$.

**2**. $\log(X_n)/n = \log(1+t) - tS_n/n$. Or, d'après la loi forte des grands nombres, la suite $S_n/n$ converge p.s. vers $\mathbb{E}(U) = 1$. Ceci implique que $\ell = \log(1+t) - t$ et cette dernière quantité est strictement négative. Il s'en suit que $\log(X_n)$ converge p.s. vers $-\infty$ et donc que $X_n$ converge p.s. vers 0.

**3**. Si l'on suppose que suite $X_n$ converge dans $L^1$ vers une variable aléatoire $Z$, alors $X_n$ converge en probabilité vers $Z$ et il existe donc une sous suite $X_{n_k}$ qui converge p.s. vers $Z$. On en déduit, d'après la question précédente, que $X_n$ converge dans $L^1$ vers 0. Or ceci est impossible puisque $1 = \mathbb{E}(X_n) \not\to \mathbb{E}(Z) = 0$. La suite $X_n$ n'est donc pas uniformément intégrable, car sinon elle devrait converger vers 0 dans $L^1$ d'après le théorème de Lebesgue généralisé.

**4**. $\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{E}(X_n) = 1$ et par conséquent la suite $Y_n$ est bornée dans $L^2$. Il s'en suit que cette suite est uniformément intégrable. De plus $Y_n = \sqrt{X_n}$ converge p.s. vers 0 et, d'après le théorème de Lebesgue généralisé, $Y_n$ converge dans $L^1$ vers 0 (ce qui peut aussi s'obtenir en montrant directement que $\mathbb{E}(Y_n) \to 0$).

**5**. Lorsque $t = 1$, $\sin(X_{n+1}) = \sin(2X_n\exp(-U_{n+1}))$. Or $X_n$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable et $U_{n+1}$ est indépendante de $\mathcal{F}_n$. On en déduit que $\mathbb{E}(\sin(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \varphi(X_n)$ avec

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \mathbb{E}\Big(\sin(2x\exp(-U_{n+1}))\Big) = \int_0^{+\infty} \sin(2x\exp(-u))\exp(-u)\,du \\
&= \left(\int_0^{2x} \sin(v)\,dv\right)/2x = (1-\cos(2x))/2x = \sin^2(x)/x
\end{aligned}$$

d'où la relation $\mathbb{E}(\sin(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \sin^2(X_n)/X_n$

PROBLEME II

**1**. La suite $U_n$ étant i.i.d. et indépendante de $X_0$ (qui est constant), on en déduit que la suite $X_n$ associée à une relation de récurrence de la forme $X_{n+1} = \varphi(X_n, U_{n+1})$ est une chaîne de Markov de transition $Q(x,y) = \mathbb{P}(U_{n+1}(x+1) = j)$. Les deux seuls termes non nuls sont donc $Q(x,0) = q$ et $Q(x,x+1) = p$. Autrement dit, partant de $x$, on avance d'un "cran" au point $x+1$ avec la probabilité $p$ ou bien on revient en 0 avec la probabilité $q$.

**2**. L'équation proposée s'écrit:

$$1 + qf(0) + pf(1) = f(0), \qquad qf(0) + pf(n+1) = f(n), \quad n \geq 1$$

Il est facile de constater que si $f(0) < +\infty$ alors $f(n) = f(0) - 1/p^n$ pour $n \geq 1$. La suite $p^n$ tend vers 0 et il n'est donc pas possible de trouver une solution positive avec $f(0) < +\infty$. Or on sait que la fonction $f(x) = U(x,0)$ est solution de cette équation. On a donc nécessairement $U(0,0) = +\infty$ (autrement dit, le point 0 est récurrent).

**3** On a $(S_0 > n) = (U_1 = 1, U_2 = 1, \ldots, U_n = 1)$ et donc $\mathbb{P}(S_0 > n) = p^n$. La suite $(S_0 > n)$ est décroissante et d'intersection $(S_0 = \infty)$. Il s'en suit que $\mathbb{P}(S_0 = \infty) = \lim \downarrow \mathbb{P}(S_0 > n) = 0$ et donc $\mathbb{P}(S_0 < \infty) = 1$ (on retrouve le fait que le point 0 est récurrent).

**4**. On a $X_n \leq n$ p.s. Il n'y a donc quelque chose à prouver que dans le cas $k < n$. On voit facilement que dans ce cas $(X_n > k) = (U_n = 1, \ldots, U_{n-k} = 1)$, et alors $\mathbb{P}(X_n > k) = p^{k+1}$. Par conséquent, pour tout réel $\epsilon > 0$ (en désignant par $[x]$ la partie entière de $x$ ):

$$\mathbb{P}(X_n > n\epsilon) = \mathbb{P}(X_n > [n\epsilon]) \leq p^{[n\epsilon]+1} \leq p^{n\epsilon}$$

Or la série $\sum_n p^{n\epsilon}$ est convergente (puisque $p^\epsilon < 1$) et donc $X_n/n$ converge p.s. vers 0.

**5**. Les variables aléatoires $X_n$ et $U_{n+1}$ sont indépendantes, d'où:

$$\psi_{n+1}(t) = \mathbb{E}(t^{U_{n+1}(1+X_n)}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{U_{n+1}=0\}} + t^{X_n+1}\mathbb{1}_{\{U_{n+1}=1\}}) = q + tp\psi_n(t)$$

En remarquant que $\psi_0(t) = 1$ on vérifie facilement par récurrence que:

$$\psi_n(t) = q\sum_{k=0}^{n-1} t^k p^k + p^n t^n$$

Il s'en suit que $X_n$ est à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ avec $\mathbb{P}(X_n = k) = qp^k$ si $0 \leq k < n$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = p^n$.

**6**. On a $\mathbb{E}(X_n^2) = q\sum_{k=0}^{n-1} k^2p^k + n^2p^n \leq q\sum_{k=0}^{\infty} k^2p^k + n^2p^n$. Or la série est convergente et la suite $n^2p^n$ qui tend vers 0 est nécessairement bornée. Il s'en suit que la suite $X_n$ est bornée dans $L^2$, donc uniformément intégrable.

## PROBLEME III

**1**. Le vecteur $(X1, X2, X3 - (aX_1 + bX_2))'$ est une image linéaire de $X$ et c'est donc un vecteur gaussien centré. Pour que $T$ et $X_3 - AT$ soient des variables aléatoires indépendantes , il suffit que $\mathrm{Cov}(X_3 - AT, T) = \mathbb{E}((X_3 - AT)T') = 0$. On obtient donc les deux relations:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_3 - aX_1 - bX_2)X_1) &= 0, \quad \text{soit} \quad \rho - a = 0 \\ \mathbb{E}((X_3 - aX_1 - bX_2)X_2) &= 0, \quad \text{soit} \quad \rho - b = 0 \end{aligned}$$

D'où $a = b = \rho$.

**2**. On pose $U = AT$. Alors les variables aléatoires $U$ et $Z$ sont indépendantes, et $U$ factorise à travers $T$. On en déduit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_3|T) &= \mathbb{E}(Z|T) + \mathbb{E}(U|T) = \mathbb{E}(Z) + U = U = \rho(X_1 + X_2) \\
\mathbb{E}(X_3^2|T) &= \mathbb{E}(Z^2|T) + 2\mathbb{E}(ZU|T) + \mathbb{E}(U^2|T) = \mathbb{E}(Z^2) + 2U\mathbb{E}(Z) + U^2 \\
&= 1 - 2\rho^2 + \rho^2(X_1 + X_2)^2
\end{aligned}$$

**3**. Pour que $\Sigma$ soit une matrice de covariance, il faut et il suffit qu'elle soit symétrique et de type positif. Cette dernière condition signifie que pour tout vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ on doit avoir $u'\Sigma u \geq 0$. Si le vecteur $u$ a pour composantes $x$, $y$ et $z$ on obtient:

$$u'\Sigma u = x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho xz - 2\rho yz = (x - \rho z)^2 + (y - \rho z)^2 + (1 - 2\rho^2)z^2$$

d'où la condition nécessaire et suffisante énoncée.

## 1.4. Année universitaire 04-05

**18 Novembre 2004**

PROBLEME I

*Les parties A et B sont indépendantes.*

Soit $\lambda$ un paramètre strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire $U$ suit une loi de type $\mathcal{T}(\lambda)$ si celle ci possède la densité $\mathbb{1}_{\{u\geq 1\}}\frac{\lambda}{u^{1+\lambda}}$. Dans la suite, on considérera une suite $U_n$, $n \geq 1$, de variables aléatoires indépendantes, $U_n$ suivant une loi de type $\mathcal{T}(\lambda_n)$.

A

1. Si U suit une loi de type $\mathcal{T}(\lambda)$ vérifier que $\mathbb{E}(\log(U)) = 1/\lambda$ et $\mathbb{E}(1/U) = \lambda/(1+\lambda)$.
2. On pose $X_n = \prod_{k=1}^n U_k$. Vérifier que la suite $X_n$ est p.s. croissante et p.s. $\geq 1$. On posera alors $X_\infty = \prod_{n\geq 1} U_n = \lim \uparrow X_n$.
3. Calculer $\mathbb{E}(\log(X_\infty))$. En déduire que: $\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}((X_\infty) < \infty) = 1$
4. Calculer $\mathbb{E}(1/X_\infty)$. En déduire que: $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty \Longrightarrow \mathbb{P}((X_\infty) < \infty) = 0$ (On pourra utiliser la relation évidente: $\lambda/(1+\lambda) = 1/(1+1/\lambda)$ et utiliser l'équivalence entre la convergence d'un produit infini et celle d'une série).

B

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ calculer $\mathbb{E}(U^\alpha)$. Préciser les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles cette espérance est finie.

2. En déduire qu'une condition suffisante pour que la suite $U_n$ soit uniformément intégrable est l'existence d'un nombre $c > 1$ tel que $\lambda_n \geq c$.

3. Montrer que la condition ci dessus est nécessaire.

4. Donner une condition suffisante (simple) assurant que la suite $U_n$ converge presque sûrement vers 1.

PROBLEME II

*Les questions 3 et 4 sont indépendantes de 1, 2.*

Soit $Y_n$, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\theta$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la filtration $\mathcal{F}_n$ définie par $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ pour $n \geq 1$. Soit $\tau$ un temps d'arrêt p.s fini pour cette filtration. On pose $Z_n = Y_{n+\tau}$ et soit $f_k$, $k \geq 1$, une famille de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$.

1. Pour un ensemble $F_n \in \mathcal{F}_n$ calculer la valeur de l'intégrale:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F_n\}} \prod_{k=1}^{p} f_k(Y_{n+k}))$$

en fonction de $\mathbb{P}(F_n)$ et des $\theta(f_k)$.

2. En déduire la valeur de

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F\}} \prod_{k=1}^{p} f_k(Z_k))$$

où $F \in \mathcal{F}_\tau$. Que peut-on en déduire pour la suite $Z_n$, $n \geq 1$ ?

3. On définit $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$ on pose $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. On suppose que les $Y$ sont de carré sommable et on pose $\mu = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$. Calculer $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$ en fonction de $S_n$, $\mu$ et $\sigma^2$.

4. On pose $W_n = S_{n\wedge\tau}^2$. Calculer $\mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ et montrer que dans le cas $\mu = 0$ on a $\mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq W_n$. Pour ce faire, on écrira $W_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} W_{n+1}\mathbb{1}_{\{\tau=k\}} + W_{n+1}\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}$

PROBLEME III

Soit $U_n$, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli prenant les valeurs 1 et $-1$ avec les probabilités respectives $p$ et $q$, ($p + q = 1, p \in ]0, 1[$). On considère aussi une variable aléatoire $X_0$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ , indépendante des $U_n$, et on construit la suite $X_n$ par la relation de récurrence $X_{n+1} = (X_n + U_{n+1})^+$ (où $x^+ = \sup(x, 0)$). On sait que $X_n$ est une chaîne de Markov à valeurs dans l'espace d'états $E = \mathbb{N}$.

1. Donner la probabilité de transition $Q(x, y)$ de cette chaîne .

2. Montrer que pour tout couple $(x, y)$ dans $E$, il existe $n \geq 0$ tel que $Q^n(x, y) > 0$.

3. On note $\Psi_n$ la fonction génératrice de $X_n$ c'est à dire la fonction définie pour $t \in [0,\ 1]$ par $\Psi_n(t) = \mathbb{E}(t^{X_n}) = \sum_{k \geq 0} t^k \mathbb{P}(X_n = k)$. Trouver une relation de récurrence liant $\Psi_{n+1}$ et $\Psi_n$ ( On distinguera les cas $t = 0$ et $t \neq 0$ et on remarquera que $\Psi_n(0) = \mathbb{P}(X_n = 0)$).

4. Soit $\pi$ une probabilité sur $E$, de fonction génératrice $\Psi$. Montrer que $\pi$ est solution de $\pi Q = \pi$ si et seulement si $\Psi(t)$ est point fixe de la relation fonctionnelle précédente, pour $0 < t < 1$. Examiner l'existence de cette probabilité $\pi$ et, lorsqu'elle existe, donner son expression.

5. Trouver les mesures positives $\mu$ sur $E$ vérifiant $\mu Q = \mu$. Peut-on toujours trouver une mesure de probabilité solution de cette équation? Comparer au résultat précédent.

## Corrigé

PROBLEME I

A

**1**. Par intégration par parties on obtient

$$\mathbb{E}(\log(U)) = \lambda \int_1^\infty \frac{\log(u)}{u^{\lambda+1}}\, du = [-u^{-\lambda}\log(u)]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{u^{\lambda+1}}\, du = 0 - [u^{-\lambda}/\lambda]_1^\infty = 1/\lambda$$

La seconde intégrale s'obtient par une primitive évidente.

**2**. On a $U_n \geq 1$ p.s. d'où le résultat.

**3**. la suite $\log(X_n) = \sum_{k=1}^n \log(U_k)$ est positive et croissante. Le théorème de limite monotone permet donc d'affirmer que $\mathbb{E}(\log(X_\infty)) = \lim_n \mathbb{E}(\log(X_n)) = \lim_n \sum_{k=1}^n 1/\lambda_k = \sum_{k\geq 1} 1/\lambda_k$. Si cette dernière série est convergente, la variable aléatoire positive $\log(X_\infty)$ est intégrable et donc finie p.s. Il en est alors de même de $X_\infty$.

**4**. La suite positive $1/X_n$ décroit vers $1/X_\infty$ et par conséquent:

$$\mathbb{E}(1/X_\infty) = \lim_n \downarrow \mathbb{E}(1/X_n) = \lim_n \prod_{k=1}^n \lambda_k/(1+\lambda_k) = 1/\prod_{k\geq 1}(1 + 1/\lambda_k)$$

Ce dernier produit infini est fini si et seulement si la série de terme général $1/\lambda_n$ est convergente. La condition écrite impose donc $\mathbb{E}(1/X_\infty) = 0$ soit $X_\infty = \infty$ p.s.

B

**1**. $\mathbb{E}(U^\alpha) = \lambda \int_1^\infty \frac{1}{u^{1-\alpha+\lambda}}\, du$. Cette intégrale est convergente si et seulement si $1 - \alpha + \lambda > 1$ soit $\alpha < \lambda$ et dans ce cas elle vaut $\lambda/(\lambda - \alpha)$

**2**. Soit $\alpha$ tel que $1 < \alpha < c$. On a $\mathbb{E}(U_n^\alpha) = 1 + \alpha/(\lambda_n - \alpha) \leq 1 + \alpha/(c - \alpha)$. La suite $U_n$ est donc bornée dans $L^\alpha$ avec $\alpha > 1$ ce qui implique qu'elle est uniformément intégrable.

**3**. Si la suite $U_n$ est uniformément intégrable, elle est en particulier intégrable , donc $\lambda_n > 1$, et elle est de plus bornée dans $L^1$. Or $\mathbb{E}(U_n) = \lambda_n/(\lambda_n - 1) = 1 + 1/(\lambda_n - 1)$. Il faut donc que la suite $1/(\lambda_n - 1)$ soit bornée, soit encore $\lambda_n \geq c > 1$.

**4**. On a $\mathbb{P}(|U-1| > \epsilon) = \mathbb{P}(U > 1+\epsilon) = \lambda \int_{1+\epsilon}^{\infty} u^{-\lambda-1}\, du = (1+\epsilon)^{-\lambda}$. Par conséquent la série $\sum \mathbb{P}(|U_n - 1| \geq \epsilon)$ converge dés que $\sum_n \frac{1}{(1+\epsilon)^{\lambda n}} < \infty$. Il suffit que $\overline{\lim}\ (\frac{1}{(1+\epsilon)^{\lambda_n/n}}) < 1$ soit encore $\underline{\lim}\ \lambda_n/n > 0$.

PROBLEME II

**1**. Les variables aléatoires $\mathbb{1}_{\{F_n\}}$ et $(Y_{n+k}; k \geq 1)$ sont indépendantes donc:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F_n\}} \prod_{k=1}^{p} f_k(Y_{n+k})) = \mathbb{P}(F_n) \prod_{k=1}^{p} \mathbb{E}(f_k(Y_{n+k}) = \mathbb{P}(F_n) \prod_{k=1}^{p} \theta(f_k)$$

**2**. En "découpant" selon les valeurs de $\tau$ on obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{F\}} \prod_{k=1}^{p} f_k(Z_k)) &= \sum_n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{F\cap(\tau=n)\}}) \prod_{k=1}^{p} f_k(Y_{n+k})] \\
&= \sum_n \mathbb{P}(F \cap (\tau = n)) \prod_{k=1}^{p} \theta(f_k) = \mathbb{P}(F) \prod_{k=1}^{p} \theta(f_k)
\end{aligned}$$

La seconde égalité découle de la question précédente en tenant compte du fait que $(F \cap (\tau = n)) \in \mathcal{F}_n$. Il s'en suit que les $Z_k$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\theta$, et aussi indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_\tau$

**3**. $S_{n+1}^2 = S_n^2 + 2S_nY_{n+1} + Y_{n+1}^2$ et en conditionnant:

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(Y_{n+1}|F_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2|F_n) = S_n^2 + 2S_n\mu + (\mu^2 + \sigma^2)$$

**4**. En utilisant la décomposition proposée:

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} S_k^2 \mathbb{1}_{\{\tau=k\}} + S_{n+1}^2 \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \\
\mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \sum_{k=0}^{n} S_k^2 \mathbb{1}_{\{\tau=k\}} + \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \mathbb{E}(S_{n+1}^2|Fn)
\end{aligned}$$

En effet, les variables aléatoires $S_k^2 \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}$ sont $\mathcal{F}_k$ (et donc $\mathcal{F}_n$) mesurables pour $k \leq n$ et $(\tau > n)$ est aussi $\mathcal{F}_n$ mesurable. Il suffit donc d'appliquer le résultat précédent pour obtenir $\mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = W_n + \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}(2\mu S_n + \mu^2 + \sigma^2)$. La conclusion est alors claire si $\mu = 0$.

PROBLEME III

**1**. Pour $x, y \in \mathbb{N}$, la matrice de transition est définie par $Q(x,y) = \mathbb{P}((x+U)^+ = y)$. Pour $x = 0$ on obtient $Q(0,0) = q$, $Q(0,1) = p$ et $Q(0,y) = 0$ pour $y > 1$. Pour $x \geq 1$

on a $(x+U)^+ = x+U$, donc $Q(x,x+1) = p$ , $Q(x,x-1) = q$ et $Q(x,y) = 0$ si $y \neq x \pm 1$.

**2**. Si $x = y$, il n'y a rien à prouver, sinon il existe toujours une suite de points consécutifs $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ et alors $Q^n(x,y) \geq Q(x,x_1)Q(x_1,x_2)\dots Q(x_{n-1},y) > 0$.

**3**. On sait que $X_n$ et $U_{n+1}$ sont indépendants et donc pour $t \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}(t) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(t^{(k+U_{n+1})^+} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}}) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{E}(t^{(k+U_{n+1})^+}) \\
&= (q+pt)\mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k\geq 1}(pt^{k+1} + qt^{k-1})\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= (q+pt)\Psi_n(0) + pt(\Psi_n(t) - \Psi_n(0)) + \frac{q}{t}(\Psi_n(t) - \Psi_n(0)) \\
&= q\Psi_n(0)(1-1/t) + \Psi_n(t)(tp + q/t)
\end{aligned}$$

Pour $t = 0$ on a $\Psi_{n+1}(0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}((X_n + U_{n+1})^+ = 0) = \mathbb{P}((X_n = 1) \cap (U_{n+1} = -1)) + \mathbb{P}((X_n = 0) \cap (U_{n+1} = -1)) = q(\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)) = q(\Psi_n(0) + \Psi'_n(0))$

**4**. Soit $\pi$ vérifiant $\pi = \pi Q$. Si on prend $\pi$ comme loi de $X_0$, alors pour tout $n$ c'est aussi la loi de $X_n$ et donc $\Psi$ est un point fixe de l'équation précédente. Réciproquement, si $\Psi$ est un point fixe, alors en prenant $\pi$ pour loi de $X_0$, on obtient que c'est aussi la loi de $X_1$. Or la loi de $X_1$ est $\pi Q$ et on obtient donc $\pi = \pi Q$. L'équation de point fixe s'écrit pour $0 < t < 1$ (après division par $(1-t)$): $\Psi(t) = q\Psi(0)\dfrac{1-1/t}{1-pt-q/t} = \Psi(0)\dfrac{1}{1-pt/q}$. Pour que $\Psi$ soit une fonction génératrice , il faut qu'elle soit développable en série entière de rayon de convergence $\geq 1$. Ceci impose $(p < q)$ et on obtient le développement en série valable sur $0 \leq t < q/p$: $\Psi(t) = \Psi(0)(\sum_{n\geq 0} t^n p^n/q^n)$

**5**. L'équation $\mu = \mu Q$ s'écrit $p\mu(0) = q\mu(1)$ puis pour $n \geq 1$, $\mu(n) = p\mu(n-1) + q\mu(n+1)$. On obtient alors facilement par récurrence, la solution $\mu(n) = \mu(0)p^n/q^n$ pour $n \geq 1$. La série de terme général $\mu(n)$ n'est convergente que si $(p < q)$ et on retrouve la solution de la question précédente. Pour avoir une probabilité, il faut choisir $\mu(0) = \psi(0) = (\sum_{n\geq 0} p^n/q^n)^{-1} = 1 - p/q$.

### 1.5. Année universitaire 05-06

**10 Novembre 2005**

PROBLÈME I

Soit $A_n$, $n \geq 1$ une suite d'événements indépendants dans un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , telle que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{A_k\}}$.

1. Que peut-on dire du comportement asymptotique de $S_n$?
2. Pour $A \in \mathcal{A}$, comparer $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{A\}})$ et $\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\{A\}})$. En déduire que $\mathrm{Var}(S_n) \leq \mathbb{E}(S_n)$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Majorer $\mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon \mathbb{E}(S_n)\}$. Que peut-on en déduire à propos de la convergence de la suite $\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ ?

4. Soit $X_n$ une suite croissante de variables aléatoires positives et $c_n$ une suite croissante de réels positifs qui tend vers $+\infty$. On pose $Z_n = \frac{X_n}{c_n}$. On suppose qu'il existe une sous suite $n_k$ telle que $\lim_{k\to\infty} Z_{n_k} = Y$ p.s. et que $\lim_{k\to\infty} \frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}} = 1$. Montrer, en encadrant $Z_m$ pour $n_k \le m \le n_{k+1}$, que la suite $Z_n$ converge p.s. vers $Y$.

5. *Application*: Montrer que $\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ converge p.s. vers 1, en considérant la suite $c_n = \mathbb{E}(S_n)$ et la sous suite d'entier $n_k$ définie par $n_k = \inf\{m \; ; \; c_m \ge k^2\}$ (Pour la limite de $\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}$ on pourra utiliser le fait que la suite $c_n$ a des sauts d'au plus 1 et que donc il existe toujours un $c_m$ dans l'intervalle $[k^2, k^2+1]$).

PROBLÈME II

Soit $U$ une variable aléatoire de carré intégrable, d'espérance nulle et de variance 1, telle que $\log(|U|)$ soit intégrable. On considère une suite $U_n$, $\underline{n \in \mathbb{Z}}$, de variables aléatoires indépendantes et de même loi que $U$ ainsi que deux réels strictement positifs $a$ et $b$. Pour alléger les notations on pose $V = bU^2$, $V_n = bU_n^2$.
On considère l'équation de récurrence aléatoire en $W$:

$$W_{n+1} = a + V_{n+1} W_n, \ \underline{n \in \mathbb{Z}}, \quad W_n \ge 0 \quad \text{et} \quad W_n < \infty \ p.s. \qquad (\clubsuit)$$

On pose $X_n = a(1 + \sum_{k\ge 0} V_n V_{n-1} \dots V_{n-k})$

1. Déterminer les valeurs de $b$ pour lesquelles $\mathbb{E}(X_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2. Vérifier que si $X_n < \infty$, $p.s.$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors la suite $X_n$ est solution de $(\clubsuit)$.

3. Montrer que $\log(V)$ est intégrable.

   (a) On suppose que $\mathbb{E}(\log(V)) < 0$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{V_n V_{n-1} \dots V_{n-k}} < 1$, $p.s.$. En déduire que la suite $X_n$ est solution de $(\clubsuit)$ dans ce cas.

   (b) Pouquoi la relation $\mathbb{E}(\log(V)) < 0$ est-elle satisfaite lorsque $0 < b < 1$ ?

   (c) Donner un exemple de loi pour la variable aléatoire $U$, de type loi uniforme sur un intervalle $[-\alpha, \alpha]$, telle que $\mathbb{E}(\log(V)) < 0$ pour des valeurs de $b$ plus grandes que 1 (on commencera par calculer $\alpha$ pour avoir $\mathbb{E}(U^2) = 1$).

4. On se place à partir de maintenant dans le cas $0 < b < 1$. On pose $Y_n = U_n \sqrt{X_{n-1}}$ et on désigne par $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $(U_k \; ; \; k \le n)$.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(Y_n^2)$. La famille $(Y_n, \ n \in \mathbb{Z})$ est-elle uniformément intégrable?

   (b) Calculer $\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1})$ et montrer que $\mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = a + bY_{n-1}^2$.

(c) Que valent ces mêmes espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{G}_{n-1}$ si on définit $\mathcal{G}_n$ comme la tribu engendrée par les $(Y_k \; ; \; k \leq n)$?

(d) Si on suppose que la loi de $U$ est gaussienne, quelle est la loi de $(Y_n | Y_{n-1} = y)$? En déduire par exemple $\mathbb{E}(\exp(-Y_n)|Y_{n-1})$.

PROBLÈME III

Soit $V$ une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble à trois éléments $E = \{-1, 0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(V = 1) = p$, $P(V = 0) = r$, $\mathbb{P}(V = -1) = q$, ces trois paramètres vérifiant $p + r + q = 1$ et $p > 0$, $q > 0$ (on n'impose pas $r > 0\ldots$). On considère une suite $V_n$, $n \geq 1$, de variables aléatoires indépendantes et de même loi que $V$, et de plus indépendantes d'une variable aléatoire $X_0$ à valeurs dans $E$. On définit la suite $X_n$ pour $n \geq 1$ par $X_n = X_0 \prod_{k=1}^n V_k$.

1. Dire pourquoi $X_n$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E$ et donner sa matrice de transition $Q$.

2. Calculer $\mathbb{E}(\exp(X_{n+2})|X_n = 1)$ et $\mathbb{E}(X_{n+m}|X_n)$ pour tout $m \geq 1$.

3. Trouver la (les) probabilités(s) invariante(s) (on distinguera les cas $r = 0$ et $r \neq 0$).

4. On se place dans le cas $r \neq 0$ et on désigne par $T$ le temps d'entrée de la chaîne en 0, soit

$$T = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \; ; \; X_n = 0\} & \text{s'il existe } n \geq 0 \text{ tel que } X_n = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer $\mathbb{P}(T > n)$, en fonction de la loi de $X_0$ et du paramètre $r$. Que vaut $\mathbb{E}(T)$?

(b) Comparer les ensembles $(X_n = 0)$ et $(T \leq n)$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x)$ pour $x = \pm 1$, puis que la matrice $Q^n$ converge vers une matrice limite $\Pi$ que l'on écrira.

## Corrigé

PROBLEME I

**1**. D'après le lemme de Borel-Cantelli, si $\sum_k \mathbb{P}(A_k) = \infty$ et les $A_k$ indépendants, la série $\sum_k \mathbb{1}_{\{A_k\}}$ diverge p.s. La suite $S_n$ converge donc p.s. vers l'infini.

**2**. On a $\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\{A\}}) = \mathbb{P}(A) - (\mathbb{P}(A))^2 \leq \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{A\}})$. Par indépendance on a donc $\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\{A_k\}}) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{A_k\}}) = \mathbb{E}(S_n)$.

**3**. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev on obtient:

$$\mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon \mathbb{E}(S_n)\} \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(\varepsilon \mathbb{E}(S_n))^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(S_n)}$$

On en conclut que $\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ tend vers 1 en probabilité puisque $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$ tend vers $+\infty$.

**4**. La suite $X_n$ étant croissante, on a $\frac{X_{n_k}}{c_m} \leq Z_m \leq \frac{X_{n_{k+1}}}{c_m}$. En utilisant la croissance de la suite $c_n$, on obtient facilement que $Z_{n_k}\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}} \leq Z_m \leq Z_{n_{k+1}}\frac{c_{n_{k+1}}}{c_{n_k}}$. La conclusion est alors immédiate.

**5**. En utilisant les notations $X_n = S_n$, $c_n = \mathbb{E}(S_n)$, on voit que $X_n$ et $c_n$ sont croissantes, positives, et que $c_n$ tend vers l'infini. D'aprés ce qui a déjà été démontré, $\mathbb{P}\{|Z_n - 1| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon^2 c_n}$. Or, puisque $c_{n_k} \geq k^2$, la série $\sum_k \mathbb{P}\{|Z_{n_k} - 1| > \varepsilon\}$ est convergente pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'en suit que la suite extraite $Z_{n_k}$ converge p.s. vers 1. D'après la remarque faite dans l'énoncé on a $k^2 \leq c_{n_k} \leq k^2+1$ et par conséquent $\frac{k^2}{(k+1)^2+1} \leq \frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}} \leq \frac{k^2+1}{(k+1)^2}$ . Les deux suites encadrantes convergent vers 1, la preuve est donc complète.

## PROBLEME II

**1**. La série définissant $X_n$ étant à termes positifs, on a $\mathbb{E}(X_n) = a(1+\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(V_nV_{n-1}\dots V_{n-k}))$ or les $V_i$ sont indépendants et d'espérance $b$, on a par conséquent $\mathbb{E}(X_n) = a(1 + \sum_{k\geq 0} b^{k+1}$. Cette dernière série ne converge que si $b < 1$ et alors $\mathbb{E}(X_n) = a/(1-b)$.

**2**. Vérification immédiate.

**3**. La variable aléatoire $\log(V)$ est intégrable puisque $\mathbb{E}(|\log(V)|) = \log(b)+2\mathbb{E}(|\log(|U])|)$ et $\log(|U|)$ est intégrable par hypothse.

**3.a**. Pour $n$ fixé, on pose $Z_k = V_nV_{n-1}\dots V_{n-k}$, d'où $\log(\sqrt[k]{Z_k}) = (\sum_{i=0}^k \log(V_{n-i}))/k$. D'après la loi forte des grands nombres cette suite converge p.s. vers $\mathbb{E}(\log(V))$. Si cette dernière quantité est strictement négative on obtient que $\sqrt[k]{Z_k}$ a une limite $< 1$. La série définissant $X_n$ vérifie alors p.s. le critère de convergence de Cauchy des séries à termes positifs et est donc p.s. convergente.

**3.b**. D'après l'inégalité de Jensen et la concavité de la fonction log, on a, pour $b < 1$, $\mathbb{E}(\log(V)) \leq \log(\mathbb{E}(V)) = \log(b) + \log(\mathbb{E}(U^2)) = \log(b) < 0$.

**3.c**. Si la loi de $U$ est uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$ on a $\mathbb{E}(U) = 0$, $\mathbb{E}(U^2) = \alpha^3/3$ et on choisit donc $\alpha = \sqrt{3}$. Ensuite $\mathbb{E}(\log(|U|)) = \log(\sqrt{3}) - 1$ et par conséquent $\mathbb{E}(\log(V)) = \log(b) + 2(\log(\sqrt{3}) - 1) = \log(3b/\mathrm{e}^2)$. Il suffit donc de choisir $b < \mathrm{e}^2/3 \sim 2.46$

**4.a**. On remarque que $U_n$ et $X_{n-1}$ (qui est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable) sont des variables aléatoires indépendantes . Par conséquent $\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{E}(U_n^2)\mathbb{E}(X_{n-1}) = a/(1-b)$. La famille $Y_n$ est bornée dans $L^2$ et est donc uniformément intégrable.

**4.b**. En utilisant le fait que $X_{n-1}$ est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable et que $U_n$ est indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$ on obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \sqrt{X_{n-1}}\mathbb{E}(U_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \sqrt{X_{n-1}}\mathbb{E}(U_n) = 0 \\
\mathbb{E}(Y_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) &= X_{n-1}\mathbb{E}(U_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}\mathbb{E}(U_n^2) = X_{n-1} = a + bY_{n-1}^2
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la relation $X_n = a + V_nX_{n-1} = a + bU_n^2X_{n-1} = a + bY_n^2$.

**4.c**. Pour $k \leq n$, la variable aléatoire $Y_k$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable. On a donc $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$. Par tansitivité des espérances conditionnelles on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}_{n-1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{G}_{n-1}) = 0 \\ \mathbb{E}(Y_n^2|\mathcal{G}_{n-1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_n^2|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{G}_{n-1}) = \mathbb{E}(a + bY_{n-1}^2|\mathcal{G}_{n-1}) = a + bY_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Il n'y a donc aucun changement.

**4.d**. Soit $\varphi(u, x) = u\sqrt{x}$. On a $Y_n = \varphi(U_n, X_{n-1}) = \varphi(U_n, a + bY_{n-1}^2)$ avec $U_n$ et $Y_{n-1}$ indépendantes. Il s'en suit que la loi de $(Y_n|Y_{n-1} = y)$ est la loi de $\varphi(U_n, a + by^2)$ soit une loi normale centrée et de variance $a + by^2$. On a donc $\mathbb{E}(exp(Y_n)|Y_{n-1} = y) = \exp((a + by^2)/2)$ soit $\mathbb{E}(exp(Y_n)|Y_{n-1}) = \exp((a + bY_{n-1}^2)/2)$

PROBLEME III

**1**. On a $X_{n+1} = X_nV_{n+1} = g(X_n, V_{n+1})$ avec les variables aléatoires $V_k$ i.i.d. et indépendantes de $X_0$. On a donc une chaîne de Markov de transition $Q(x, y) = \mathbb{P}(g(x, V_{n+1}) = y) = \mathbb{P}(xV = y)$. On en déduit que $Q(-1, y) = \mathbb{P}(V = -y)$, $Q(1, y) = \mathbb{P}(V = y)$, $Q(0, \pm 1) = 0$ et $Q(0, 0) = 1$, soit la matrice $Q = \begin{pmatrix} p & r & q \\ 0 & 1 & 0 \\ q & r & p \end{pmatrix}$.

**2**. On sait que pour $m \geq 1$, on a $\mathbb{E}(f(X_{n+m})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(f(X_{n+m})|X_n) = Q^m f(X_n)$. En choisissant la fonction $f(x) = \exp(x)$, $\mathbb{E}(f(X_{n+2})|X_n = 1) = Q^2 f(1)$. Après calcul de la matrice $Q^2$ on obtient que cette expression est égale à $2pq/e + r(p+q+1) + (p^2+q^2)e$. On a $X_{n+m} = X_nV_{n+1} \dots V_{n+m}$. Or $X_n$ et les $(V_i \ ; \ i \geq n+1)$ sont des variables aléatoires indépendantes, par conséquent $E(X_{n+m}|X_n) = X_n\mathbb{E}(V_{n+1} \dots V_{n+m}) = (p - q)^m X_n$.

**3**. Soit $\pi = (\alpha, \beta, \gamma)$. L'équation $\pi Q = \pi$ est équivalente au système: $q(\gamma - \alpha) = \alpha r$, $r(\alpha+\gamma) = 0$, $q(\alpha-\gamma) = \alpha r$. Par conséquent si $r \neq 0$ on a l'unique solution $\pi = (0, 1, 0)$, sinon on a la famille de solutions $\pi = ((1 - \beta)/2, \beta, (1 - \beta)/2)$ pour $0 \leq \beta \leq 1$.

**4.a** On a $(T > n) = (X_0 \neq 0, V_1 \neq 0, \dots, V_n \neq 0)$. Par indépendance des variables aléatoires figurant dans cette expression, on obtient $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(X_0 \neq 0)(1-r)^n$. De plus $\mathbb{E}(T) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(X_0 \neq 0)/r$.

**4.b** On a bien sûr $(X_n = 0) = (T \leq n)$ p.s. puisque si l'on passe en 0, on y reste. Par conséquent $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_0 \neq 0)(1-r)^n$ et cette suite converge vers 1. Il s'en suit que pour $x = \pm 1$, alors $\mathbb{P}(X_n = x)$ tend vers 0. Ceci étant valable pour toute loi initiale, si l'on choisit une loi initiale concentrée sur un point $x$, alors $\mathbb{P}(X_n = y) = Q^n(x, y)$. On en déduit que la matrice $Q^n$ converge vers la matrice $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.